Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 14 vom 27. Januar 2025

Fingerübung A (Determinante). Berechnen Sie für folgende Matrizen in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ die Determinante. Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fingerübung B (Nullstellen). Bestimmen Sie für jede der folgenden Gleichungen die Menge aller $\lambda \in \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{F}_2$), die die Gleichung lösen:

1. $\lambda^2 + 1 = 0$
2. $\lambda^2 - 1 = 0$
3. $\lambda^2 + 2 \cdot \lambda + 3 = 0$
4. $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$

Fingerübung C (Eigenwerte und Eigenräume). Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ alle Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und alle Eigenräume (in $\mathbb{C}^2$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung D (Eigenwerte und Eigenräume, umgekehrt). Geben Sie ein Beispiel für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an, die 2025 als Eigenwert mit Eigenraum $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(e_1 + e_2)$ besitzt.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (es kann nur einen geben?! 2 Punkte). Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die das folgende lineare Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt:

Gesucht: alle $x \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_2 - x_3 &= \lambda \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 &= 1 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 - x_3 &= 2 \cdot \lambda \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (es muss einen geben?! 4 $(= 2 + 2)$ Punkte).

1. Zeigen Sie, dass jede Matrix aus $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

   Hinweis. Analysis!

2. Zeigen Sie, dass es Matrizen in $M_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$ gibt, die *keinen* Eigenwert in $\mathbb{F}_2$ besitzen.

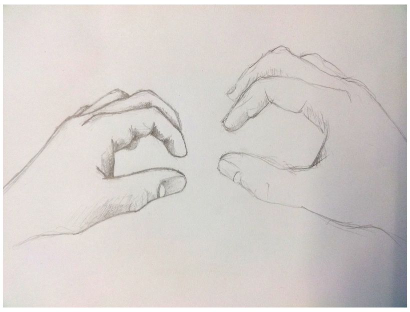
Aufgabe 2 (Eigenwerte und Eigenvektoren; 4 $(= 2{+}2)$ Punkte). Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so ist $2025 \cdot \lambda$ ein Eigenwert von $2025 \cdot A$.
2. Sind v und w Eigenvektoren von A, so ist $v + w$ ein Eigenvektor von A.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Orientierungen; 4 ($= 2+2$) Punkte)**.** Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $n := \dim_{\mathbb{R}} V > 0$. Wir definieren wie folgt eine Relation „$\sim$“ auf der Menge der Basen von V: Sind B und C Basen von V, so gelte genau dann $B \sim C$, wenn $\det(T_{B,C}) > 0$ ist. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgabenteile:

1. Zeigen Sie, dass „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen von Basen von V bezüglich „$\sim$“ bezeichnet man als *Orientierungen von V*.
2. Zeigen Sie, dass die Basen
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
verschiedene Orientierungen von $\mathbb{R}^3$ repräsentieren.
3. Was hat der zweite Teil mit der linken bzw. rechten Hand zu tun? Illustrieren Sie Ihre Antwort geeignet!
4. Zeigen Sie, dass V genau zwei Orientierungen besitzt.



Aufgabe 4 (Determinante von Blockmatrizen; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $A \in M_{n_1 \times n_1}(K)$, $B \in M_{n_1 \times n_2}(K)$, $D \in M_{n_2 \times n_2}(K)$. Zeigen Sie, dass
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$
Dabei ist die linke Matrix in $M_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}(K)$ wie angegeben aus den Blöcken A, B, D und der Nullmatrix zusammengesetzt.
Hinweis. Viele Wege führen nach Rom! Naheliegende Möglichkeiten sind Entwicklung nach der ersten Spalte und Induktion über n_1 oder die axiomatische Beschreibung der Determinante, angewendet auf eine geeignete Funktion.

Bonusaufgabe (Permutationen und Transpositionen; 4 ($= 3 + 1$) Punkte)**.**

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe S_n von Transpositionen erzeugt wird: Ist $\sigma \in S_n$, so gibt es $k \in \mathbb{N}$ und Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ mit
$$\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k.$$
2. Schlagen Sie nach, wie der Sortieralgorithmus *Bubble Sort* funktioniert. Was hat das mit dem ersten Aufgabenteil zu tun?

Abgabe bis 3. Februar 2025, 10:05, via Briefkasten/GRIPS

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Die Aufgaben von Blatt 15 zählen als Bonuspunkte.