Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 15 vom 3. Februar 2025

Fingerübung A (komplexe Zahlen)**.** Wiederholen Sie die Grundlagen und Standardrechentechniken zu komplexen Zahlen (s. z.B. Anhang A.6 im Skript).

Fingerübung B (Diagonalisierbarkeit)**.** Welche der folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ sind über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar? Können Sie sich die zugehörigen linearen Abbildungen geometrisch vorstellen?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung C (Matrizen über $\mathbb{F}_2$)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Jede Matrix in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$ ist über $\mathbb{F}_2$ diagonalisierbar.
2. Jede Matrix in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$, die nicht die Nullmatrix ist, ist invertierbar.

Fingerübung D (charakteristische Polynome)**.** Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen (in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (synchroner Basiswechsel; 2 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und sei $n := \dim_K V$. Sei B eine Basis von V und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit
$$A = S^{-1} \cdot M_{B,B}(f) \cdot S.$$
2. Es gibt eine Basis C von V mit $A = M_{C,C}(f)$.

Aufgabe 1 (Anschauung; 4 (= 1+1+1+1) Punkte)**.** Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte von f.
2. Bestimmen Sie Basen der Eigenräume von f.
3. Ist $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Wie kann man f geometrisch veranschaulichen?

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Diagonalisierbarkeit; 4 ($= 2+2$) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Jede Matrix in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.
2. Ist $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$ über $\mathbb{F}_2$ diagonalisierbar, so besitzt A einen Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit mindestens 2.

Aufgabe 3 (Potenzen; 4 ($= 2 + 2$) Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie A^{2022} mit den folgenden Methoden:

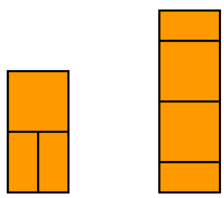
1. über den Konjugationstrick
2. durch eine geeignete Induktion

Hinweis. Herzlichen Glückwunsch – Sie haben damit eine Staatsexamensaufgabe (also ein Fünftel einer Staatsexamensklausur) gelöst [Algebra, Frühjahr 2022]. Sogar gleich doppelt.

Aufgabe 4 (großspurig; 4 Punkte)**.** Sei $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ mit $\det A = 1$ und es gelte $|\operatorname{tr} A| > 2$. Zeigen Sie, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Bonusaufgabe (Blorx Tower; 4 Punkte)**.** Blorx verfügt über die folgenden Sorten von Bausteinen (mit den Abmessungen 1×2 und 2×2):

Daraus möchte er Türme der Form $n \times 2$ mit $n \in \mathbb{N}$ bauen. Zum Beispiel sind



Blorxtürme der Höhe 4 bzw. 6. Finden Sie eine explizite (nicht rekursive) Formel für die Anzahl der Blorxtürme gegebener Höhe.
Hinweis. Gehen Sie wie bei den Fiblorxnaccizahlen vor.

Freiwillige Abgabe bis 10. Februar, 10:05, via Briefkasten/GRIPS. Alle Punkte zählen als Bonuspunkte.