Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 3 vom 28. Oktober 2024

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Übersetzung).

1. Ist „Übersetzen“ von der Menge der deutschen Wörter in die Menge der englischen Wörter eine Abbildung?
2. Ist „Übersetzen“ von der Menge der deutschen Wörter in die Potenzmenge der Menge der englischen Wörter eine injektive Abbildung?

Fingerübung B (Schuhgröße). Ist in Ihrer Übungsgruppe die Abbildung „Schuhgröße“ von der Menge der Teilnehmer in die Menge der Schuhgrößen injektiv? Bestimmen Sie für diese Abbildung die Faser von 42.

Fingerübung C (surjektiv). Seien X, Y Mengen und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in deutsche Sätze mit derselben Bedeutung. Ist eine dieser Aussagen äquivalent zur Surjektivität von f ?

1. $\exists_{x\in X} \quad \forall_{y\in Y} \quad f(x) = y$
2. $\forall_{x\in Y} \quad \exists_{y\in X} \quad f(y) = x$
3. $\forall_{x\in X} \quad \forall_{y\in Y} \quad f(x) = y$
4. $\exists_{x\in X} \quad \exists_{y\in Y} \quad f(x) = y$

Fingerübung D (kommutative Diagramme). Welche Gleichung gehört zu welchem kommutativen Diagramm?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "h"] \\ Z & W \arrow[l, "k"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u, "g"] \arrow[r, "k"'] & W \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

1. $k \circ h = g \circ f$
2. $h \circ k \circ g = f$
3. $h \circ f = k \circ g$
4. $f \circ g = h \circ k$

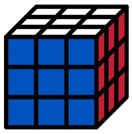
Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (aussagenlogische Tautologien; 2 Punkte). Seien A, B, C aussagenlogische Variablen. Handelt es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln um aussagenlogische Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\bigl(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)\bigr) \Longleftrightarrow \bigl((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C\bigr)$$
$$\bigl(((\neg A) \lor B) \land C\bigr) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

Bitte wenden

Aufgabe 1 (Rubik's Cube; 4 Punkte)**.** Sei P die Menge aller möglichen Positionen des Rubik's Cube und sei $U \colon P \longrightarrow P$ die Abbildung, die durch Rotation (um 90 Grad) der oberen Scheibe im Uhrzeigersinn gegeben ist. Zeigen Sie, dass U bijektiv ist.



Hinweis. Wie kann man die inverse Abbildung einfach angeben?

Aufgabe 2 (injektiv; 4 Punkte)**.** Seien X, Y Mengen und sei $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in deutsche Sätze mit derselben Bedeutung. Ist eine dieser Aussagen äquivalent zur Injektivität von f ? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $\forall_{x \in X} \quad \forall_{x' \in X} \quad \big((f(x) \neq f(x')) \Longrightarrow (x \neq x') \big)$
2. $\forall_{x \in X} \quad \forall_{x' \in X} \quad \big((f(x) \neq f(x')) \lor (x = x') \big)$

Aufgabe 3 (Potenzen von Abbildungen; 4 Punkte)**.** Sei $X := \{\mathsf{B}, \mathsf{L}, \mathsf{O}, \mathsf{R}, \mathsf{X}\}$. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow X$ mit folgender Eigenschaft:

$$f \circ f \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ f \neq \mathrm{id}_X \,.$$

Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Gliedern Sie auch bei dieser Aufgabe die Lösung sinnvoll in Voraussetzung, Behauptung, Beweis.

Aufgabe 4 (Komposition; 4 Punkte)**.** Sei X eine Menge und seien $e, f \colon X \longrightarrow X$ Abbildungen.

1. Es gelte für alle Abbildungen $g \colon X \longrightarrow X$, dass $g \circ e = g$. Zeigen Sie: Dann ist $e = \mathrm{id}_X$.
2. Es gebe eine Abbildung $g \colon X \longrightarrow X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_X = g \circ f$. Zeigen Sie: Ist $h \colon X \longrightarrow X$ eine Abbildung mit $f \circ h = \mathrm{id}_X$, so folgt $h = g$.

Hinweis. Lassen Sie sich von der abstrakten Formulierung nicht abschrecken! Es gibt *sehr* kurze Lösungen.

Bonusaufgabe (der Satz von Schröder–Bernstein; 4 Punkte)**.** Seien X und Y Mengen. Zeigen Sie: Gibt es injektive Abbildungen $X \longrightarrow Y$ und $Y \longrightarrow X$, so gibt es bereits eine bijektive Abbildung $X \longrightarrow Y$.
Hinweis. Eine Abbildung $h \colon P(X) \longrightarrow P(X)$ heißt *monoton wachsend*, wenn für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \subset B$ gilt, dass

$$h(A) \subset h(B).$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ ist ein *Fixpunkt von* h, wenn $h(A) = A$ gilt. Zeigen Sie, dass $\bigcup \big\{ B \subset X \bigm| B \subset h(B) \big\} = \big\{ x \bigm| \exists_{B \in P(X)} \quad (B \subset h(B)) \land (x \in B) \big\}$ ein Fixpunkt von h ist.

Betrachten Sie dann zu $f \colon X \longrightarrow Y$ und $g \colon Y \longrightarrow X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} h \colon P(X) &\longrightarrow P(X) \\ A &\longmapsto X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass h monoton wachsend ist und betrachten Sie einen Fixpunkt …

Abgabe bis 4. November 2024, 10:05, via (Briefkasten/GRIPS)