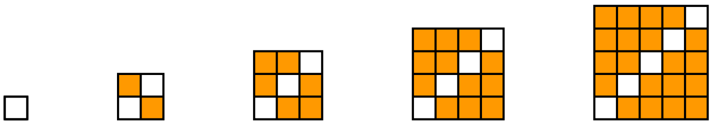
Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 4 vom 4. November 2024

Fingerübung A (Summen)**.** Bestimmen Sie $\sum_{j=1}^{2024}(2 \cdot j)$ sowohl durch Rückführung auf bekannte Ergebnisse als auch per vollständiger Induktion.

Fingerübung B (graphische Rekursion)**.** Beschreiben Sie die Anzahl der gelben Quadrate in Schritt $n \in \mathbb{N}$ durch eine Summennotation (mit $\sum$). Geben Sie dann eine geschlossene Formel für diese Anzahl an und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.



0 1 2 3 4

Fingerübung C (Rekursion)**.** Wir definieren $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} f(0) &:= 42 \\ f(n+1) &:= 2024 \cdot f(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Geben Sie eine geschlossene Darstellung für f an und beweisen Sie diese per Induktion. Was passiert, wenn man den Startwert von 42 auf 0 ändert?

Fingerübung D (Monoide)**.**

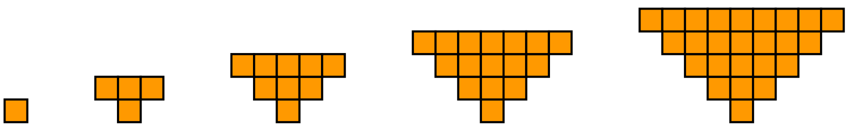
1. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, (m,n) \mapsto m^n, 1)$ *kein* Monoid ist.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, (m,n) \mapsto m^2 + n^2, 0)$ *kein* Monoid ist.
3. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $(P(X), \cap, X)$ ein Monoid ist.
4. Zeigen Sie, dass $(\{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}, \wedge, \mathrm{w})$ ein Monoid ist.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Mengenoperationen; 2 Punkte)**.** Sei X eine Menge und seien $A, B \subset X$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Es gilt $X \setminus (X \setminus A) = A$.
2. Es gilt $A \setminus B = B \setminus A$.

Aufgabe 1 (Treppeppeppe; 4 Punkte)**.** Beschreiben Sie die Anzahl der gelben Quadrate in Schritt $n \in \mathbb{N}$ durch eine Summennotation (mit $\sum$). Geben Sie dann eine geschlossene Formel für diese Anzahl an und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.



0 1 2 3 4

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Quadratsummen; 4 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = n^2 \cdot (n^2 + 1)$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $6 \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)$.

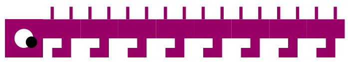
Hinweis. Probieren Sie ein paar Werte für n aus ...

Aufgabe 3 (Blorxscher Gleichheitssatz; 4 Punkte)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis"? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

Behauptung. Alle Außerirdischen haben dieselbe Anzahl an Füßen.

Beweis. Wir zeigen per vollständiger Induktion: Ist $n \in \mathbb{N}$, so besitzen in jeder Menge von genau n Außerirdischen alle dieselbe Anzahl an Füßen.

- *Induktionsanfang.* Ist $n = 0$ oder $n = 1$, so ist die Behauptung wahr.
- *Induktionsvoraussetzung.* Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung sei für n Außerirdische bereits gezeigt.
- *Induktionsschritt.* Wir zeigen, dass die Behauptung auch für $n+1$ Außerirdische gilt: Wir numerieren die Außerirdischen als $A_0, \dots, A_n$. Nach Induktionsvoraussetzung haben $A_0, \dots, A_{n-1}$ bzw. $A_1, \dots, A_n$ jeweils dieselbe Anzahl an Füßen. Durch Betrachtung von A_1 folgt, dass dann auch $A_0, \dots, A_n$ alle dieselbe Anzahl an Füßen haben müssen. $\square$



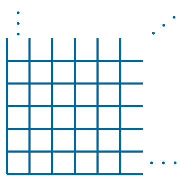
Aufgabe 4 (Monoide; 4 Punkte)**.**

1. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $(P(X), \cup, \emptyset)$ ein Monoid ist.
2. Zeigen Sie, dass $(\{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}, \Longrightarrow, \mathrm{w})$ *kein* Monoid ist.

Bonusaufgabe (für Lehramtsstudenten; 4 Punkte)**.** Aus *Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien (2019)*: „Ein Turm aus Würfeln wird gebildet, indem n gleich große Würfel übereinander gestapelt und geklebt werden. Dieser Turm soll mit Farbe bestrichen werden. Stelle einen Term zur Berechnung der Anzahl der zu streichenden Würfelflächen für einen Turm auf, der aus n Würfeln zusammengesetzt ist."

Lösen Sie diese Aufgabe, indem Sie die Anzahl der zu streichenden Würfelflächen zunächst durch eine Rekursion beschreiben, dann eine geschlossene Formel dafür angeben und diese schließlich per Induktion beweisen. Wie würde im Gegensatz dazu ein Schüler wahrscheinlich vorgehen und argumentieren?

Bonusaufgabe (Infinisudoku; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Man kann das nach rechts und oben unendliche Gitter



so mit natürlichen Zahlen füllen, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede natürliche Zahl genau einmal auftritt.

Hinweis. Versuchen Sie zunächst, das Problem systematisch für Quadrate der Seitenlänge $1, 2, 4, \dots$ zu lösen und kombinieren Sie diese Lösungen induktiv.

Abgabe bis 11. November 2024, 10:05, via (Briefkasten/GRIPS)