Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 5 vom 11. November 2024

Fingerübung A (eine studentische Relation)**.** Wir betrachten die Relation „ist im selben Studiengang eingeschrieben wie“ auf der Menge aller Studenten der UR. Ist diese Relation reflexiv? Symmetrisch? Transitiv? Eine Äquivalenzrelation? Eine Abbildung?

Fingerübung B (Relationship)**.** Wir betrachten die Relation „ist verheiratet mit“ auf der Menge aller Bürger Deutschlands. Ist diese Relation reflexiv? Symmetrisch? Transitiv? Eine Äquivalenzrelation? Eine Abbildung?

Fingerübung C (Modulo-Rechnung)**.** Berechnen Sie:

1. $[3] \cdot [3]$ in $\mathbb{Z}/3$
2. $[3] \cdot [3]$ in $\mathbb{Z}/4$
3. $[3] \cdot [3]$ in $\mathbb{Z}/5$
4. $[3] \cdot [3]$ in $\mathbb{Z}/6$
5. $[2] + [3]$ in $\mathbb{Z}/3$
6. $[2] + [3]$ in $\mathbb{Z}/4$
7. $[2] + [3]$ in $\mathbb{Z}/5$
8. $[2] + [3]$ in $\mathbb{Z}/6$

Fingerübung D (Rechnen in Gruppen)**.** Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Für alle $g, h \in G$ ist $(g \cdot h)^{-1} = g^{-1} \cdot h^{-1}$.
2. Für alle $g, h \in G$ ist $g \cdot h \cdot g^{-1} = h$.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (injektive Abbildungen; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.** Seien X, Y, Z Mengen und seien $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie mithilfe von Linksspalten:

1. Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

Bitte wenden

Aufgabe 1 (symmetrische Gruppe, graphisch; 4 Punkte)**.** In der Gruppe S_3 betrachten wir die Elemente $\sigma := (1\ 2\ 3)$ und $\tau := (1\ 2)$ sowie die Relation

$$\big\{(g, g \circ \sigma) \bigm| g \in S_3\big\} \cup \big\{(g, g \circ \tau) \bigm| g \in S_3\big\}.$$

Skizzieren Sie diese Relation, indem Sie für jedes Element von S_3 einen Punkt $\bullet$ zeichnen (und entsprechend beschriften) und je zwei solche Punkte durch einen Pfeil $\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet$ verbinden, wenn die zugehörigen Gruppenelemente in Relation stehen. Wählen Sie dabei eine übersichtliche Darstellung und begründen Sie Ihre Skizze durch geeignete Rechnungen in S_3 !

Aufgabe 2 (Rechnen in Gruppen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Für alle $g, h \in G$ gibt es ein $x \in G$ mit $g \cdot x \cdot g^{-1} = h$.
2. Für alle $g \in G$ gibt es ein $x \in G$ mit $x \cdot x = g$.

Hinweis. Falls Sie Gegenbeispiele suchen: Machen Sie möglichst viele entsprechende Rechnungen in bereits bekannten Gruppen.

Aufgabe 3 (Modulo-Rechnung; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\sim_n$ die Relation $\big\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \bigm| n \text{ teilt } x - y\big\}$ auf $\mathbb{Z}$.

1. Zeigen Sie, dass $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
2. Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}/2024$ mit $[5] \cdot x = [6]$ in $\mathbb{Z}/2024$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Äquivalenzklassen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei X eine Menge und sei „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf X.

1. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in X$ gilt $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$.

   Hinweis. Illustrieren Sie Ihre Argumente mit geeigneten Skizzen!

2. Zeigen Sie: Es gilt $\bigcup(X/\sim) = X$.

   Hinweis. Nach Definition ist $\bigcup(X/\sim) = \{x \mid \exists_{c \in X/\sim} \quad x \in c\}$.

Bonusaufgabe (musikalische Gruppe; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Wir modellieren die zwölf Halbtonschritte (bzgl. gleichstufiger Stimmung) in einer Oktave durch $\mathbb{Z}/12$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Welches musikalische Konzept wird durch folgende Abbildung modelliert?

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/12 &\longrightarrow \mathbb{Z}/12 \\ x &\longmapsto x + [7] \end{aligned}$$

2. Welche Abbildung modelliert „Inversion am fünften Halbton“?

J. S. Bach, Fuga I, BWV 846

Abgabe bis 18. November 2024, 10:05, via (Briefkasten/GRIPS)