Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann | Blatt 6 vom 18. November 2024

Fingerübung A (Bruchrechnung). Erklären Sie das Kürzen/Erweitern von Brüchen anhand der Relation $\sim_\bullet$ auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, welche wir im Rahmen der Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ betrachtet haben.

Fingerübung B (Binomi III). Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper und seien $x, y \in K$. Zeigen Sie, dass

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2.$$

Fingerübung C (UR-Koordinaten). Betrachten Sie eine der Ecken des Raumes, in dem die Übungen stattfinden, als Nullpunkt in $\mathbb{R}^3$ und die drei angrenzenden Kanten als Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^3$. Welche Koordinaten haben dann die folgenden Punkte?

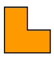
Mittelpunkt Ihres Tisches, Mittelpunkt der Tafel, Haupteingang zur Mensa, H 32.

Fingerübung D (Vektorrechnung). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $\lambda \in K \setminus \{0\}$, $v \in V \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll?

$$\frac{1}{\lambda} \cdot v, \quad v \cdot \lambda, \quad \lambda \cdot \frac{1}{v}, \quad \lambda + v, \quad v - \lambda \cdot v, \quad \lambda^{2024} \cdot v, \quad \lambda \cdot v^{2024}.$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Pf-L-asterung; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte). Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $L(n)$ die Anzahl der verschiedenen lückenlosen und überlappungsfreien Pflasterungen eines $n \times 2$-Rechtecks mit Blöcken der folgenden Form:



Die Blöcke dürfen dabei auch gedreht werden.

1. Beschreiben Sie $L(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch eine (verallgemeinerte) Rekursion.

   Hinweis. Wieviele Startwerte benötigen Sie?

2. Beschreiben Sie $L(3 \cdot n)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch eine geschlossene Formel und beweisen Sie diese per Induktion.

Aufgabe 1 (von A nach B; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Menge

$$[a, b] := \bigl\{ t \cdot a + (1 - t) \cdot b \bigm| (t \in \mathbb{R}) \land (0 \leq t) \land (t \leq 1) \bigr\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Skizzieren Sie die Menge $[a, b]$ für geeignete Beispiele von a und b in $\mathbb{R}^3$.
2. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ist $[a, b]$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Rechnen in Vektorräumen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

1. Für alle $a, b \in V \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $\lambda \in K$ mit
$$\lambda \cdot b = a.$$
2. Für jedes $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und alle $a, b \in V$ gibt es genau ein $x \in V$ mit
$$\lambda \cdot x + a = b.$$

Aufgabe 3 (Körper des Jahres?; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.**

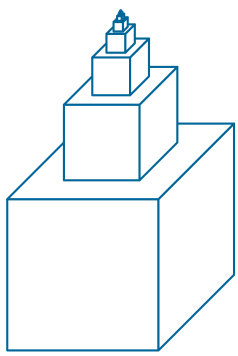
1. Sei $*\colon \mathbb{Z}/2024 \times \mathbb{Z}/2024 \longrightarrow \mathbb{Z}/2024$ eine Abbildung, die das Distributivgesetz bezüglich der gewöhnlichen Addition $+$ auf $\mathbb{Z}/2024$ erfüllt:
$$\forall_{x,y,z \in \mathbb{Z}/2024} \quad \bigl(x * (y + z) = x * y + x * z\bigr) \;\wedge\; \bigl((y + z) * x = y * x + z * x\bigr).$$
Berechnen Sie $[2] * [1012]$. Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Folgern Sie: Es gibt *keinen* Körper mit additiver Gruppe $(\mathbb{Z}/2024, +, [0])$.

Aufgabe 4 (Unterraumschnitt; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien U bzw. W Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass die beiden untenstehenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es gilt $U \cap W = \{0\}$.
2. Zu jedem $v \in V$ gibt es höchstens ein Paar $(u, w) \in U \times W$ mit $v = u + w$.

Bonusaufgabe (OpenSCAD; 4 $= (2 + 2)$ Punkte)**.** OpenSCAD (https://www.openscad.org) ist Software (Open Source, GPLv2) zur Modellierung von dreidimensionalen Objekten, zum Beispiel als Vorstufe für 3D-Druck.

1. Was haben translate([x,y,z]) und scale([x,x,x]) mit der gewöhnlichen $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}^3$ zu tun?
2. Wie kann man basierend auf dem Würfel cube([1,1,1]) auf einfache Weise einen Turm der folgenden Form beschreiben? Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Hinweis. https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/cubetower_exercise.scad