Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 7 vom 25. November 2024

Fingerübung A (Linearkombinationen). Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Wert folgender Linearkombinationen:

$$2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3, \quad 3 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3, \quad \sum_{j=1}^3 1 \cdot v_j, \quad \sum_{j=1}^3 j \cdot v_j$$

Fingerübung B (3D-Familie). Wir betrachten die Familie $(e_1, e_1 + 42 \cdot e_2, e_2 - e_1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Ist diese Familie linear unabhängig? Ist sie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Skizzieren Sie $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(e_1, e_1 + 42 \cdot e_2, e_2 - e_1)$.

Fingerübung C (Binärfamilie). Wir betrachten die Familie

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ${\mathbb{F}_2}^2$. Ist diese Familie linear unabhängig? Ist sie ein Erzeugendensystem von ${\mathbb{F}_2}^2$?

Fingerübung D (Irrationalität). Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Familie $(1, \sqrt{2024})$ in $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Translationen auf Gruppen; 2 (= 1+1) Punkte). Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G \longrightarrow G$, $x \longmapsto g \cdot x$ bijektiv ist, indem Sie

1. direkt nachprüfen, dass diese Abbildung injektiv und surjektiv ist;
2. indem Sie die Umkehrabbildung bestimmen (und zeigen, dass sie diese Eigenschaft besitzt).

Aufgabe 1 (Malen nach Zahlen/Vektoren; 4 (= 2 + 2) Punkte). Wir betrachten $v_1 := 2 \cdot e_1 + e_2$, $v_2 := e_1 - 3 \cdot e_2$ in $\mathbb{R}^2$.

1. Skizzieren Sie die Menge aller Linearkombinationen $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$ mit nicht-negativen Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Erklären Sie Ihre Skizze.
2. Zeigen Sie, dass $\{v_1, v_2\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Basenzählen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2$ besitzt genau eine Basis.
2. Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ${\mathbb{F}_2}^2$ besitzt genau fünf Basen.

Aufgabe 3 (lineare Unabhängigkeit und Darstellbarkeit; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Familie in V. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig.
2. Die Abbildung
$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow V \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j \end{aligned}$$
ist injektiv.

Hinweis. Differenzen!

Aufgabe 4 (magische Quadrate; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *magisches Quadrat über K der Kantenlänge n* ist ein $n \times n$-Quadrat mit Einträgen aus K und folgender Eigenschaft: Es gibt ein $m \in K$ (die *magische Zahl*) mit:

- In jeder Zeile ist die Summe der Elemente m.
- In jeder Spalte ist die Summe der Elemente m.
- In der Haupt- bzw. Antidiagonalen ist jeweils die Summe m.

Zum Beispiel ist

2	0	2	4
4	2	0	2
0	2	4	2
2	4	2	0

ein magisches Quadrat über $\mathbb{Q}$ der Kantenlänge 4 mit magischer Zahl 8. Sei $\mathrm{MQ}_n(K)$ die Menge aller magischen Quadrate über K mit Kantenlänge n und magischer Zahl 0. Dann bildet $\mathrm{MQ}_n(K)$ einen K-Vektorraum bezüglich kästchenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Zeigen Sie, dass die magischen Quadrate

1	0	−1
−2	0	2
1	0	−1

0	1	−1
−1	0	1
1	−1	0

eine Basis von $\mathrm{MQ}_3(\mathbb{Q})$ bilden.

Bonusaufgabe (wahrscheinlich linear unabhängig?; 4 Punkte)**.** Commander Blorx würfelt viermal mit einem fairen gewöhnlichen sechsseitigen Würfel und trägt die Ergebnisse in folgender Reihenfolge in zwei Vektoren aus $\mathbb{Q}^2$ ein:
$$\left(\begin{pmatrix} ① \\ ② \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ③ \\ ④ \end{pmatrix} \right)$$
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Familie linear unabhängig ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis. Die Lösung enthält die Ziffern 045668.

Abgabe bis 2. Dezember 2024, 10:05, via Briefkasten/GRIPS