Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 8 vom 2. Dezember 2024

Hinweis. Beachten Sie vor der Bearbeitung auch die Hinweise zu Gleichungen: https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf

Fingerübung A (Dimensionsausdrücke)**.** Wir betrachten die Standardeinheitsvektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Ausdrücke ergeben überhaupt einen Sinn? Welcher Zahlenwert ergibt sich dabei dann?

1. $\dim_{\mathbb{R}}\bigl(\{e_1, e_3\}\bigr)$
2. $\dim_{\mathbb{R}}\bigl(\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_3\})\bigr)$
3. $\dim_{\mathbb{R}}\bigl(\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_3\} \setminus \{e_3\})\bigr)$
4. $\dim_{\mathbb{R}}\bigl(\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, e_3\}) \setminus \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_3\})\bigr)$

Fingerübung B (abwärts)**.** Wir betrachten $U := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$.

1. Skizzieren Sie U.
2. Zeigen Sie, dass U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ mit Basis $(e_1 - e_2)$ ist.

Fingerübung C (Umtausch)**.** Wenden Sie den Austauschsatz auf die Standardbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und den Vektor

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

an. Welche Basis erhalten Sie?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Rechnen in Vektorräumen; 2 $(= 1+1)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $(V, +, \cdot, 0)$ ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Für alle $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot 0 = 0$ (wobei 0 jeweils das neutrale Element bezüglich Addition in V bezeichnet).
2. Für alle $\lambda \in K$ und alle $v \in V$ gilt $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

Aufgabe 1 (3D-abwärts; 4 $(= 1+1+1+1)$ Punkte)**.** Wir betrachten die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

1. Zeigen Sie, dass U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Zeigen Sie, dass (v, w) eine Basis von U ist, wobei
$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
3. Skizzieren Sie U und erklären Sie kurz, warum es sich dabei um eine Skizze von U handelt.

   Hinweis. Evtl. kann es helfen, die „vertikalen“ Koordinatenebenen auch zu zeichnen.
4. Ergänzen Sie die Basis (v, w) von U zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Dimensionen von Durchschnitten; 4 ($= 2 + 2$) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Es gibt zweidimensionale $\mathbb{R}$-Untervektorräume U, W im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 0$.

2. Es gibt zweidimensionale $\mathbb{R}$-Untervektorräume U, W im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 2$.

Aufgabe 3 (Vektorraum des Jahres?!; 4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es *keinen* $\mathbb{F}_2$-Vektorraum gibt, der genau 2024 Elemente enthält!
Hinweis. Im Falle eines Falles, löst eine Basis wirklich alles!

Aufgabe 4 (Dimensionen von Untervektorräumen; 4 ($= 2 + 2$) Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein K-Untervektorraum.

1. Zeigen Sie, dass U endlich erzeugt ist.

2. Zeigen Sie: Ist $U \neq V$, so gilt $\dim_K U < \dim_K V$.

   Hinweis. Sie können den ersten Teil auch dann für die Lösung des zweiten Teils verwenden, wenn Sie den ersten Teil nicht gelöst haben.

Hinweis. Es handelt sich hierbei um eine Proposition aus der Vorlesung; diese Proposition dürfen Sie somit *nicht* für die Lösung der Aufgabe verwenden.

Bonusaufgabe (Nikolausaufgabe; 4 Punkte)**.** Commander Blorx wünscht sich dringendst vom Nikolaus mehr Punkte in linearer Algebra. Der Nikolaus ist nicht abgeneigt – unter der Voraussetzung, dass Blorx für den Nikolaus musiziert oder ein Gedicht aufsagt. Getreu dem Motto „Lieber Goethe als Troete!“ präsentiert Blorx die folgenden Zeilen:

> Habe nun, ach! Linearität,
> endliche Erzeugtheit,
> und leider auch Quantoren,
> durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
> Da steh ich nun, ich Raumvek-Tor!
> Und bin so klug als wie zuvor.
>
> Werd ich zur Basis sagen:
> Verweile doch! Du bist so schön!
> Dann magst du mich in Fesseln schlagen,
> dann will ich gern zum Tauschen gehn!

Kurz: Schreiben Sie ein Gedicht, das die Formulierung und den Beweis des Austauschsatzes enthält.

Abgabe bis 9. Dezember 2024, 10:05, via Briefkasten/GRIPS