Lineare Algebra I: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 9 vom 9. Dezember 2024

Hinweis. Beachten Sie vor der Bearbeitung auch die Hinweise zu Gleichungen: https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf

Fingerübung A (Äquivalenzrelationen und Quotienten). Wiederholen Sie den Begriff der *Äquivalenzrelation*. Wie ist der Quotient einer Äquivalenzrelation definiert? Was sind Äquivalenzklassen? Wie wird $\mathbb{Z}/12$ konstruiert? Wie kann man in $\mathbb{Z}/12$ rechnen? Vergleichen Sie dies mit der Definition von Quotientenvektorräumen.

Fingerübung B (Dimension). Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den $\mathbb{R}$-Untervektorraum

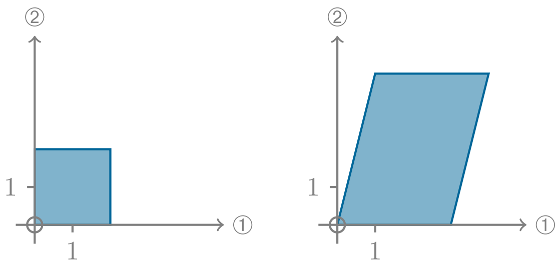
$$U := \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Skizzieren Sie U und $\mathbb{R}^3/U$ und berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3/U$. Bestimmen Sie zwei verschiedene $\mathbb{R}$-Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$, die zu U komplementär sind.

Fingerübung C (linear?). Welche der folgenden vier Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear? Zur Erinnerung: $x_1, x_2, \dots$ sind die Koordinaten von x. Visualisieren Sie diese Abbildungen geeignet!

$$\begin{aligned} x &\longmapsto {x_1}^2, & x &\longmapsto x_1 + 1, \\ x &\longmapsto x_1 - x_2, & x &\longmapsto 2024 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Fingerübung D (schief). Geben Sie zwei verschiedene $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen an, die das Quadrat auf der linken Seite auf das Viereck auf der rechten Seite abbilden.



Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (lineare Unabhängigkeit; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte). Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie:

1. Ist (v, w) linear unabhängig, so ist auch $(v, v + w)$ linear unabhängig.
2. Ist $\{v, w\}$ ein Erzeugendensystem von V, so auch $\{v, v + w\}$.

Bitte wenden

Aufgabe 1 (Vierouette; 4 Punkte). Geben Sie ein Beispiel für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:

$$f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{und} \quad f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad f \circ f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\,.$$

Begründen Sie Ihre Antwort und visualisieren Sie diese Abbildung!
Hinweis. Erst Geometrie, dann Algebra.

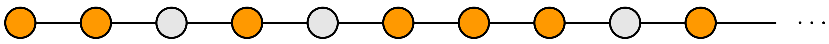
Aufgabe 2 (Zwischendimensionen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = 2024$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Es gibt einen K-Untervektorraum $U \subset V$ mit $\dim_K U = 42$.
2. Es gibt einen K-Untervektorraum $U \subset V$ mit $\dim_K(V/U) = 42$.

Aufgabe 3 (Vererbungseigenschaften von linearen Abbildungen; 4 $(= 2+2)$ Punkte). Sei K ein Körper und seien V, W, X Vektorräume über K.

1. Zeigen Sie: Sind $f, g\colon V \longrightarrow W$ linear, so ist auch die punktweise Summe $f + g\colon V \longrightarrow W$ linear.
2. Zeigen Sie: Sind $f\colon V \longrightarrow W$ und $g\colon W \longrightarrow X$ linear, so ist auch die Komposition $g \circ f\colon V \longrightarrow X$ linear.

Aufgabe 4 (unendliche Lichterketten; 4 $(= 1 + 1 + 2)$ Punkte). Wir betrachten die Menge aller unendlichen (über $\mathbb{N}$ indizierten) Lichterketten:



Eine Lichterkette wird als defekt angesehen, wenn sie an den Positionen 0, 8, 15 nicht leuchtet.

1. Modellieren Sie die Menge aller Lichterketten modulo defekter Lichterketten durch einen geeigneten $\mathbb{F}_2$-Quotientenvektorraum L, indem Sie „leuchtet“ durch $[1]$ und „leuchtet nicht“ durch $[0]$ modellieren.
2. Erklären Sie, warum die Dimensionsformel für Quotientenvektorräume nicht direkt angewendet werden kann, um $\dim_{\mathbb{F}_2} L$ zu bestimmen.
3. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_2} L$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Bonusaufgabe (Nullfolgen vergessen!; 4 $(= 2 + 2$ Punkte). Sei V die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$; diese Menge bildet bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum, genauer gesagt einen Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$. Sei U die Menge aller Nullfolgen in $\mathbb{Q}$. Diese Menge ist ein Untervektorraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraums V. Somit erhalten wir den zugehörigen Quotientenvektorraum V/U.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \bullet : V/U \times V/U &\longrightarrow V/U \\ \bigl((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\bigr) &\longmapsto (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$
wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass $(V/U, +, \bullet)$ ein Körper ist. Es genügt, wenn Sie den Beweis für die Existenz von multiplikativen Inversen im Detail angeben und für die anderen Eigenschaften nur eine kurze Begründung angeben.

Hinweis. Diese Konstruktion ist eine Möglichkeit, „Grenzwerte zu $\mathbb{Q}$ hinzuzufügen“. Man kann diesen Körper mit einer geeigneten Anordnung versehen und erhält auf diese Weise dann eine Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Abgabe bis 16. Dezember 2024, 10:05, via Briefkasten/GRIPS