Dungeon Map: Lineare Algebra

Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren!

5.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

Verfahren zur Lösung lineare Gleichungssysteme
- Geg: Matrix $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(L)$, $b \in K^m$
  $\rightsquigarrow$ Zeilenstufenform
  $\rightsquigarrow$ Basis von $V(A, 0)$
  und Kriterium für $V(A, b) \neq \emptyset$
  bzw. ein Element von $V(A, b)$

Anwendungen:
- Lösung von (in)homogenen LGS
- Test auf lineare Unabhängigkeit
- Test auf Invertierbarkeit von Matrizen
- Berechnung von inversen Matrizen
- Berechnung von Kern/Bild/Rang
- ...

5.4 Determinante $\mathrm{M}_{n \times n}(K) \to K$

- eindeutig charakterisiert durch:
  n-linear, alternierend, $\det(I_n) = 1$
- Berechnung: Entwicklung, Leibniz-Formel
- $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(K)$ genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$

4 Lineare Abbildungen

K-lineare Abbildung: Abbildung $f \colon V \longrightarrow W$ zwischen K-Vektorräumen mit

$$\forall_{x,y \in V} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall_{x \in V} \quad \forall_{\lambda \in K} \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

- Matrizen in $\mathrm{M}_{m \times n}(K)$ entsprechen linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$:
  $\mathrm{M}_{m \times n}(K) \ni A \rightsquigarrow (x \mapsto A \cdot x)$,
  $f \colon K^n \to K^m \rightsquigarrow (f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n))$
- Kenngrößen: Kern, Bild, Rang
- Dimensionsformel für $f \colon V \longrightarrow W$:
  $\dim_K V = \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f$

Beispiele: Rotationen, Spiegelungen, Streckungen

6 Normalformen I

Für Endomorphismen $f \colon V \longrightarrow V$:

Eigenwerte (EW)/Eigenvektoren (EV):
- $v \in V$ ist EV von f zum EW $\lambda \in K$, wenn $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda \cdot v$ gilt.
- Bestimmung von EW (falls $\dim_K V < \infty$): durch Lösen von $\det(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = 0$
- Bestimmung von EV: Gauß-Elimination
- EV verschiedener EW sind linear unabh.

Diagonalisierbarkeit:
- f ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu f besitzt
- Anwendung: Konjugationstrick

Allgemeiner: Jordansche Normalform (z.B. über $\mathbb{C}$)

5.3 Der Matrizenkalkül

Der Matrizenkalkül basiert auf
der universellen Eigenschaft von Basen.

Darstellende Matrix zu $f \colon V \longrightarrow W$
(bezüglich Basen B bzw. C von V bzw. W):

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
K^n \arrow[u, "T_{E_n,B}"] \arrow[r, dashed, "f_{B,C}"'] & K^m \arrow[u, "T_{E_m,C}"']
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$M_{B,C}(f) := M(f_{B,C})$$

Ermöglicht: Berechnung von Kern, Rang, Bild ...

5.1 Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem
zu $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ und $b \in K^m$:

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $A \cdot x = b$

- Lösungsraum:
  $V(A, b) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = b\}$
  affiner Untervektorraum von K^n
- LGS ist homogen, falls $b = 0$. Dann: Lösungsraum ist Untervektorraum von K^n
- Ist $S \in \mathrm{M}_{m \times m}(K)$ invertierbar, so ist $V(A, b) = V(S \cdot A, S \cdot b)$
- $V(I_m, b) = \{b\}$

3 Vektorräume

Vektorraum über einem Körper K:
Quadrupel $(V, +, \cdot, 0)$ mit:
- $(V, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- Assoziativität von $\cdot \colon K \times V \longrightarrow V$
- neutrale Skalarmultiplikation mit $1 \in K$
- Distributivität (zwei Varianten!)

Beispiele:
- K^n mit komponentenweiser Addition: Geometrie, Bitvektoren, Datenmengen
- Abbildungsräume
- Untervektorräume (z.B. Ursprungsgeraden)
- direkte Summen
- Quotienten

3.4 Basen und Dimension

Eine endliche Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren ist linear unabhängig, wenn: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ in K mit $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt

$$\forall_{i \in I} \quad \lambda_i = 0.$$

Für allgemeine Familien: via endliche Teilfamilien

Basen: linear unabhängige Erzeugendensysteme.
- Äquivalent: minimales Erzeugendensystem, maximale linear unabhängige Familie
- Jeder Vektorraum hat eine Basis und Basen im selben Vektorraum sind gleich lang.

Dimension: Länge einer/jeder Basis.

2.1.4 Monoide

Monoid: Tripel $(M, \cdot, e)$ mit:
- Assoziativität von $\cdot \colon M \times M \longrightarrow M$
- $e \in M$ ist neutral bezüglich $\cdot$

Kommutativ, falls $\cdot$ kommutativ ist.

Beispiele:
- $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$
- Selbstabbildungen
- Wörter
- Mengenoperationen, logische Operationen

2.2.3 Gruppen

Gruppe: Tripel $(G, \cdot, e)$ mit:
- $(G, \cdot, e)$ ist ein Monoid
- Jedes Element ist invertierbar

Abelsch, falls $\cdot$ kommutativ ist.

Beispiele:
- $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}/n, +, 0)$
- (Körper, $+, 0$), (Körper $\setminus \{0\}, \cdot, 1$)
- symmetrische Gruppen (i.a. nicht abelsch!)

2.3.2 Körper

Körper: Quintupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit:
- $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(K, \cdot, 1)$ ist ein kommutativer Monoid; jedes Element in $K \setminus \{0\}$ ist invertierbar; und $1 \neq 0$;
- Distributivgesetz

Beispiele:
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- $\mathbb{F}_2$
- $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$