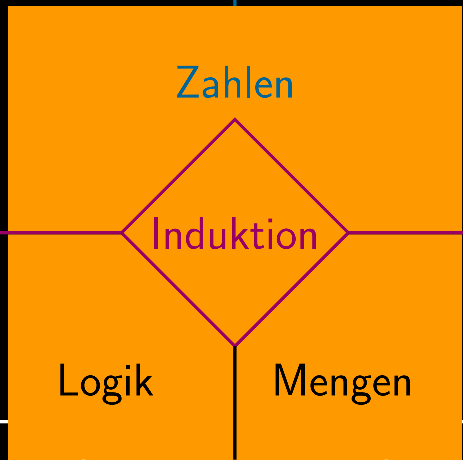
Dungeon Map: Grundlagen

2 Zahlen

komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	algebraisch abgeschlossen	Körper
	$\upuparrows$	„imaginäre Einheit“	
reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	vollständig	Körper
	$\upuparrows$	„formale Steigungen/Grenzwerte“	
rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	multiplikative Gleichungen lösbar	Körper
	$\upuparrows$	„formale Brüche“	
ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	additive Gleichungen lösbar	Gruppe $(+)$, Monoid $(\cdot)$
	$\upuparrows$	„formale Differenzen“	
natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	Induktionsprinzip	Monoid (bezüglich $+$ und $\cdot$)



2.1 Induktion ...

Induktionsprinzip der natürlichen Zahlen:

Ist $A \subset \mathbb{N}$ mit
- Induktionsanfang: $0 \in A$ und
- Induktionsschritt: für alle $n \in A$ gilt: $n + 1 \in A$,

so folgt $A = \mathbb{N}$.

2.1 ... und Rekursion

Rekursionsprinzip der natürlichen Zahlen:

Ist A eine Menge, $a \in A$ und $g \colon A \longrightarrow A$ eine Abbildung, so gibt es genau eine Abbildung $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ mit
- Rekursionsanfang: $f(0) = a$
- Rekursionsschritt: für alle $n \in A$ gilt: $f(n+1) = g(f(n))$.

1.2 Syntax und Semantik

Aussagenlogik/Quantorenlogik:

$\left.\begin{array}{r}\text{Syntax}\\ \text{Semantik}\end{array}\right\}$ jeweils per „divide & conquer“

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\Longrightarrow$	impliziert; wenn ..., dann ...
$\Longleftrightarrow$	äquivalent zu; genau dann, wenn
$\forall_x$	Für alle x gilt ...
$\exists_x$	Es existiert ein x mit ...

Aussagenlogische Tautologie: erhält bei jeder w/f-Belegung aller Variablen den Wert w.

1.3 Beweise

Beweisschritte über eine Sprache/Theorie T:
- Axiome/Voraussetzungen
- quantorenlogische Axiome
- aussagenlogische Tautologien über T
- Modus Ponens
- Generalisierungsregel

Korrektheitssatz (und Vollständigkeit)

Beweisstruktur (Kapitel 1.4):
- modularisieren
- abstrahieren
- Baukastenprinzip: Intro/Elim
- Spezielle Beweisstrukturen: Äquivalenzen, Kontraposition, Reductio ad absurdum, Widerspruchsbeweis, ...

1.5 Mengen und Abbildungen

Mengen:
- sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten;
- wichtige Konstruktionen: $\cap \quad \cup \quad \setminus \quad P(\,\cdot\,) \quad \times \quad \{\ldots \mid \ldots\} \quad \emptyset$
- $\{x \mid x$ ist eine Menge und $x \notin x\}$ ist *keine* Menge!

Abbildungen:
- sind durch ihren Graphen definiert;
- wichtige Konstruktionen: Komposition, Restriktion

Wichtige Eigenschaften von Abbildungen
- Injektivität
- Surjektivität
- Bijektivität

2.2.1 Relationen

Relation:
- auf X: Teilmenge von $X \times X$
- zwischen X und Y: Teilmenge von $X \times Y$

Beispiele:
- Abbildungen
- Ordnungen

Spezielle Relationen:
- Äquivalenzrelationen
  $\leadsto$ Äquivalenzklassen
  $\leadsto$ Quotientenkonstruktionen (z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n$)
- partielle/totale Ordnungen bzw. Induktions-/Rekursprinzipien