Klausur Lineare Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann 18. Februar 2025

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	6	10	10	10	10	10	4	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)**.**

1. Seien A, B aussagenlogische Variablen. Ist dann $(A \vee B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ eine aussagenlogische Tautologie? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $\{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5\}$, die *nicht* surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Geben Sie ein Beispiel für eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$, die reflexiv aber *nicht* transitiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 ($1+3+3+3=10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition des Begriffs *Gruppe*.
2. Zeigen Sie, dass es im Monoid $(\mathbb{Z}/7, \ \cdot\ , [1])$ ein Element $x \in \mathbb{Z}/7$ gibt mit $x^2 = [2]$.
3. Sei $(G, \ \cdot\ , e)$ eine Gruppe. Ist die folgende Aussage dann immer wahr?

$$\forall_{x\in G} \quad \forall_{y\in G} \quad y \cdot x = x \cdot y$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Gibt es einen Körper $(K, +, \ \cdot\ , 0, 1)$, in dem folgendes gilt?

$$\forall_{x\in K} \quad \forall_{y\in K} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Geben Sie die Definition dafür, dass eine endliche Familie in V *linear unabhängig* ist.
2. Sei (u, v, w) eine linear unabhängige Familie in V. Zeigen Sie, dass dann auch die Familie $(-u, w)$ linear unabhängig ist.
3. Geben Sie die Definition des Begriffs einer *Basis* von V.
4. Geben Sie die wesentlichen Beweisschritte für den Beweis der *Existenz von Basen in endlich erzeugten Vektorräumen* an.

Aufgabe 4 ($2 + 2 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Geben Sie die Definition des *Kerns* und des *Bildes* einer linearen Abbildung.
2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Ist $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W mit $\ker f = \{0\}$, so ist f injektiv.
3. Gibt es eine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^{11}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die drei verschiedene Eigenwerte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 ($1+3+2+2+2=10$ Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. Wie kann die *Addition der ersten Zeile zur zweiten Zeile* einer Matrix in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix beschrieben werden?

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

   $$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3. Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zeigen Sie, dass es *keine* Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit $A^2 \cdot X = I_3$ gibt.

5. Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem

   $$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \cdot x = b$$

   genau eine Lösung besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^2 &\longrightarrow \mathbb{Q}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 4 \cdot x_2 \\ -x_1 + 5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f bezüglich der folgenden Basis B von $\mathbb{Q}^2$:
$$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
2. Bestimmen Sie $\det(f)$.
3. Bestimmen Sie alle rationalen Eigenwerte von f.
4. Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten aller rationalen Eigenwerte von f.
5. Ist f über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und es gelte $A^{2025} = I_3$. Zeigen Sie, dass $A = I_3$ gilt.