Klausur Lineare Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann 18. Februar 2025

Matrikelnummer: □□□□□□□

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	6	10	10	10	10	10	4	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**.**

1. Seien A, B aussagenlogische Variablen. Ist dann $(A \lor B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ eine aussagenlogische Tautologie? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $\{1,2,3\} \longrightarrow \{4,5\}$, die *nicht* surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Relation auf $\{1,2,3\}$, die reflexiv aber *nicht* transitiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. *Behauptung.* Nein, es handelt sich *nicht* um eine aussagenlogische Tautologie.

   Beweis. Wir überprüfen, dass es eine Belegung für A und B gibt, unter der die gegebene Formel den Wert f erhält:

A	B	$A \lor B$	$A \Longrightarrow B$	$(A \lor B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$
w	w			
w	f	w	f	f
f	w			
f	f			

   Also ist $(A \lor B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ *keine* aussagenlogische Tautologie. □

   [Bei Fragen muss die *Antwort* klar aus Ihrer Lösung ersichtlich sein; am besten als „Behauptung".]

2. *Behauptung.* Die Abbildung

   $$\begin{aligned} f\colon \{1,2,3\} &\longrightarrow \{4,5\} \\ x &\longmapsto 4 \end{aligned}$$

   ist *nicht* surjektiv.

   Beweis. Es ist $5 \in \{4,5\}$, aber für alle $x \in \{1,2,3\}$ gilt $f(x) = 4 \neq 5$. Also ist f nicht surjektiv. □

   [Selbstverständlich gibt es hier viele weitere mögliche Beispiele.]

3. *Behauptung.* Die Relation $\square := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$ auf $\{1,2,3\}$ ist reflexiv, aber nicht transitiv.

   Beweis.

   - Die Relation $\square$ ist reflexiv, denn: Nach Konstruktion gilt $(1,1) \in \square$, $(2,2) \in \square$, $(3,3) \in \square$. Also ist $\square$ auf $\{1,2,3\}$ reflexiv.
   - Die Relation $\square$ ist *nicht* transitiv, denn: Nach Konstruktion gilt $(1,2) \in \square$ und $(2,3) \in \square$, aber $(1,3) \notin \square$. $\square$

   [Selbstverständlich gibt es hier weitere mögliche Beispiele.]

Aufgabe 2 $(1+3+3+3=10$ Punkte$)$**.**

1. Geben Sie die Definition des Begriffs *Gruppe*.
2. Zeigen Sie, dass es im Monoid $(\mathbb{Z}/7, \ \cdot\ , [1])$ ein Element $x \in \mathbb{Z}/7$ gibt mit $x^2 = [2]$.
3. Sei $(G, \ \cdot\ , e)$ eine Gruppe. Ist die folgende Aussage dann immer wahr?

   $$\forall_{x \in G} \quad \forall_{y \in G} \quad y \cdot x = x \cdot y$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es einen Körper $(K, +, \ \cdot\ , 0, 1)$, in dem folgendes gilt?

   $$\forall_{x \in K} \quad \forall_{y \in K} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Eine *Gruppe* ist ein Monoid $(G, \cdot, e)$ mit der folgenden Eigenschaft: Jedes Element aus G besitzt ein Inverses in $(G, \cdot, e)$.

   [Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

2. *Beweis.* Sei $x := [3] \in \mathbb{Z}/7$. Dann gilt in $\mathbb{Z}/7$:

   $$x^2 = x \cdot x = [3] \cdot [3] = [3 \cdot 3] = [9] = [7+2] = [2].$$ □

3. *Behauptung.* Nein, diese Aussage gilt im allgemeinen nicht.

   Beweis. Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_3 und die Elemente $x := (1\ 2), y := (2\ 3) \in G$. Dann ist $y \cdot x \neq x \cdot y$, denn: Auswerten auf 3 liefert

   $$\begin{aligned}(y \cdot x)(3) &= (y \circ x)(3) = y\big(x(3)\big) = (2\ 3)\big((1\ 2)(3)\big) = (2\ 3)(3) = 2 \\ &\neq 1 = (1\ 2)(2) = (1\ 2)\big((2\ 3)(3)\big) = x\big(y(3)\big) = (x \circ y)(3) \\ &= (x \cdot y)(3)\end{aligned}$$

   Insbesondere ist somit $y \cdot x \neq x \cdot y$. □

   [Weitere naheliegende Beispiele solcher Gruppen sind Matrixgruppen.]

4. *Behauptung.* Ja, es gibt solche Körper.

   Beweis. Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_2$. Dort gilt wegen $2 = 1 + 1[1] + [1] = [0] = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{F}_2$, dass

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + x\cdot y + y\cdot x + y^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2\\ &= x^2 + 0\cdot x\cdot y + y^2 = x^2 + 0 + y^2\\ &= x^2 + y^2.\end{aligned}$$

□

   [In $\mathbb{F}_2$ könnte man auch alle möglichen Kombinationen durchprobieren.]

   [Es gibt (viele!) weitere Beispiele von Körpern, die man verwenden könnte: Alle Körper mit Charakteristik 2 haben diese Eigenschaft.]

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Geben Sie die Definition dafür, dass eine endliche Familie in V *linear unabhängig* ist.
2. Sei (u, v, w) eine linear unabhängige Familie in V. Zeigen Sie, dass dann auch die Familie $(-u, w)$ linear unabhängig ist.
3. Geben Sie die Definition des Begriffs einer *Basis* von V.
4. Geben Sie die wesentlichen Beweisschritte für den Beweis der *Existenz von Basen in endlich erzeugten Vektorräumen* an.

Lösung:

1. Eine endliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist *linear unabhängig*, wenn folgendes gilt: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt bereits

$$\forall_{i\in I} \quad \lambda_i = 0.$$

   [Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

2. *Beweis.* Seien $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \cdot (-u) + \mu \cdot w = 0$. Dann folgt $\lambda = 0$ und $\mu = 0$, denn: Wir haben

$$(-\lambda) \cdot u + 0 \cdot v + \mu \cdot w = \lambda \cdot (-u) + 0 + \mu \cdot w = \lambda \cdot (-u) + \mu \cdot w = 0.$$

   Da die Familie (u, v, w) nach Voraussetzung linear unabhängig ist, folgt $-\lambda = 0$ und $\mu = 0$. Somit ist auch $\lambda = 0$ und $\mu = 0$. Also ist die Familie $(-u, w)$ linear unabhängig. □

3. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ des Vektorraums V ist eine *Basis von* V, wenn
   - die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist
   - und $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

   [Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

4. Der Beweis der Existenz von Basen in endlich erzeugten Vektorräumen beruht im wesentlichen auf den folgenden Beweisschritten:

   - Man verwendet die Charakterisierung von Basen als minimale Erzeugendensysteme.
   - Man geht induktiv vor …
   - … und entfernt Schritt für Schritt so lange Vektoren aus einem gegebenen endlichen Erzeugendensystem, bis ein minimales Erzeugendensystem (und somit eine Basis) vorliegt.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition des *Kerns* und des *Bildes* einer linearen Abbildung.
2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Ist $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W mit $\ker f = \{0\}$, so ist f injektiv.
3. Gibt es eine surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^{11}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die drei verschiedene Eigenwerte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Dann definiert man
   - den *Kern von* f durch $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$;
   - das *Bild von* f durch $\operatorname{im} f := \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$.

   [Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

2. Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt $x = y$, denn: Mit der Linearität von f und $f(x) = f(y)$ folgt
   $$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0,$$
   und damit $x - y \in \ker f = \{0\}$. Also ist $x - y = 0$ bzw. $x = y$. Somit ist f injektiv.

3. *Behauptung.* Nein, es gibt *keine* surjektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^{11}$.

   Beweis. Sei $f\colon \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^{11}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Wir zeigen, dass f nicht surjektiv ist, indem wir zeigen, dass $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f < 11$ ist: Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt
   $$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^7 - \dim_{\mathbb{R}} \ker f \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^7 = 7.$$
   Also ist $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f < 11$. Insbesondere folgt $\operatorname{im} f \neq \mathbb{R}^{11}$. Somit ist f *nicht* surjektiv. □

4. *Behauptung.* Nein, es gibt *keine* $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die drei verschiedene Eigenwerte besitzt.

   Beweis. Wir wissen, dass die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte eines Endomorphismus höchstens so groß ist wie die Dimension des unterliegenden Vektorraums. Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2 < 3$ haben also $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ höchstens zwei verschiedene Eigenwerte. $\square$

Aufgabe 5 ($1+3+2+2+2 = 10$ Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. Wie kann die *Addition der ersten Zeile zur zweiten Zeile* einer Matrix in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix beschrieben werden?

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3. Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zeigen Sie, dass es *keine* Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit $A^2 \cdot X = I_3$ gibt.

5. Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \cdot x = b$$

genau eine Lösung besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

die Matrix, die man aus A erhält, indem man die erste Zeile zur zweiten Zeile addiert.

2. Sei $b := (1,1,1)^\top$. Dann ist $V(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = b\}$ die gesuchte Lösungsmenge.

   Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens liefert:

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3) - 2\cdot(1)} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3) - (2)} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

   Die linke Seite ist in Zeilenstufenform. Wegen $-2 \neq 0$ zeigt die letzte Zeile, dass $V(A,b) = \emptyset$.

   [Die Aufgabenstellung verlangt explizit die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.]

3. *Behauptung.* Nein, die Matrix A ist *nicht* invertierbar.

   Beweis. Wie wir im Teil 2. gesehen haben, überführt das Gaußsche Eliminationsverfahren die 3×3-Matrix A in eine Zeilenstufenform mit genau zwei Stufen. Also ist A *nicht* invertierbar.

   [Alternativ kann man über die Determinanten argumentieren oder (umständlich) nochmal (!) das Gaußsche Eliminationsverfahren anwenden.] □

4. *Beweis.* *Angenommen*, es gäbe eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit $A^2 \cdot X = I_3$. Wir betrachten $x := A \cdot X \cdot b$ mit $b := (1,1,1)^\top$. Dann ist $x \in V(A,b)$, denn

$$\begin{aligned} A \cdot x &= A \cdot A \cdot X \cdot b = A^2 \cdot X \cdot b = I_3 \cdot b \\ &= b. \end{aligned}$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu $V(A,b) = \emptyset$ (Teil 2.).

Also gibt es *keine* Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit $A^2 \cdot X = I_3$. □

[Alternativ, aber umständlich, kann man die Spalten von X als Lösungen geeigneter linearer Gleichungssysteme auffassen und deren Lösungsmengen bestimmen.

Man kann auch damit argumentieren, dass A nach Teil 3. nicht invertierbar ist. Es ist dann aber sorgfältig zu begründen, warum (in dieser Situation) einseitige Inverse bereits Inverse wären.]

5. *Behauptung.* Nein, einen solchen Vektor gibt es *nicht*.

Beweis. Sei $b \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $V(A,b)$ leer oder für jedes $x \in V(A,b)$ gilt

$$V(A,b) = x + V(A,0).$$

Nach der Zeilenstufenform aus Teil 2. ist jedoch $\dim_{\mathbb{R}} V(A,0) = 1$. Insbesondere ist $V(A,0)$ unendlich, und damit auch $V(A,b)$.

Es gibt also keinen Fall, in dem $V(A,b)$ aus genau einem Element besteht. □

Aufgabe 6 (3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^2 &\longrightarrow \mathbb{Q}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 4 \cdot x_2 \\ -x_1 + 5 \cdot x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f bezüglich der folgenden Basis B von $\mathbb{Q}^2$:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Bestimmen Sie $\det(f)$.
3. Bestimmen Sie alle rationalen Eigenwerte von f.
4. Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten aller rationalen Eigenwerte von f.
5. Ist f über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar?

Lösung:

1. Es gilt

$$\begin{aligned} M_{B,B}(f) &= M_B^{-1} \cdot M(f) \cdot M_B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-0} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Inverse von M_B haben wir dabei mit der expliziten Formel für Inverse von 2×2-Matrizen bestimmt.

[Alternativ könnte man dieses Inverse auch mit dem Gaußschen Elmininationsverfahren bestimmen.

Außerdem hätte man die Lösung auch anders ansetzen können, indem man die Spalten der Matrix $M_{B,B}(f)$ aus den entsprechenden Gleichungen mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren bestimmt.]

2. Es gilt

$$\det f = \det M(f) = 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = 9.$$

[Analog könnte man auch mit der Matrix $M_{B,B}(f)$ aus Teil 1. verfahren.]

3. Die Menge der rationalen Eigenwerte von f ist

$$\sigma_{\mathbb{Q}}(f) = \sigma_{\mathbb{Q}}\big(M(f)\big) = \big\{\lambda \in \mathbb{Q} \bigm| \det(M(f) - \lambda \cdot I_2) = 0\big\}.$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}\det(M(f) - \lambda \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda) \cdot (5-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 5 + 4 = (\lambda - 3)^2\end{aligned}$$

und damit (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Q}$) ist $\sigma_{\mathbb{Q}}(f) = \{3\}$ die Menge der reellen Eigenwerte von f.

4. Nach Teil 3. ist nur die geometrische Vielfachheit des Eigenewertes 3 von f zu bestimmen. Diese ist

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_3(f) = \dim_{\mathbb{Q}} V\big(M(f) - 3 \cdot I_2, 0\big) = \dim_{\mathbb{Q}} V\left(\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, 0\right) = 1.$$

Die letzte Gleichung erhält man zum Beispiel mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

5. *Behauptung.* Die Abbildung f ist über $\mathbb{Q}$ *nicht* diagonalisierbar.

Beweis. Mit Teil 3. und Teil 4. folgt

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Q}} \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_\lambda f = \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Eig}_3 f = 1 < 2 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^2.$$

Also ist f *nicht* über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar. ☐

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und es gelte $A^{2025} = I_3$. Zeigen Sie, dass $A = I_3$ gilt.

Lösung:

Beweis. Da A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben D für diese Diagonalmatrix.

Mit $A^{2025} = I_3$ und dem Konjugationstrick erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1^{2025} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{2025} \end{pmatrix} &= D^{2025} = (S^{-1} \cdot A \cdot S)^{2025} \\ &= S^{-1} \cdot A^{2025} \cdot S = S^{-1} \cdot I_3 \cdot S = S^{-1} \cdot S \\ &= I_3, \end{aligned}$$

und damit $\lambda_1^{2025} = 1$, $\lambda_2^{2025} = 1$, $\lambda_3^{2025} = 1$.

Wegen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ folgt daraus bereits $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$ bzw. $D = I_3$.

Insgesamt ergibt sich

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} = S \cdot I_3 \cdot S^{-1} = S \cdot S^{-1} = I_3.$$

□