Probeklausur Lineare Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Februar 2025

Matrikelnummer: □□□□□□□

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	6	10	10	10	10	10	4	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**.**

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann $(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $\{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$, die *nicht* injektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{1, 2, 3\}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte)**.**

1. Geben Sie die Definition von *invertierbaren Elementen* in Monoiden.
2. Sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid und seien $x, y \in M$ invertierbare Elemente. Zeigen Sie, dass dann auch $x \cdot y$ invertierbar ist.
3. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Ist die folgende Aussage dann immer wahr?
$$\forall_{x,y \in G} \quad \exists_{z \in G} \quad x \cdot z = y \cdot x$$
Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Sei K ein Körper. Ist die folgende Aussage dann immer wahr?
$$\exists_{x \in K} \quad x + x \cdot x = 1.$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Geben Sie die Definition dafür, dass eine endliche Familie in V *linear unabhängig* ist.

2. Sei (v, w) eine linear unabhängige Familie in V. Zeigen Sie, dass dann auch die Familie $(v + w, w)$ linear unabhängig ist.

3. Geben Sie die Definition der *Dimension von V* (falls V endlich erzeugt ist). Was ist dabei zu berücksichtigen?

4. Gibt es $\mathbb{R}$-Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^4$ mit $\dim_{\mathbb{R}} U > 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} V$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte).

1. Formulieren Sie die *Dimensionsformel für lineare Abbildungen.*
2. Geben Sie die wesentlichen Beweisschritte für den Beweis der Dimensionsformel für lineare Abbildungen an.
3. Gibt es eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^8$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die keine reellen Eigenwerte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 ($1+3+2+2+2=10$ Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$.

1. Wie kann das *Vertauschen der ersten und zweiten Zeile* einer Matrix in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix beschrieben werden?

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

   $$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{Q}^3 \text{ mit } A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3. Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ mit $X \cdot A = I_3 + A$ gibt.

5. Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{Q}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem

   $$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \cdot x = b$$

   genau zwei Lösungen besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f bezüglich der folgenden Basis B von $\mathbb{R}^2$:
$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
2. Bestimmen Sie $\det(f \circ f \circ f)$.
3. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von f.
4. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$.
5. Ist f über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Die Matrix $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ habe die Eigenwerte 1 und 100. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ mit $X^2 = A$ gibt.