Probeklausur Lineare Algebra I

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Februar 2025

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	6	10	10	10	10	10	4	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($2+2+2=6$ Punkte)**.**

1. Seien A und B aussagenlogische Variablen. Ist dann $(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung $\{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$, die *nicht* injektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Geben Sie ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{1,2,3\}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. *Behauptung.* Ja, es handelt sich um eine aussagenlogische Tautologie.

   Beweis. Wir überprüfen, dass die gegebene Formel unter allen möglichen Belegungen für A und B den Wert w erhält:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B)$
w	w	w	w	w
w	f	f		w
f	w	f		w
f	f	f		w

   Also ist $(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B)$ eine aussagenlogische Tautologie. $\square$

   [Bei Fragen muss die *Antwort* klar aus Ihrer Lösung ersichtlich sein; am besten als „Behauptung".]

2. *Behauptung.* Die Abbildung

   $$\begin{aligned} f\colon \{1,2,3\} &\longrightarrow \{1,2,3\} \\ x &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

   ist *nicht* injektiv.

   Beweis. Es gilt $1, 2 \in \{1,2,3\}$ und $f(1) = 1 = f(2)$, aber $1 \neq 2$. Also ist f nicht injektiv. $\square$

   [Selbstverständlich gibt es hier viele weitere mögliche Beispiele.]

3. *Behauptung.* Die Relation $\Box := \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3\}\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, 3\}$.

   Beweis. Diese Relation $\Box$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, 3\}$, da sie eine Relation auf $\{1, 2, 3\}$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (s. Vorlesung). Ausführlicher:

   - Reflexivität. Für alle $x \in \{1, 2, 3\}$ gilt nach Definition $(x, x) \in \Box$, und damit $x \Box x$.
   - Symmetrie. Seien $x, y \in \{1, 2, 3\}$ mit $x \Box y$. Nach Definition gilt sowieso $(y, x) \in \Box$ bzw. $x \Box y$.
   - Transitivität. Seien $x, y, x \in \{1, 2, 3\}$ mit $x \Box y$ und $y \Box z$. Nach Definition gilt sowieso $(x, z) \in \Box$ bzw. $x \Box z$. $\Box$

   [Selbstverständlich gibt es hier weitere mögliche Beispiele.]

Aufgabe 2 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Geben Sie die Definition von *invertierbaren Elementen* in Monoiden.
2. Sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid und seien $x, y \in M$ invertierbare Elemente. Zeigen Sie, dass dann auch $x \cdot y$ invertierbar ist.
3. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Ist die folgende Aussage dann immer wahr?
$$\forall_{x,y \in G} \quad \exists_{z \in G} \quad x \cdot z = y \cdot x$$
Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Sei K ein Körper. Ist die folgende Aussage dann immer wahr?
$$\exists_{x \in K} \quad x + x \cdot x = 1.$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid. Ein Element $x \in M$ ist *invertierbar* im Monoid $(M, \cdot, e)$, wenn es ein $y \in M$ gibt mit $x \cdot y = e = y \cdot x$.

   [Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

2. *Beweis.* Wir zeigen, dass $x \cdot y$ invertierbar ist, indem wir zeigen, dass $z := y^{-1} \cdot x^{-1}$ invers zu $x \cdot y$ ist: Es gilt $(x \cdot y) \cdot z = e$, denn
$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) && \text{(Definition von } z\text{)}\\
&= x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} && \text{(Assoziativität)}\\
&= x \cdot e \cdot x^{-1} && (y^{-1} \text{ ist invers zu } y)\\
&= x \cdot x^{-1} && \text{(Neutralität von } e\text{)}\\
&= e. && (x^{-1} \text{ ist invers zu } x)
\end{aligned}$$
Analog folgt
$$z \cdot (x \cdot y) = (y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x \cdot y = y^{-1} \cdot e \cdot y = y^{-1} \cdot y = e. \quad \square$$

3. *Behauptung.* Ja, diese Aussage ist immer wahr.

   Beweis. Seien $x, y \in G$. Dann erfüllt $z := x^{-1} \cdot y \cdot x$ die Gleichung

   $$x \cdot z = x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x = e \cdot y \cdot x = y \cdot x.$$ □

4. *Behauptung.* Nein, diese Aussage ist im allgemeinen *nicht* wahr.

   Beweis. Im Körper $\mathbb{F}_2$ gilt

   $$[0] + [0] \cdot [0] = [0 + 0 \cdot 0] = [0] \neq [1]$$
   $$[1] + [1] \cdot [1] = [1 + 1 \cdot 1] = [2] = [0] \neq [1].$$

   Da $\mathbb{F}_2$ nur die Elemente $[0]$ und $[1]$ enthält und $[1]$ das multiplikative neutrale Element in $\mathbb{F}_2$ ist, gibt es somit *kein* $x \in \mathbb{F}_2$ mit $x + x \cdot x = 1$. □

   [Es gibt (viele!) weitere Beispiele von Körpern, die man verwenden könnte.]

Aufgabe 3 (2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

1. Geben Sie die Definition dafür, dass eine endliche Familie in V *linear unabhängig* ist.
2. Sei (v, w) eine linear unabhängige Familie in V. Zeigen Sie, dass dann auch die Familie $(v + w, w)$ linear unabhängig ist.
3. Geben Sie die Definition der *Dimension von V* (falls V endlich erzeugt ist). Was ist dabei zu berücksichtigen?
4. Gibt es $\mathbb{R}$-Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^4$ mit $\dim_{\mathbb{R}} U > 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} V$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Eine endliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist *linear unabhängig*, wenn folgendes gilt: Für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ in K mit $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$ folgt bereits
$$\forall_{i\in I} \quad \lambda_i = 0.$$
[Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

2. *Beweis.* Seien $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \cdot (v + w) + \mu \cdot w = 0$. Dann folgt $\lambda = 0$ und $\mu = 0$, denn: Wir haben
$$\lambda \cdot v + (\lambda + \mu) \cdot w = \lambda \cdot (v + w) + \mu \cdot w = 0.$$
Da die Familie (v, w) nach Voraussetzung linear unabhängig ist, folgt $\lambda = 0$ und $\lambda + \mu = 0$. Somit ist auch $\mu = 0 - \lambda = 0 - 0 = 0$. Also ist die Familie $(v + w, w)$ linear unabhängig. □

3. Ist V endlich erzeugt und ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so definieren wir die *Dimension* von V durch $\dim_K V := n$.

   [Es genügt nicht, die Definition „so ungefähr" anzudeuten. Sie muss präzise formuliert und inhaltlich vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

   Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Zahl n tatsächlich *nicht* von der gewählten Basis abhängt.

4. *Behauptung.* Ja, es gibt solche Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$.

Beweis. Wir betrachten

$$U := \mathbb{R}^4$$
$$V := \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1\}.$$

Dann sind U und V Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$ und es gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} U = 4 > 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} V$$

sowie

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1\} = 1. \qquad \square$$

[Selbstverständlich gibt es hier viele weitere mögliche Beispiele.]

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte)**.**

1. Formulieren Sie die *Dimensionsformel für lineare Abbildungen.*
2. Geben Sie die wesentlichen Beweisschritte für den Beweis der Dimensionsformel für lineare Abbildungen an.
3. Gibt es eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^8$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die keine reellen Eigenwerte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei W ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt
$$\dim_K V = \dim_K \ker f + \dim_K \operatorname{im} f$$
bzw.
$$\operatorname{rg} f = \dim_K V - \dim_K \ker f.$$
[Es genügt nicht, den Satz „so ungefähr“ anzudeuten. Voraussetzung und Behauptung müssen klar erkennbar, vollständig und korrekt sein. Formulieren Sie in ganzen Sätzen!]

2. Der Beweis der Dimensionsformel für lineare Abbildungen beruht im wesentlichen auf den folgenden beiden Beweisschritten:
   - Homomorphiesatz für lineare Abbildungen. Dieser zeigt $\operatorname{im} f \cong_K V/\ker f$.
   - Anwendung der Dimensionsformel für Quotientenvektorräume (und der Invarianz der Dimension unter Isomorphismen) auf das Ergebnis aus dem vorigen Schritt.

   [Alternativ könnte man auch einen anderen Beweis der Dimensionsformel für lineare Abbildungen skizzieren.]

3. *Behauptung.* Nein, es gibt *keine* injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^8$.

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{R}^{13} \longrightarrow \mathbb{R}^8$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Wir zeigen, dass f nicht injektiv ist:

Wegen $\operatorname{im} f \subset \mathbb{R}^8$ ist $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^8 = 8$. Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{13} - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f \geq 13 - 8 = 5.$$

Insbesondere ist $\ker f \neq \{0\}$, und damit f *nicht* injektiv. □

4. *Behauptung.* Ja, es gibt $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die keine reellen Eigenwerte besitzen.

   Beweis. Wir betrachten die „Rotation“ $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

   Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0.$$

   Also besitzt $f = L(A)$ *keine* reellen Eigenwerte. □

Aufgabe 5 (1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$.

1. Wie kann das *Vertauschen der ersten und zweiten Zeile* einer Matrix in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix beschrieben werden?

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{Q}^3 \text{ mit } A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3. Ist die Matrix A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ mit $X \cdot A = I_3 + A$ gibt.

5. Gibt es einen Vektor $b \in \mathbb{Q}^3$, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\text{Gesucht: alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \cdot x = b$$

   genau zwei Lösungen besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

   die Matrix, die man aus A erhält, indem man die erste und zweite Zeile tauscht.

2. Sei $b := (1,2,2)^\top$. Dann ist $V(A,b) = \{x \in \mathbb{Q}^3 \mid A \cdot x = b\}$ die gesuchte Lösungsmenge.

   Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens liefert:

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)-(1)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Pivot?} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot(3)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)-(3),(1)+(3)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

   Die linke Seite ist in Zeilenstufenform. Damit erhalten wir durch Rückwärtsauflösen, dass $V(A, 0) = \{0\}$ ist und

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung ist. Insgesamt ergibt sich

$$V(A, b) = V(A, 0) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

[Die Aufgabenstellung verlangt explizit die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.]

3. *Behauptung.* Ja, die Matrix A ist invertierbar.

   Beweis. Wie wir im Teil 2. gesehen haben, überführt das Gaußsche Eliminationsverfahren die 3×3-Matrix A in eine Zeilenstufenform mit genau drei Stufen. Also ist A invertierbar.

   [Alternativ, aber umständlich, kann man nochmal (!) das Gaußsche Eliminationsverfahren anwenden.] □

4. *Beweis.* Nach Teil 3. ist A invertierbar. Sei $X := (I_3 + A) \cdot A^{-1}$. Dann gilt

$$X \cdot A = (I_3 + A) \cdot A^{-1} \cdot A = (I_3 + A) \cdot I_3 = I_3 + A. \qquad \square$$

5. *Behauptung.* Nein, einen solchen Vektor gibt es *nicht.*

   Beweis. Da A nach Teil 3. invertierbar ist, gilt für alle $b \in \mathbb{Q}^3$, dass

$$V(A, b) = \{A^{-1} \cdot b\},$$

   was eine ein-elementige Menge ist. □

   [Alternativ kann man auch darüber argumentieren, dass $V(A, b)$ leer oder ein affiner Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$ ist. Daher gibt es keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.]

Aufgabe 6 (3 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f bezüglich der folgenden Basis B von $\mathbb{R}^2$:
$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
2. Bestimmen Sie $\det(f \circ f \circ f)$.
3. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von f.
4. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$.
5. Ist f über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Lösung:

1. Es gilt
$$\begin{aligned} M_{B,B}(f) &= M_B^{-1} \cdot M(f) \cdot M_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{0-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Inverse von M_B haben wir dabei mit der expliziten Formel für Inverse von 2×2-Matrizen bestimmt.

[Alternativ könnte man dieses Inverse auch mit dem Gaußschen Elmininationsverfahren bestimmen.

Außerdem hätte man die Lösung auch anders ansetzen können, indem man die Spalten der Matrix $M_{B,B}(f)$ aus den entsprechenden Gleichungen mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren bestimmt.]

2. Mit der Verträglichkeit von $M(\,\cdot\,)$ mit Komposition bzw. Matrixmultiplikation und der Multiplikativität der Determinante folgt

$$\begin{aligned} \det(f \circ f \circ f) &= \det M(f \circ f \circ f) = \det\bigl(M(f)^3\bigr) = \bigl(\det M(f)\bigr)^3 \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)^3 = (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)^3 = (-3)^3 \\ &= -27. \end{aligned}$$

[Analog könnte man auch mit der Matrix $M_{B,B}(f)$ aus Teil 1. verfahren.

Alternativ könnte man zunächst $f \circ f \circ f$ expliziter beschreiben, etwa durch Berechnung von $M(f) \cdot M(f) \cdot M(f)$. Dies ist jedoch deutlich aufwendiger.]

3. Die Menge der reellen Eigenwerte von f ist

$$\sigma_{\mathbb{R}}(f) = \sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \det(A - \lambda \cdot I_2) = 0\}.$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I_2) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) - 2 \\ &= \lambda^2 - 3 = (\lambda + \sqrt{3}) \cdot (\lambda - \sqrt{3}), \end{aligned}$$

und damit (Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$) ist $\sigma_{\mathbb{R}}(f) = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ die Menge der reellen Eigenwerte von f.

4. Da 0 nach Teil 3. *kein* Eigenwert von f ist, ist $\ker f = \{0\}$, und damit insbesondere $\dim_{\mathbb{R}} \ker f = 0$.

[Alternativ kann man den Kern (und seine Dimension) z.B. auch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren bestimmen.]

5. *Behauptung.* Die Abbildung f ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

Beweis. Nach Teil 3. ist $\#\sigma_{\mathbb{R}}(f) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$. Also ist f über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar (Gratis-Diagonalisierbarkeit). □

Aufgabe 7 (4 Punkte). Die Matrix $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ habe die Eigenwerte 1 und 100. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ mit $X^2 = A$ gibt.

Lösung:

Beweis. Wir verwenden den Konjugationstrick: Es gilt

$$\#\sigma_{\mathbb{Q}}(A) \geq \#\{1, 100\} = 2.$$

Also ist die 2×2-Matrix A über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar (Gratis-Diagonalisierbarkeit) und es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^2.$$

Sei

$$X := S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot S^{-1}.$$

Dann ist $X \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ und es folgt

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \right)^2 = S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^2 \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot S^{-1} \cdot A \cdot S \cdot S^{-1} = A. \end{aligned}$$

□