Lineare Algebra I: Richtungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann November 2024

Allgemeine Hinweise

Viele mathematische Probleme lassen sich auf die Betrachtung von Gleichungen reduzieren.

- Wie immer: Berücksichtigen Sie die Hinweise von Blatt 0 und vom Hinweisblatt zum Üben! (Auch zum Aufschreiben ...)
- Insbesondere: Was ist gegeben? Was ist zu zeigen?
- Führt das Problem auf Gleichungen? Wenn ja: Welche Gleichungen sind zu betrachten?

  Für jede Gleichung muss man sich überlegen, welche „Richtung" der Behandlung der Gleichung erforderlich ist:

  - Ist zu zeigen, dass alle Lösungen eine bestimmte Gestalt besitzen?
  - Oder ist zu zeigen, dass gewisse Werte Lösungen sind?

  Es handelt sich dabei um verschiedene Implikationsrichtungen und dies muss bei der Bearbeitung/Darstellung der Lösung entsprechend berücksichtigt werden!

- Wir werden im Verlauf der Vorlesung, ein systematisches Verfahren kennenlernen, um lineare Gleichungssyteme (wie sie in Aufgabe 1 und Aufgabe 2 auftreten) zu lösen. Die Grundfrage, welche „Richtung" zu behandeln ist, muss aber auch dann beantwortet werden und bei der Bearbeitung entsprechend dargestellt werden.

Beispielaufgaben

Aufgabe 1 (lineare Unabhängigkeit)**.** Zeigen Sie, dass die Familie

$$\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 2 (Erzeugendensystem)**.** Zeigen Sie, dass

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ ist.

Aufgabe 3 (?!)**.** Zeigen Sie, dass $2 = 0$ in $\mathbb{Q}$ gilt.

Lösungsversuch zu Aufgabe 1

Es handelt sich um zwei verschiedene Vektoren in $\mathbb{Q}^2$. Also sind sie linear unabhängig.

Korrektur. Das „Also“ ist keine zulässige Schlussfolgerung. Zum Beispiel sind auch die Vektoren

$$w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die beide in $\mathbb{Q}^2$ liegen, vereschieden; aber die Familie (w_1, w_2) in $\mathbb{Q}^2$ ist *nicht* linear unabhängig (da $1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 = 0$ ist, obwohl $1 \neq 0$ ist).

Ceterum censeo: Voraussetzung, Behauptung, Beweis?

Lösungsversuch zu Aufgabe 1

Sei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$. Dann ist $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ und

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist die gegebene Familie linear unabhängig.

Korrektur. Die angegebene Rechnung hat nichts mit linearer Unabhängigkeit zu tun.

Ceterum censeo: Voraussetzung, Behauptung, Beweis?

Lösung zu Aufgabe 1

- *Voraussetzung.* Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- *Behauptung.* Die Familie (v_1, v_2) ist linear unabhängig (über $\mathbb{Q}$).

- *Beweis.* Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$. Wir zeigen, dass dann bereits $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ folgt:

  Aus $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 \end{pmatrix},$$

  und damit

  ① $2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und

  ② $2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0$.

  Nach ① ist $\lambda_2 = -2 \cdot \lambda_1$. Einsetzen in ② ergibt, dass

$$0 = 2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \lambda_1 - 4 \cdot \lambda_1 = -2 \cdot \lambda_1.$$

  Wegen $-2 \neq 0$ (in $\mathbb{Q}$) folgt daraus, dass $\lambda_1 = 0$ ist. Mit ① erhalten wir somit auch $\lambda_2 = 0$. $\square$

Lösungsversuch zu Aufgabe 2

- *Voraussetzung.* Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$

  $$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  und $E := \{v_1, v_2\}$.

- *Behauptung.* Es ist $\{v_1, v_2\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$.

- *Beweis.* Wir zeigen, dass $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}^2$ ist.

  Wegen $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}^2$ gilt $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E) \subset \mathbb{Q}^2$.

  Umgekehrt gilt auch $\mathbb{Q}^2 \subset \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$, denn: Wir verwenden dafür die explizite Beschreibung von $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$ (Proposition 3.2.12). Sei $x \in \mathbb{Q}^2$. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit

  $$x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2.$$

  Dann folgt (wobei x_1, x_2 die Koordinaten von x bezeichnen)

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 \end{pmatrix},$$

  und damit

  ① $x_1 = 2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2$ und

  ① $x_2 = 2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2$.

  Umstellen von ① ergibt

  $$\lambda_2 = x_1 - 2 \cdot \lambda_1.$$

  Einsetzen in ② liefert

  $$x_2 = 2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot (x_1 - 2 \cdot \lambda_1) = -2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot x_1,$$

  und damit $\lambda_1 = x_1 - 1/2 \cdot x_2$. Einsetzen in ① liefert somit

  $$x_1 = 2 \cdot \Big(x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2\Big) + \lambda_2,$$

  und damit $\lambda_2 = x_2 - x_1$.

  Also ist $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$. □

Korrektur. Es wurde nur gezeigt:

> *Wenn* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$ erfüllen, *dann* ist
>
> $$\lambda_1 = x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = x_2 - x_1.$$

Um $x \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$ zu zeigen, ist aber die umgekehrte Richtung zu zeigen: Für $\lambda_1 = x_1 - 1/2 \cdot x_2$ und $\lambda_2 = x_2 - x_1$ gilt $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$. Insbesondere ist das „Also“ in der letzten Zeile keine zulässige Schlussfolgerung.

Lösung zu Aufgabe 2

- *Voraussetzung.* Wir betrachten im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  und $E := \{v_1, v_2\}$.

- *Behauptung.* Es ist $\{v_1, v_2\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$.

- *Beweis.* Wir zeigen, dass $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}^2$ ist.

  Wegen $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}^2$ gilt $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E) \subset \mathbb{Q}^2$.

  Umgekehrt gilt auch $\mathbb{Q}^2 \subset \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$, denn: Wir verwenden dafür die explizite Beschreibung von $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$ (Proposition 3.2.12). Sei $x \in \mathbb{Q}^2$. Für (wobei x_1, x_2 die Koordinaten von x bezeichnen)

$$\lambda_1 := x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2, \quad \lambda_2 := x_2 - x_1$$

  erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 &= \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (x_2 - x_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 - 1/2 \cdot x_2) \cdot 2 + x_2 - x_1 \\ (x_1 - 1/2 \cdot x_2) \cdot 2 + 2 \cdot (x_2 - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x.
\end{aligned}$$

  Also ist $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$. $\square$

Hinweis. Wie kommt man auf diese Wahl von λ_1 und λ_2 ? Man setzt (auf einem Schmierblatt ...) die Gleichung $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$ an, übersetzt diese (mit den konkreten Werten von v_1 und v_2) in

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 \\ \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

und versucht Lösungen λ_1 bzw. λ_2 für diese Gleichungen zu finden ...

Lösungsversuch zu Aufgabe 3

Sei $x := 1 \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$x - 1 = 0.$$

Multiplikation mit $1/(x-1)$ liefert $1 = 0$. Multiplikation mit 2 ergibt $2 = 0$.

Korrektur. Wegen $x = 1$ ist $x - 1 = 0$. Somit besitzt $x - 1$ in $\mathbb{Q}$ *kein* multiplikatives Inverses. Insbesondere ergibt der Ausdruck $1/(x-1)$ für $x = 1$ in $\mathbb{Q}$ keinen Sinn.

Ceterum censeo: Voraussetzung, Behauptung, Beweis?

Lösungsversuch zu Aufgabe 3

Wir betrachten die Gleichung $x = 0$ in $\mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} x - 1 &= -1 \\ (x-1)^2 &= (-1)^2 = 1 \\ x - 1 &= 1 \quad \text{oder} \quad x - 1 = -1 \\ x &= 2 \quad \text{oder} \quad x = 0 \end{aligned}$$

Also ist 2 eine Lösung eine Lösung der Gleichung $x = 0$, und somit $2 = 0$.

Korrektur. Es ist völlig unklar, was der logische Zusammenhang zwischen den gelisteteten Gleichungen/Aussagen ist. Im nächsten Versuch ist dieser Aspekt verbessert, aber es bleiben andere substantielle Probleme . . .

Lösungsversuch zu Aufgabe 3

Wir betrachten die Gleichung $x = 0$ in $\mathbb{Q}$. Addition von -1 auf beiden Seiten liefert

$$x - 1 = -1,$$

und damit

$$(x-1)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Daher ist $x - 1 = 1$ oder $x - 1 = -1$, und damit $x = 2$ oder $x = 0$.

Also ist 2 eine Lösung eine Lösung der Gleichung $x = 0$, und somit $2 = 0$.

Korrektur. Typischer Geisterfahrer! Das „Also“ ist keine zulässige Schlussfolgerung. Es wurde davor gezeigt:

Wenn $x \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $x = 0$ erfüllt, *dann* ist $x = 2$ oder $x = 0$.

Das „Also“ verwendet aber die (nicht gezeigte) umgekehrte Richtung.

Ceterum censeo: Voraussetzung, Behauptung, Beweis?

Lösungsversuch zu Aufgabe 3

Aus $2 = 0$ folgt (Multiplikation mit 0), dass $0 = 0$. Dies ist eine wahre Aussage. Also ist auch $2 = 0$ wahr.

Korrektur. Falls aus einer Aussage A eine wahre Aussage folgt, bedeutet dies im allgemeinen *nicht*, dass auch A wahr ist (s. Definition von „$\Longrightarrow$“).

Ceterum censeo: Voraussetzung, Behauptung, Beweis?

Viel Erfolg und viel Spaß bei den Übungen!