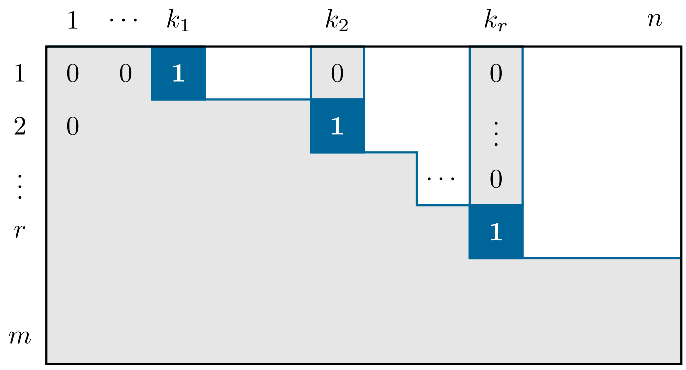
Lineare Algebra I: Zeilenstufenform

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Januar 2025

Zeilenstufenform

Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei A in *Zeilenstufenform*, d.h. die Matrix A ist von der folgenden Gestalt:



Dabei ist $r \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$, die Indizes $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ erfüllen $k_1 < \dots < k_r$, der graue Bereich enthält nur Nullen, die Stufenelmente sind 1 und der weiße Bereich enthält Elemente aus K. Man bezeichnet dann die Spalten $A_{*,k_1}, \dots, A_{*,k_r}$ auch als *Pivotspalten von A*.

Lösungsmenge des homogenen Systems

In der obigen Situation zeigt direktes Nachrechnen (beider Inklusionen!), dass

$$V(A,0) = \left\{ x \in K^n \;\middle|\; \forall_{j \in \{1,\dots,r\}} \quad x_{k_j} = - \sum_{k=k_j+1}^{n} A_{j,k} \cdot x_k \right\}.$$

Man beachte, dass man hierbei x_j mit $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$ „frei in K wählen" kann und daraus $x_{k_r}, \dots, x_{k_1}$ rekursiv (eindeutig) berechnen kann. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} f \colon V(A,0) &\longrightarrow K^{n-r} \\ x &\longmapsto x \text{ ohne die Koordinaten, die zu Pivotindizes gehören} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Sei $g := f^{-1} \colon K^{n-r} \longrightarrow V(A,0)$.

Eine Basis des homogenen Lösungsraums

Ist $(w_1, \dots, w_{n-r})$ eine K-Basis von K^{n-r}, so ist $\bigl(g(w_1), \dots, g(w_{n-r})\bigr)$ eine K-Basis von $V(A,0)$, da g ein Isomorphismus ist. Dies können wir zum Beispiel auf die Standardbasis von K^{n-r} anwenden und erhalten so die Basis von $V(A,0)$ aus Proposition 5.1.1.

Expliziter erhält man diese Basis von $V(A,0)$ wie folgt: Für jeden Nicht-Pivot-Index j konstruiert man einen Basisvektor, indem man

- die j-Koordinate zu 1 setzt,
- die anderen Nicht-Pivot-Koordinaten zu 0 setzt,
- und die Pivot-Koordinaten daraus mit der Gleichung zur entsprechenden Stufe des Gleichungssystems berechnet.

Aufgaben

Aufgabe 1 (Gleichungssysteme in Zeilenstufenform)**.** Wir betrachten die folgenden Matrizen A mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten in Zeilenstufenform:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie jeweils

- die Indizes der Pivotspalten von A
- die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A
- den Rang von A
- die Dimension von $V(A, 0)$
- das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form
- eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$.

Die Lösungen auf den nächsten Seiten sollten Sie selbstverständlich erst dann anschauen, wenn Sie die Aufgaben oben selbständig bearbeitet haben!

Lösung zu Aufgabe 1.1

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: 5
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $1, 2, 3, 4$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 1
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 1 = 4$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$x_5 = 0$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.2

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: 2
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $1, 3, 4, 5$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 1
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 1 = 4$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 0$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.3

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: 1
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $2, 3, 4, 5$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 1
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 1 = 4$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.4

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: Es gibt keine
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $1, 2, 3, 4, 5$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 0
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 0 = 5$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.5

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: $4, 5$
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $1, 2, 3$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 2
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 2 = 3$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.6

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: $2, 4$
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $1, 3, 5$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 2
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 2 = 3$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$\begin{aligned} x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_5 &= 0 \\ x_4 + 4 \cdot x_5 &= 0 \end{aligned}$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.7

- Die Indizes der Pivotspalten von A sind: 2
- Die Indizes der Nicht-Pivotspalten von A sind: $1, 3, 4, 5$
- Der Rang von A ist die Anzahl der Stufen (da A in Zeilenstufenform ist), also 1
- Die Dimension von $V(A, 0)$ ist (Proposition 5.1.1): $5 - 1 = 4$
- Das homogene lineare Gleichungssystem zu A in expliziter Form lautet

  Gesucht: alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit

$$\begin{aligned} x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 &= 0 \end{aligned}$$

- Eine $\mathbb{R}$-Basis von $V(A, 0)$ ist nach Proposition 5.1.1 zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 1.8

Diese Matrix ist *nicht* in Zeilenstufenform! Die Aufgabe ergibt in dieser Form also keinen Sinn ...

Ein schöneres Beispiel für eine Zeilenstufenform: https://tinyurl.com/y7thesjx

Viel Erfolg und viel Spaß bei den Übungen!