

Aufgabe 1 (Voraussetzungen/Behauptungen/Struktur). Zerlegen Sie die folgenden Textblöcke in Voraussetzungen und Behauptungen. Welche grundlegende Beweisstruktur könnte man jeweils erwarten?

1. Sei K ein Körper. Dann gilt für alle $x \in K$, dass $x \cdot 0 = 0$.
2. Sei K ein Körper und sei V ein K -Vektorraum. Dann gilt: Sind $f: V \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow V$ lineare Abbildungen, so ist auch $g \circ f$ linear. \rightarrow
3. Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum mit einer Basis $(v_i)_{i \in I}$ und sei W ein K -Vektorraum. Dann gibt es zu jeder Abbildung $f: I \rightarrow W$ genau eine K -lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ mit

$$\forall_{i \in I} F(v_i) = f(i).$$

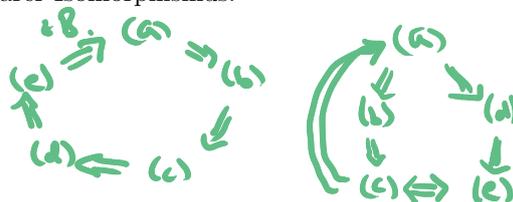
Existenz
und Eindeutigkeit

4. Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und sei $f: V \rightarrow V$ eine K -lineare Abbildung. Dann gilt: $\text{ker } f \subset \text{ker}(f \circ f)$.
Bew: Sei $x \in \text{ker } f$.
Dann ist auch $x \in \text{ker}(f \circ f)$,
denn...

5. Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und sei $f: V \rightarrow V$ die Nullabbildung. Dann gilt $\text{ker } f = V$.
Gleichheit von Mengen

6. Sei K ein Körper und sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen. Dann sind äquivalent:

- (a) Die Abbildung f ist ein K -linearer Isomorphismus.
- (b) Die Abbildung f ist injektiv.
- (c) Es gilt $\text{ker } f = \{0\}$.
- (d) Die Abbildung f ist surjektiv.
- (e) Es gilt $\text{im } f = W$.



7. Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.
8. Sei (M, \leq) eine nicht-leere partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Kette eine obere Schranke in M besitzt. Dann besitzt (M, \leq) ein maximales Element in M .

Hinweis. Sie müssen diese Textblöcke nicht verstehen; es geht um die Struktur.