Aufgabe 1 (Voraussetzungen/Behauptungen/Struktur). Zerlegen Sie die folgenden Textblöcke in Voraussetzungen und Behauptungen. Welche grundlegende Beweisstruktur könnte man jeweils erwarten?

1. Sei K ein Körper. Dann gilt, für alle $x \in K$, dass $x \cdot 0 = 0$.
2. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt: Sind $f\colon V \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow V$ lineare Abbildungen, so ist auch $g \circ f$ linear. „$\Longrightarrow$"
3. Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_i)_{i\in I}$ und sei W ein K-Vektorraum. Dann gibt es zu jeder Abbildung $f\colon I \longrightarrow W$ genau eine K-lineare Abbildung $F\colon V \longrightarrow W$ mit

   Existenz und Eindeutigkeit

$$\forall_{i\in I} \quad F(v_i) = f(i).$$

4. Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

   Bew: Sei $x \in \ker f$. Dann ist auch $x \in \ker(f \circ f)$, denn ...

$$\ker f \subset \ker(f \circ f).$$

5. Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ die Nullabbildung. Dann gilt

$$\ker f = V. \quad \text{Gleichheit von Mengen}$$

6. Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Dann sind äquivalent:
   (a) Die Abbildung f ist ein K-linearer Isomorphismus.
   (b) Die Abbildung f ist injektiv.
   (c) Es gilt $\ker f = \{0\}$.
   (d) Die Abbildung f ist surjektiv.
   (e) Es gilt $\operatorname{im} f = W$.

   z.B. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a)

   (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (e), (a) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e), (c) $\Rightarrow$ (a)

7. Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.
8. Sei $(M, \le)$ eine nicht-leere partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Kette eine obere Schranke in M besitzt. Dann besitzt $(M, \le)$ ein maximales Element in M.

Hinweis. Sie müssen diese Textblöcke nicht verstehen; es geht um die Struktur.