# Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 1 vom 27. April 2017

---

**Aufgabe 1** (Bilinearformen)**.** Wir betrachten die Bilinearform

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_1 \cdot y_2 + 2 \cdot x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Bilinearform $b$ ist symmetrisch.
2. Die Bilinearform $b$ ist positiv definit.

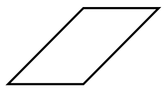
**Aufgabe 2** (lineare Abhängigkeit und Skalarprodukte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, sei $\|\cdot\|$ die induzierte „Norm" auf $V$ und seien $x, y \in V$ mit $y \neq 0$. Sei

$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}.$$

Zeigen Sie: Die Familie $(x, y)$ ist genau dann linear abhängig, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$ ist.

**Aufgabe 3** (Parallelogrammgleichung)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die von $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ auf $V$ induzierte Norm.

1. Zeigen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr).$$
2. Warum heißt diese Gleichung Parallelogrammgleichung? Illustrieren Sie die Situation durch eine geeignete Skizze.



**Aufgabe 4** (Dualisieren über Skalarprodukte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto \langle x,\ \cdot\,\rangle \end{aligned}$$

von $V$ in den Dualraum $V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass $\varphi$ injektiv ist.
2. Folgern Sie: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, so ist $\varphi$ ein Isomorphismus.

**Bonusaufgabe** (Parallelogrammgleichung)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung erfüllt ist, d.h. es gilt

$$\forall_{x,y\in V} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ dann von einem Skalarprodukt induziert ist.
*Hinweis.* Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$ !

---

Abgabe bis zum 4. Mai 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen