Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 10 vom 29. Juni 2017

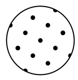
Aufgabe 1 (Elementarteiler von Moduln). Sei R ein Hauptidealring und sei U ein Untermodul von R^3. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist (v_1, v_2, v_3) eine R-Basis von R^3, so gibt es Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \alpha_2 \cdot v_2, \alpha_3 \cdot v_3\}$.
2. Es gibt eine Basis (v_1, v_2, v_3) von R^3 und Primelemente $p_1, p_2, p_3 \in R$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{p_1 \cdot v_1, p_2 \cdot v_2, p_3 \cdot v_3\}$.

Aufgabe 2 (mehr Elementarteiler). Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \leq 9$, indem Sie zunächst geeignete Elementarteiler und zugehörige Transformationen bestimmen.



Aufgabe 3 (schon wieder Elementarteiler). Sei

$$A := \begin{pmatrix} T^3 & (T+1) & -1 \\ T & T & T \\ T^2 & (T+1) & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}\big(\mathbb{Q}[T]\big)$$

und $U := \operatorname{im} L(A) \subset \mathbb{Q}[T]^3$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Elementarteiler von A.
2. Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}[T]$-Basis von U.
3. Geben Sie eine Darstellung von $\mathbb{Q}[T]^3/U$ als direkte Summe zyklischer $\mathbb{Q}[T]$-Moduln an.
4. Ist $\mathbb{Q}[T]^3/U \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[T]/(T^3 + T^2)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Rang freier Moduln über Hauptidealringen). Sei R ein Hauptidealring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie: Gilt $n > m$ und ist $A \in M_{m\times n}(R)$, so ist $L(A)\colon R^n \longrightarrow R^m$ *nicht* injektiv.
2. Folgern Sie: Es gilt genau dann $R^n \cong_R R^m$, wenn $n = m$ ist.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Staatsexamensaufgaben zu abelschen Gruppen)**.** Die folgenden Aufgaben sind ehemalige (teilweise leicht umformulierte) Staatsexamensaufgaben:

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphietypen von abelschen Gruppen, die genau 1980 Elemente enthalten, und geben Sie für jeden Isomorphietyp ein Beispiel.

2. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, so dass es genau sechs Isomorphietypen von abelschen Gruppen mit genau n Elementen gibt.

3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ mit $\det A \neq 0$. Zeigen Sie, dass
$$|\det A| = |\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} L(A)|.$$

4. Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppe der positiven reellen Zahlen (bezüglich Multiplikation) zur abelschen Gruppe aller reellen Zahlen (bezüglich Addition) isomorph ist.

   Hinweis. Analysis!

Hinweis. Herzlichen Glückwunsch! Bereits mit dem jetzigen Wissen aus der Linearen Algebra und der Analysis sind Sie in der Lage einen signifikanten Anteil an Staatsexamensaufgaben (aber natürlich bei weitem nicht alle . . .) zu lösen.

Abgabe bis zum 6. Juli 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen