Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 11 vom 6. Juli 2017

Aufgabe 1 (Minimalpolynome)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $\lambda \in K \setminus \{0\}$, so ist $\mu_{\lambda\cdot A} = \lambda^{\deg \mu_A} \cdot \mu_A\bigl(\frac{1}{\lambda} \cdot T\bigr)$.
2. Es gilt $\mu_{A\cdot A} = \mu_A \cdot \mu_A$.

Aufgabe 2 (Kombination zweier Blöcke)**.** Sei K ein Körper, seien $k, m \in \mathbb{N}$, seien $B \in M_{k\times k}(K)$, $C \in M_{m\times m}(K)$. Dann betrachten wir die Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

mit $n := k + m$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A das (normierte) kleinste gemeinsame Vielfache von μ_B und μ_C in $K[T]$ ist.

Aufgabe 3 (Minimalpolynome und Normalformen)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[T]$.
2. Ist A über $\mathbb{Q}$ zu einer Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ in Jordanscher Normalform ähnlich? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Ist die Matrix A (aufgefasst als Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$) über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A in $\mathbb{F}_2[T]$, wenn wir A als Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$ auffassen.

Aufgabe 4 (Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Matrix A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und (paarweise) verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j).$$

Hinweis. Falls A diagonalisierbar ist, so bietet es sich an, das Minimalpolynom mithilfe der Konjugationsinvarianz zu berechnen. Für die umgekehrte Implikation kann man wie beim Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton vorgehen.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Cayley-Hamilton, ganz einfach?!)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

Behauptung. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann ist μ_A in $K[T]$ ein Teiler von χ_A.

Beweis. Da das Minimalpolynom den Kern der Auswertung bei A als Ideal in $K[T]$ erzeugt, genügt es zu zeigen, dass $\chi_A(A) = 0 \in M_{n\times n}(K)$ gilt.

Nach Definition des charakteristischen Polynoms ist $\chi_A = \det(T \cdot I_n - A)$. Also erhalten wir

$$\chi_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = \det 0 = 0,$$

wie gewünscht. □

Hinweis. Es ist hilfreich, dies an einem konkreten Beispiel, Schritt für Schritt durchzugehen und jeweils pedantischst darauf zu achten, dass man nicht schlampert ...

Abgabe bis zum 13. Juli 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen