# Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 12 vom 13. Juli 2017

---

**Aufgabe 1** (Jordansche Normalformen?). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt eine Matrix $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit
$$\det A = 8 \quad \text{und} \quad \mu_A = (T-2)^2 \cdot (T-1).$$
2. Es gibt eine Matrix $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit
$$\det A = 54 \quad \text{und} \quad \mu_A = (T-3)^2 \cdot (T-2).$$

**Aufgabe 2** (Jordansche Normalform und Ähnlichkeit).

1. Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen in $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 & 10 & -9 \\ -14 & 14 & -9 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$
2. Welche dieser Matrizen sind ähnlich zueinander? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 3** (iiiii!). Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} i & -i & i & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & i & -i & i \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$
Bestimmen Sie außerdem (mit dem Verfahren aus der Vorlesung) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

**Aufgabe 4** (Blorxisch). Die Sprache **BLORX** beruht auf dem Alphabet mit den Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X**. Blorxische Wörter werden dabei nach den folgenden Regeln gebildet:

- Wörter dürfen mit jedem der Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X** beginnen.
- Auf **B** kann nur **B** oder **L** folgen (oder das Wortende).
- Auf **L** oder **O** kann nur **L**, **O**, **R** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **R** kann nur **O** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **X** kann nur **L** oder **X** folgen (oder das Wortende).

Zum Beispiel sind **BLORX** und **RORO** korrekte blorxische Wörter, *nicht* aber **ROXOR**. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die Anzahl der blorxischen Wörter gegebener Länge, die mit **X** beginnen und mit **X** enden!

*Hinweis.* Betrachten Sie eine geeignete Matrix in $M_{5\times 5}(\mathbb{C})$, deren Einträge nur Nullen und Einsen sind. Was haben Potenzen dieser Matrix mit den gesuchten Anzahlen zu tun? Wie kann man Potenzen von Matrizen mithilfe der Jordanschen Normalform bestimmen?

*Bitte wenden*

**Bonusaufgabe** (Berechnung der Jordanschen Normalform über den Elementarteilersatz für Matrizen). Sei $K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$.

1. Lesen Sie im Skript nach, wie man die Jordansche Normalform von $A$ berechnen kann, indem man den Elementarteilersatz für Matrizen auf die Matrix $T \cdot I_n - A \in M_{n\times n}(K[T])$ anwendet.
2. Zeigen Sie die dabei verwendete Tatsache, dass $\operatorname{im} L(T \cdot I_n - A) = \ker \pi$ gilt, wobei

$$\begin{aligned} \pi \colon K[T]^n &\longrightarrow K^n[L(A)] \\ p &\longmapsto \sum_{j=1}^n p_j \cdot e_j. \end{aligned}$$

**Bonusaufgabe** (runde Matrizen; für Lehrämtler (als optionale Alternative zur obigen Bonusaufgabe)). Ein wesentlicher Bestandteil des Unterrichts ist ein Fundus an interessanten Aufgaben. Die Schüler freuen sich dabei natürlich, wenn der eigentliche Inhalt der Aufgaben nicht durch „krumme" Zahlen in den Rechnungen in den Hintergrund rückt. In diesem Sinne:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie kann man viele Beispiele von Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ finden, deren Jordan-Normalform nur ganzzahlige Einträge besitzt, und für die es auch Ähnlichkeitstransformationen mit ganzzahligen Einträgen gibt?
2. In welchen Fällen kann man es sogar einrichten, dass *alle* zugehörigen Ähnlichkeitstransformationen (bis auf ein skalares Vielfaches) ganzzahlig sind? (Das gibt einem die Garantie, dass ziemlich unabhängig vom Lösungsweg keine zu komplizierten Matrizen auftreten.)

**Bonusaufgabe** (Hamilton; für Physiker (als optionale Alternative zur obigen Bonusaufgabe)). „Welcher" Hamilton hat am Satz von Cayley-Hamilton mitgewirkt? Welche weiteren Konzepte der Physik/Mathematik gehen auf ihn zurčk?

---