Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 5 vom 25. Mai 2017

Aufgabe 1 (Quadrieren). Zu einem Körper K sei

$$\begin{aligned} \varphi_K \colon K[T] &\longrightarrow K[T] \\ f &\longmapsto f \cdot f. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Abbildung $\varphi_{\mathbb{Q}}$ ist ein Ringhomomorphismus.
2. Die Abbildung $\varphi_{\mathbb{F}_2}$ ist ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 2 (Zerlegung von Endomorphismen). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, sei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

und $f := L(A) \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-zyklischer Vektorraum ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-irreduzibler Vektorraum ist.

Aufgabe 3 (Endomorphismenpolynome). Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $p(f) = 0$ gibt.
Hinweis. Ist $p = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j$, so ist $p(f) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot f^j$. Im Notfall:
Welche Dimension hat $\operatorname{Hom}_K(V,V)$ (Matrizenkalkül!)? Kann die Familie $(f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ dann überhaupt linear unabhängig sein? Was bedeutet es, dass die Familie $(f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ linear abhängig ist?

Aufgabe 4 (Uhrzeitring). Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$\clock := \bigl\{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \bigm| \exists_{k\in\mathbb{Z}} \quad x - y = 12\cdot k\bigr\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

auf $\mathbb{Z}$ und den Quotienten $U := \mathbb{Z}/\clock$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : U \times U &\longrightarrow U \\ \bigl([x],[y]\bigr) &\longmapsto [x+y] \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : U \times U &\longrightarrow U \\ \bigl([x],[y]\bigr) &\longmapsto [x\cdot y] \end{aligned}$$

   wohldefiniert sind.
2. Zeigen Sie, dass U mit diesen Verknüpfungen ein kommutativer Ring ist.
3. Was hat U mit Uhrzeiten zu tun?
4. Ist U ein Integritätsring? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Gruppenringe). Sei G eine Gruppe. Finden Sie mithilfe geeigneter Literatur heraus, wie der Gruppenring $\mathbb{C}G$ definiert ist und was die Kaplansky-Vermutung besagt. Zeigen Sie: Gibt es ein Element $g \in G\setminus\{e\}$ mit $g^{2017} = e$, so ist der Ring $\mathbb{C}G$ *nicht* nullteilerfrei.

Abgabe bis zum 1. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen