Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 6 vom 1. Juni 2017

Aufgabe 1 (Modulhomomorphismen). Sei R ein Ring, seien V, W Moduln über R und sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $f(0) = 0$.
2. Ist $a \in R \setminus \{0\}$ und $v \in V$ mit $f(a \cdot v) = 0$, so folgt $f(v) = 0$.

Aufgabe 2 (minimale Erzeugendensysteme). Im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^2$ betrachten wir

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 2017 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} E = \mathbb{Z}^2$ gilt.
2. Zeigen Sie: Ist $F \subset E$ mit $F \neq E$, so ist $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} F \neq \mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 3 (invariante Unterräume). Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Außerdem sei $U \subset V$ ein K-Untervektorraum. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Unterraum U ist f-invariant, d.h. es gilt $f(U) \subset U$.
2. Die Teilmenge $U \subset V$ ist ein $K[T]$-Untermodul von $V[f]$.

Aufgabe 4 (Vererbung von endlicher Erzeugtheit). Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul und sei $U \subset V$ ein Untermodul. Zeigen Sie: Sind U und V/U endlich erzeugte R-Moduln, so ist auch der R-Modul V endlich erzeugt.

Hinweis. Wie kann man aus dem Beweis der Dimensionsformel für Quotientenvektorräume einen Beweis dieser Aussage über Moduln extrahieren? Basen sollten dabei natürlich nicht auftreten, sondern nur Erzeugendensysteme.

Bonusaufgabe (Zauberei!). Professor Pirkheimer führt seinen Kollegen in der Modulkatalogslektüregesellschaft zusammen mit seinem Assistenten folgenden Kartentrick vor: Pirkheimer bittet einen der Zuschauer, ein Kartendeck mit 52 Karten (jeweils 2, 3, ..., 10, B, D, K, A in den Farben Karo, Herz, Pik, Kreuz) zu mischen. Ein weiterer Zuschauer zieht aus diesem Deck fünf Karten und gibt sie dem Assistenten (natürlich so, dass Pirkheimer die Karten *nicht* sehen kann; der Assistent darf sie aber ansehen). Der Assistent gibt dann nacheinander vier Karten offen an Pirkheimer und behält die fünfte Karte verdeckt bei sich. Professor Pirkheimer nennt daraufhin korrekt die verdeckte fünfte Karte.

$\boxed{\diamondsuit}\quad \boxed{\heartsuit}\quad \boxed{\spadesuit}\quad \boxed{\clubsuit}\quad \boxed{?}$

Wie funktioniert dieser Trick? Wie kann man den Trick so arrangieren, dass er einfach durchzuführen ist?

Hinweis. Es geht alles mit rechten Dingen zu – insbesondere kommt es nicht darauf an, ob die Karten quer, hochkant, mit wackelnden Ohren, etc. überreicht werden. Zum Einstieg kann es hilfreich sein, sich zunächst eine Variante zu überlegen, bei der Pirkheimer nur die Farbe der fünften Karte korrekt nennt. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und die symmetrische Gruppe S_3 dürfen gerne mitspielen!

Abgabe bis zum 8. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen