Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 9 vom 22. Juni 2017

Aufgabe 1 (Idealgleichheiten). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(T^4 + T^2 + 2 \cdot T, T^3 + 2017 \cdot T) = (T)$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Es gilt $(T^2 + T, T + 1) = (T^2 + T, T^5 + 1)$ in $\mathbb{F}_2[T]$.

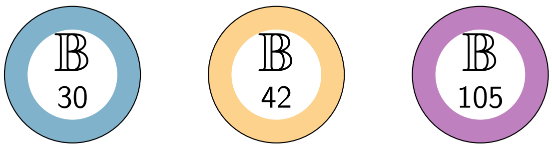
Aufgabe 2 (Schwanensee). Professor Pirkheimer bewundert das Schwanensee-Ballett und wüsste zu gerne, wie viele Tänzerinnen involviert sind. Aufgrund des permanenten Rumgehopses sind sie jedoch nur schwer zu zählen. Er stellt jedoch fest, dass es je einen Tanz gibt, bei dem sich

- alle bis auf drei Tänzerinnen in Fünfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf fünf Tänzerinnen in Zwölfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf sechs Tänzerinnen in Siebenergrüppchen aufteilen.

Außerdem ist sich Pirkheimer sicher, dass es sich insgesamt um weniger als 1000 Tanzbeine bzw. 500 Tänzerinnen handelt.

Wieviele Tänzerinnen schwirren herum? Begründen Sie Ihre Antwort! Wie haben Sie diese Lösung gefunden?

Aufgabe 3 (Währungsreform). Im Rahmen einer Währungsreform werden neue Münzen mit dem Wert von 30 Blorx, 42 Blorx bzw. 105 Blorx eingeführt.



1. Ist es möglich, 44 Blorx exakt zu bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Wie kann man den Betrag von 9 Blorx exakt bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)?

Hinweis. Sie dürfen in beiden Fällen annehmen, dass Käufer und Verkäufer genug Exemplare der verschiedenen Münztypen besitzen.

Aufgabe 4 (Präsentationen von Moduln). Bestimmen Sie für die folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln V jeweils zwei verschiedene Wahlen von $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ mit $V \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^m / \operatorname{im} L(A)$.

1. Für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2017}$.
2. Für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Bonusaufgabe (große kleine Moduln). Geben Sie einen Integritätsring R an, für den nicht jeder Untermodul von R^{2017} endlich erzeugt ist.
Hinweis. Man könnte zum Beispiel Polynome mit viiiiiiielen Variablen betrachten …

Abgabe bis zum 29. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen