Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 10 vom 26. Juni 2017

Aufgabe 1 (Präsentationen von Moduln).

1. Gehen Sie den Beweis von Satz 2.5.1 Schritt für Schritt im Falle des Untermoduls
$$\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid 2 \cdot x_1 + x_2 = 0\} \oplus \bigl\{[2 \cdot x] \bigm| x \in \mathbb{Z}\bigr\} \subset \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$
durch.

2. Gehen Sie den Beweis von Korollar 2.5.2 Schritt für Schritt im Falle des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^{2017} \oplus \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ durch.

Aufgabe 2 (Elementarteiler). Bestimmen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} 10 \cdot T & 5 \cdot T^2 + 5 \cdot T \\ -15 \cdot T^2 & 5 \cdot T^3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}\bigl(\mathbb{Q}[T]\bigr)$$

$$\begin{pmatrix} T & T+1 \\ T^2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}\bigl(\mathbb{F}_2[T]\bigr)$$

Aufgabe 3 (lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}$).

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit
$$-x_1 + 2017 \cdot x_3 = 0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 = 42.$$

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit
$$x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = 5 \quad \text{und} \quad 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = 2.$$

Aufgabe 4 (Wiederholung). Fassen Sie alles zusammen, was Sie bereits über Moduln zu Endomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen wissen.

---

keine Abgabe!