Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 6 vom 29. Mai 2017

Aufgabe 1 (universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** Überprüfen Sie jeweils, ob es einen $\mathbb{Q}$-Algebrenhomomorphismus $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt!

1. Es gilt $f(T) = -T$ und $f(T^2) = T^2$.
2. Es gilt $f(T) = T$ und $f(T^2) = -T^2$.
3. Es gilt $f(T) = 2017 \cdot T^3$.
4. Es gilt $f(T^3) = T$.

Aufgabe 2 (Untermoduln)**.** Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind Untermoduln von $\mathbb{Z}$?

1. $\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{2017 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{2017 \cdot n + 5 \cdot m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
4. $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists_{p \in \mathbb{Q}[T]} \quad p(n) = 0\}$

Aufgabe 3 (Modul zu einem Endomorphismus)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie im Modul $\mathbb{R}^2[f]$ die folgenden Terme:

1. $1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $T^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $(T - 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $(T - 1)^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (Wozu?)**.** Warum befassen wir uns im Augenblick mit Modultheorie? Warum ist dafür auch Ringtheorie nötig?

---

keine Abgabe!