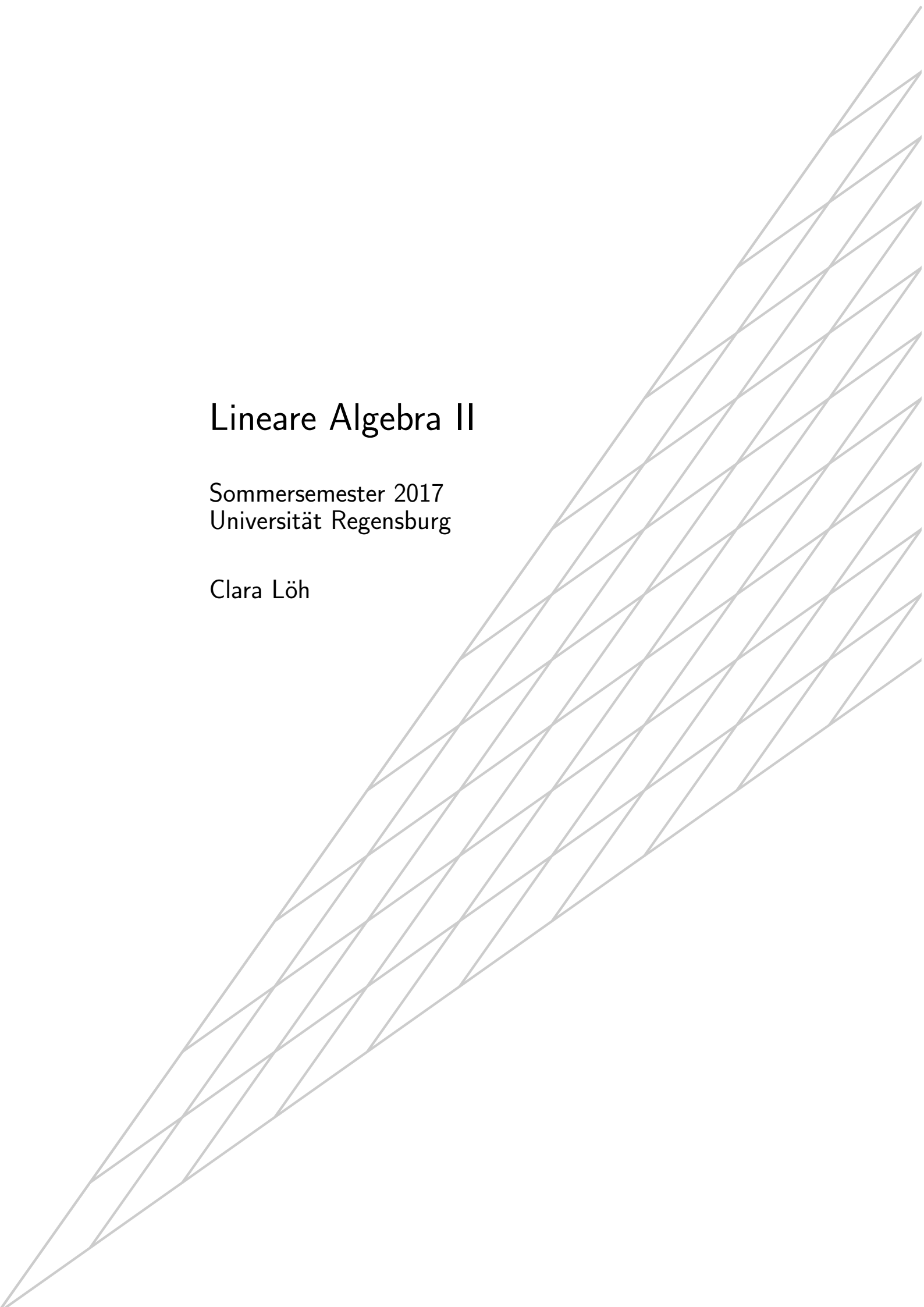
Lineare Algebra II

Sommersemester 2017
Universität Regensburg

Clara Löh



Version vom 27. Juli 2017
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg
©Clara Löh, 2017

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise vii

0 Einführung 1

1 Euklidische/Unitäre Vektorräume 3
- 1.1 Euklidische und unitäre Vektorräume 4
  - 1.1.1 Bilinearformen und Skalarprodukte 5
  - 1.1.2 Längen und Winkel 8
  - 1.1.3 Lineare Isometrien 14
  - 1.1.4 Matrizenkalkül für Bilinearformen 17
  - 1.1.5 Matrizenkalkül für Sesquilinearformen 21
- 1.2 Orthogonalität 22
  - 1.2.1 Orthogonale Vektoren 22
  - 1.2.2 Orthonormalbasen 23
  - 1.2.3 Die orthogonale Gruppe 29
- 1.3 Spektralsätze 35
  - 1.3.1 Selbstadjungierte Endomorphismen 35
  - 1.3.2 Der Spektralsatz 37
  - 1.3.3 Hauptachsentransformation 43
  - 1.3.4 Der Trägheitssatz und die Signatur 45

2 Normalformen II: Moduln über Hauptidealringen 49
- 2.1 Zerlegung von Endomorphismen und Moduln 50
- 2.2 Ringe 52
  - 2.2.1 Ringe 52
  - 2.2.2 Ringhomomorphismen 54

2.3 Moduln 57
2.3.1 Moduln 57
2.3.2 Modulhomomorphismen 61
2.3.3 Ideale 63
2.3.4 Quotientenmoduln 64
2.3.5 Direkte Summen 68
2.4 Hauptidealringe 73
2.4.1 Hauptidealringe 73
2.4.2 Euklidische Ringe 74
2.4.3 Teilbarkeit und Primfaktoren 77
2.4.4 Der größte gemeinsame Teiler 83
2.5 Moduln über Hauptidealringen 87
2.5.1 Präsentationen von Moduln 88
2.5.2 Der Elementarteilersatz 90
2.5.3 Die Klassifikation endlich erzeugter Moduln 98

3 Normalformen III: Die Jordansche Normalform 107
3.1 Moduln zu Endomorphismen 108
3.1.1 Zerlegung von Endomorphismen: Modulversion 108
3.1.2 Zerlegung von Endomorphismen: Matrizenversion 110
3.2 Das Minimalpolynom 112
3.3 Die Jordansche Normalform 118
3.3.1 Vorbereitung: Algebraisch abgeschlossene Körper 120
3.3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform 121
3.3.3 Berechnung der Jordanschen Normalform 123
3.3.4 Anwendungen der Jordanschen Normalform 134

4 Multilineare Algebra 137
4.1 Das Tensorprodukt 138
4.1.1 Wozu das Tensorprodukt? 138
4.1.2 Rechnen mit Tensorprodukten 141
4.1.3 Anwendungen des Tensorprodukts 145
4.1.4 Konstruktion des Tensorprodukts 151
4.2 Das äußere Produkt 153
4.2.1 Wozu das äußere Produkt? 153
4.2.2 Rechnen mit äußeren Produkten 155
4.2.3 Anwendungen des äußeren Produkts 160
4.2.4 Konstruktion des äußeren Produkts 165

A Anhang A 1
A.1 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus A 3
A.2 Kategorien A 5
A.3 (Ko)Produkte A 9
A.4 Funktoren A 11
A.5 Differentialformen A 15
A.6 Die LA-Matrix A 19

B Übungsblätter B 1

C Fingerübungen C 1

D Allgemeine Hinweise D 1

Literaturverzeichnis C 1

Literaturhinweise

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

Lineare Algebra

- S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014.
- G. Fischer. *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger*, 18. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- K. Jänich. *Lineare Algebra*, 11. Auflage, Springer, 2013.
- W. Klingenberg. *Lineare Algebra und Geometrie*, Hochschultext, Springer, 1984.
- S. Lang. *Linear Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3. Auflage, Springer, 1987.

Sonstige Grundlagen

- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
  http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-8348-9599-8
- A.G. Konforowitsch. *Logischen Katastrophen auf der Spur*, zweite Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1994.
- C. Löh, S. Krauss, N. Kilbertus. *Quod erat knobelandum*, Springer Spektrum, 2016.

- G. Polya, J.H. Conway (Hrsg.). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2014.
- T. Tao. *Solving mathematical problems. A personal perspective*, Oxford University Press, 2006.

Weiterführende Literatur

- K. Jänich. *Vektoranalysis*, fünfte Auflage, Springer, 2005.
- S. Lang. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, dritte überarbeitete Auflage, Springer, 2002.
- S. Lang. *Real and Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 142, dritte Auflage, Springer, 1993.
- W. Rudin. *Functional Analysis*, zweite Auflage, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1991.

0
Einführung

Die Algebra befasst sich mit der abstrakten Struktur allgemeiner „Zahlenbereiche“. Eine besonders einfache und zugängliche Art solcher Strukturen sind lineare Strukturen, d.h. Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Wie wir bereits in der Linearen Algebra I gesehen haben, treten lineare Strukturen an vielen verschiedenen Stellen auf:

- Lösung linearer Gleichungssysteme,
- elementare ebene und räumliche Geometrie,
- Computergeometrie und dreidimensionale Modellierung,
- geschlossene Darstellung kombinatorischer Phänomene,
- als zentraler Approximationsbaustein in der Analysis,
- als erste Abstraktionsstufe in der Algebra,
- ...

Warum noch mehr Lineare Algebra?

Wir werden in der Vorlesung Lineare Algebra II die folgenden Themen behandeln und an passender Stelle auch Ausblicke auf Anwendungen geben:

- **Euklidische und unitäre Vektorräume.** Mithilfe der Methoden der Linearen Algebra lassen sich viele Aspekte der zwei- bzw. dreidimensionalen Geometrie gut beschreiben und berechnen. Zum Beispiel erhält man so einen rechnerischen Zugang zur Elementargeometrie.

- **Normalformen von Endomorphismen.** Wir werden die Existenz der Jordanschen Normalform beweisen und untersuchen, wie man diese vernünftig berechnen kann. Zum Beispiel ist dies bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme ein wichtiges Hilfsmittel.
- **Multilineare Algebra.** Wir werden die Grundlagen der multilinearen Algebra kennenlernen, wie zum Beispiel Tensorprodukte und äußere Produkte. Konstruktionen dieser Art treten zum Beispiel bei der Betrachtung der Geometrie gekrümmter Räume, sogenannter Mannigfaltigkeiten, auf.

Anmerkung für Lehramtsstudenten. Auf ganz natürliche Weise werden wir dabei Begriffen und Themen aus der Schulmathematik begegnen und diese vertiefen sowie auch Aspekten der Mathematik, die in Zukunft Bestandteil der Schulmathematik werden könnten. Wichtiger als die Beherrschung des aktuellen Lehrplans ist es, ein solides Fundament zu erlernen, das es erlaubt, Mathematik inhaltlich korrekt, nachvollziehbar und souverän zu lehren und auf das der Unterricht im Rahmen des aktuellen und der zukünftigen Lehrpläne aufbauen kann.

Anmerkung zum Lernen. Dieses Skript dokumentiert die in der Vorlesung behandelten Inhalte. Es dient keineswegs dazu, den Besuch der Vorlesung oder gar der Übungen zu ersetzen. Außerdem spiegelt sich in diesem Skript natürlich nur ein kleiner Ausschnitt der Linearen Algebra wider. Sie sollten sich unbedingt auch mithilfe anderer Quellen (Bücher!) selbst ein Bild des gesamten Gebietes machen! Referenzen der Form „Satz I.6.4.11“ verweisen auf die entsprechende Stelle im Skript zur Linearen Algebra I:

http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/linalg1_ws1617/lecture_notes.pdf

Wie der Name der Vorlesung bereits andeutet, ist es unabdingbar, die Inhalte der Linearen Algebra I zu beherrschen, um die Lineare Algebra II verstehen zu können. Lücken in der Linearen Algebra I sollten Sie also zügig füllen.

1

Euklidische/Unitäre Vektorräume

Wir haben bereits gesehen, dass die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ geeignet sind, um Situationen der ebenen bzw. räumlichen Geometrie zu modellieren. Wir werden dies im folgenden vertiefen und erklären, wie man mithilfe von sogenannten Skalarprodukten grundlegende geometrische Größen wie Längen und Winkel beschreiben kann. Insbesondere werden wir den Orthogonalitätsbegriff und Isometrien von $\mathbb{R}^n$ eingehend untersuchen sowie Spektralsätze herleiten, die in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle spielen.

Überblick über dieses Kapitel.

1.1	Euklidische und unitäre Vektorräume	4
1.2	Orthogonalität	22
1.3	Spektralsätze	35

Schlüsselbeispiel. euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ via Standardskalarprodukt; Spiegelungen bzw. Drehungen in $\mathbb{R}^n$; Kegelschnitte

1.1 Euklidische und unitäre Vektorräume

Wir werden uns im folgenden mit der Geometrie reeller bzw. komplexer Vektorräume befassen; daher werden wir uns meistens auf die Grundkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ einschränken. Die fundamentale geometrische Größe in $\mathbb{R}^n$ ist der euklidische Abstand eines Punktes vom Ursprung; dieser ist in Anlehnung an den Satz von Pythagoras durch folgende Abbildung (die *euklidische Norm*) definiert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \end{aligned}$$

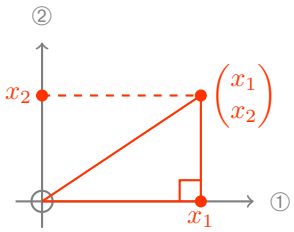


Abbildung 1.1.: Der Abstand vom Ursprung und der Satz von Pythagoras

Selbst wenn man die Wurzel ignoriert, ist diese Abbildung weit davon entfernt, linear zu sein. Mit einem kleinen Trick wird diese Abbildung jedoch zugänglich für die Methoden aus der linearen Algebra: Statt der Abbildung $\|\cdot\|_2$ betrachten wir allgemeiner die, zunächst komplizierter wirkende, Abbildung (das *Standardskalarprodukt*)

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j. \end{aligned}$$

Auch diese Abbildung ist nicht linear im eigentlichen Sinne, aber immerhin bilinear (d.h. linear in jedem Argument). Und wegen

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle_2}$$

ist es plausibel, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ geeignet ist, um euklidische Abstände zu untersuchen. Auch wenn unser Hauptinteresse dieser konkreten Abbildung gilt, ist es sinnvoll, die Theorie allgemeiner für sogenannte Skalarprodukte aufzuziehen.

1.1.1 Bilinearformen und Skalarprodukte

Wir führen zunächst die grundlegenden Begriffe für Skalarprodukte ein.

Definition 1.1.1 (Bilinearform, Symmetrie)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

- Eine *Bilinearform auf V* ist eine bilineare Abbildung $V \times V \longrightarrow K$. Eine Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt dabei *bilinear*, wenn für jedes $x \in V$ die Abbildungen

$$b(\,\cdot\,, x)\colon V \longrightarrow K$$
$$b(x, \,\cdot\,)\colon V \longrightarrow K$$

  (über K) linear sind.

- Eine Bilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$b(x, y) = b(y, x)$$

  für alle $x, y \in V$ gilt.

Anmerkung zum Lernen. In der Linearen Algebra bezeichnen ... formen im Normalfall Abbildungen, deren Wertebereich im Grundkörper liegt.

Erinnern Sie sich noch an die Eigenschaften von Determinanten? Vergleichen Sie diese mit der obigen Definition!

Definition 1.1.2 (Definitheit)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Die Bilinearform b heißt

positiv definit,	wenn: $\forall_{x \in V \setminus \{0\}} \quad b(x, x) > 0$.
negativ definit,	wenn: $\forall_{x \in V \setminus \{0\}} \quad b(x, x) < 0$.
positiv semidefinit,	wenn: $\forall_{x \in V} \quad b(x, x) \geq 0$.
negativ semidefinit,	wenn: $\forall_{x \in V} \quad b(x, x) \leq 0$.
indefinit,	wenn es $x, y \in V$ mit $b(x, x) > 0$ und $b(y, y) < 0$ gibt.

Definition 1.1.3 (Skalarprodukt)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt auf V* ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V.

Der Name „Skalarprodukt“ erinnert daran, dass die Werte Skalare (d.h. Elemente aus dem Grundkörper) sind. Dies darf natürlich nicht mit der Skalarmultiplikation (aus der Vektorraumstruktur) verwechselt werden!

Caveat 1.1.4. Skalarprodukte werden oft durch spitze Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notiert. In LaTeX sollte das auf keinen Fall durch die binären Operatoren „<“ bzw. „>“ dargestellt werden, sondern immer durch vernünftige Klammern, wie zum Beispiel \langle und \rangle (aus dem Paket amsmath).

Beispiel 1.1.5.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j = x^{\mathsf{T}} \cdot y \end{aligned}$$

  ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$.

  Dass es sich dabei tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt, ist schnell nachgerechnet: Die Bilinearität folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition I.4.2.11). Die Symmetrie folgt aus der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ und die positive Definitheit aus der Tatsache, dass Quadrate von reellen Zahlen ungleich Null stets positiv sind.

- Analog erhält man, indem man Summieren durch allgemeine Integration ersetzt, das L^2-Skalarprodukt auf gewissen Funktionenräumen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} C\big([0,1], \mathbb{R}\big) \times C\big([0,1], \mathbb{R}\big) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx \end{aligned}$$

  ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C([0,1], \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ (nachrechnen).

  Auf ähnliche Weise erhält man auch ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren Folgen (s. Analysis II).

Würde man auf $\mathbb{C}^n$ analog zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ eine bilineare Abbildung definieren, so erhielte man natürlich keine positive Definitheit (da Quadrate komplexer Zahlen im allgemeinen keine positiven reellen Zahlen sind). Daher bringt man die komplexe Konjugation ins Spiel. Dies führt zu den folgenden Definitionen:

Definition 1.1.6 (hermitesches Skalarprodukt)**.** Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein *hermitesches Skalarprodukt auf* V ist eine hermitesche,[1] positiv definite Sesquilinearform auf V. Die Begriffe haben dabei die folgende Bedeutung:

[1] benannt nach Charles Hermite (1822–1901), einem französischen Mathematiker

- Eine Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine *Sesquilinearform*, wenn für jedes $x \in V$ die Abbildung

$$b(x, \cdot)\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$-linear ist und die Abbildung

$$b(\cdot, x)\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{R}$-linear ist und

$$\forall_{y \in V} \quad \forall_{\lambda \in \mathbb{C}} \quad b(\lambda \cdot y, x) = \overline{\lambda} \cdot b(y, x)$$

erfüllt.

- Eine Sesquilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ist *hermitesch*, wenn

$$\forall_{x,y \in V} \quad b(x, y) = \overline{b(y, x)}$$

gilt; dabei ist $\overline{\cdot}$ die komplexe Konjugation. Insbesondere gilt in diesem Fall für alle $x \in V$, dass $b(x, x) = \overline{b(x, x)}$ ist, d.h., dass $b(x, x)$ reell ist.

- Eine hermitesche Sesquilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv definit*, wenn

$$\forall_{x \in V \setminus \{0\}} \quad b(x, x) > 0.$$

Caveat 1.1.7. In manchen Quellen wird komplexe Linearität im ersten Argument und konjugierte Linearität im zweiten Argument gefordert. Dies führt natürlich letztendlich zur selben Theorie. Wir haben uns für die obige Variante entschieden, da diese gut mit dem Operator $\cdot^{\mathsf{H}}$ (s.u.) kompatibel ist.

Beispiel 1.1.8.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_2\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot y_j = (\overline{x})^{\mathsf{T}} \cdot y = x^{\mathsf{H}} \cdot y \end{aligned}$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, nämlich das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$. Dabei bezeichnet A^{H} für komplexe Matrizen A die Matrix, die man erhält, indem man A transponiert und alle Koeffizienten komplex konjugiert.

Dass es sich dabei tatsächlich um ein hermitisches Skalarprodukt handelt, ist schnell nachgerechnet: Die Sesquilinearität folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition I.4.2.11) und der komplexen Konjugation. Dass die Abbildung hermitesch ist, folgt aus der

Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ und der Multiplikativität der komplexen Konjugation. Die positive Definitheit erhalten wir aus der Tatsache, dass $\overline{x} \cdot x = (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2$ für jede komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ eine Summe reeller Quadrate ist und Quadrate von reellen Zahlen ungleich Null stets positiv sind.

- Analog erhält man, indem man Summieren durch allgemeine Integration ersetzt, das L^2-Skalarprodukt auf gewissen Funktionenräumen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} C\big([0,1],\mathbb{C}\big) \times C\big([0,1],\mathbb{C}\big) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx \end{aligned}$$

  ein hermitesches Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $C([0,1],\mathbb{C})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (nachrechnen).

  Auf ähnliche Weise erhält man auch ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{C})$ der quadratsummierbaren komplexwertigen Folgen (s. Analysis II).

Definition 1.1.9 (euklidischer/unitärer Vektorraum)**.**

- Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V.
- Ein *unitärer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einem hermiteschen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1.1.2 Längen und Winkel

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Ziel zurück, nämlich zur Beschreibung geometrischer Größen wie Längen und Winkel. Wir beginnen mit Längen bzw. Abständen; diese Begriffe passen in den Kontext normierter Vektorräume, wobei Normen gerade die „Länge“ von Vektoren (d.h. den Abstand zum Nullpunkt) messen.

Definition 1.1.10 (Norm, normierter Vektorraum)**.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Norm auf V* ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| \colon V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

  mit den folgenden Eigenschaften:
  - *Homogenität.* Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $x \in V$ ist

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

  - *Definitheit.* Für alle $x \in V$ ist $\|x\| \geq 0$ und Gleichheit tritt nur für $x = 0$ ein.
  - *Dreiecksungleichung.* Für alle $x, y \in V$ ist

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

- Ein *normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V.

Bemerkung 1.1.11 (Metriken aus Normen)**.** Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

eine Metrik auf V (nachrechnen). Insbesondere erhalten wir so auf normierten Vektorräumen auch eine Topologie (d.h. offene bzw. abgeschlossene Mengen) und einen Begriff von Kompaktheit bzw. Stetigkeit (s. Analysis I/II).

Definition 1.1.12 (induzierte Norm)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Dann definieren wir durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

die *von* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *induzierte Norm auf* V.

Um nachzuweisen, dass diese Konstruktion tatsächlich die Dreiecksungleichung erfüllt, verwenden wir das folgende Hilfsmittel:

Satz 1.1.13 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit induzierter „Norm“ $\|\cdot\|$ und seien $x, y \in V$. Dann gilt*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Ist $y = 0$, so sieht man leicht, dass die Behauptung gilt. Im folgenden nehmen wir daher $y \neq 0$ an. Die Idee ist, den Term $\langle x - \lambda \cdot y, x - \lambda \cdot y\rangle$ (der ja nicht-negativ ist!) für ein geeignetes λ besser zu verstehen. Wir betrachten dazu

$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \in \mathbb{C};$$

im euklidischen Fall ist dabei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt (sowohl im euklidischen als auch im unitären Fall!)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x - \lambda \cdot y, x - \lambda \cdot y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle x, \lambda \cdot y \rangle - \langle \lambda \cdot y, x \rangle + \langle \lambda \cdot y, \lambda \cdot y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot \langle y, y \rangle - \lambda \cdot \langle x, y \rangle - \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle x, y \rangle} \\
&= \|x\|^2 + \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \big|\langle x, y \rangle\big|^2 - 2 \cdot \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \big|\langle x, y \rangle\big|^2 \\
&= \|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \big|\langle x, y \rangle\big|^2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\big|\langle x, y \rangle\big|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2,$$

wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$ ist. Man rechnet leicht nach, dass letztere Bedingung dazu äquivalent ist, dass x und y linear abhängig sind (Übungsaufgabe; diese Rechnung erklärt insbesondere auch, wie man auf die Definition von λ kommt ...). Aus dieser Ungleichung folgt mit der Monotonie der Wurzel und der Positivität von $\|\cdot\|$ die gewünschte Ungleichung. □

Korollar 1.1.14 (Normen aus Skalarprodukten)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer [oder unitärer] Vektorraum mit induzierter „Norm“ $\|\cdot\|$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V.*

Beweis. Homogenität und Definitheit folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften des (hermiteschen) Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es bleibt also die Dreiecksungleichung zu zeigen: Seien $x, y \in V$. Dann ist (sozusagen die binomische Formel für Skalarprodukte)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Da $\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2 \cdot \mathrm{Re}\langle x, y \rangle$ reell ist und nach oben durch $2 \cdot |\langle x, y \rangle|$ beschränkt ist, folgt daraus

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \big|\langle x, y \rangle\big| + \|y\|^2.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz 1.1.13) erhalten wir somit

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.$$

Mit der Monotonie der Wurzel und Positivität der Abbildung $\|\cdot\|$ folgt daraus $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, wie gewünscht. □

Beispiel 1.1.15 (euklidische Norm)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann schreiben wir $\|\cdot\|_2$ für die von $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Norm und bezeichnen diese als *euklidische Norm auf* $\mathbb{R}^2$.

Falls eine Norm von einem Skalarprodukt induziert wird, so kann man das Skalarprodukt aus der Norm zurückgewinnen:

Proposition 1.1.16 (Polarisierung). *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm auf V.*

1. *Im euklidischen/reellen Fall gilt für alle $x, y \in V$:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

2. *Im unitären/komplexen Fall gilt für alle $x, y \in V$:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \cdot \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4} \cdot \left(\|x+i\cdot y\|^2 - \|x-i\cdot y\|^2\right)$$

Beweis. Dies folgt durch direktes Nachrechnen, indem man die Terme auf der rechten Seite durch das Skalarprodukt ausdrückt und aus„multipliziert“. □

Caveat 1.1.17 (Norm ohne Skalarprodukt). Es gibt jedoch auch Normen, die *nicht* von Skalarprodukten induziert werden: Die Norm (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto |x_1| + |x_2| \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^2$ wird *nicht* von einem Skalarprodukt induziert: *Angenommen*, $\|\cdot\|_1$ wäre von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ induziert. Mit der Polarisierungsformel (Proposition 1.1.16) folgt dann für

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_1 &= \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 2^2 - 2^2) = -2 \\ \langle x, -y\rangle_1 &= \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 2^2 - 2^2) = -2 \neq -(-2), \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Also kann es ein solches Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ nicht geben.

Aus der Analysis ist bekannt, dass alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen im folgenden Sinne äquivalent sind (im unendlich-dimensionalen Fall stimmt das im allgemeinen *nicht*!):

Satz 1.1.18 (Äquivalenz von Normen im endlich-dimensionalen Fall). *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum und seien $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|'$ Normen auf V. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit*

$$\forall_{x\in V} \quad \frac{1}{C}\cdot\|x\| \le \|x\|' \le C\cdot\|x\|.$$

Insbesondere induzieren $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ dieselbe Topologie auf V (d.h. dieselben offenen/abgeschlossenen Mengen, dieselben stetigen Abbildungen, ...).

Beweis. Diese Aussage kann man durch den Vergleich mit der 1-Norm und ein Kompaktheitsargument beweisen (s. Analysis II). □

Ausblick 1.1.19 (Banachräume, Hilberträume, Funktionalanalysis)**.** Die Funktionalanalysis beschäftigt sich systematisch mit der Theorie der stetigen linearen Abbildungen auf (unendlich-dimensionalen) normierten Vektorräumen. Vollständige normierte Vektorräume bezeichnet man als *Banachräume*; vollständige euklidische/unitäre Vektorräume bezeichnet man als *Hilberträume*.

Zusätzlich zu Abständen/Längen liefern Skalarprodukte auch einen Winkelbegriff auf euklidischen Vektorräumen:

Definition 1.1.20 (Winkel)**.** Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$ und seien $x,y\in V$ mit $x\neq 0$ und $y\neq 0$. Dann ist der *Winkel zwischen x und y* definiert als

$$\sphericalangle(x,y) := \arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \in [0,\pi].$$

Dabei bezeichnet $\arccos\colon [-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$ die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$ (Analysis I, Anhang A.1). Man beachte, dass das Argument von arccos in der obigen Definition nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz 1.1.13) tatsächlich im Intervall $[-1,1]$ liegt.

Wie kommt man auf diese Definition von Winkeln bzw., warum liefert diese Definition einen sinnvollen Winkelbegriff? In der euklidischen Ebene entspricht die obige Definition der Beschreibung des Winkels mithilfe des Kosinussatzes. Außerdem stimmt die obige Definition mit der klassischen Anschauung von Winkeln über Bogenlängen überein (Abbildung 1.2):

Bemerkung 1.1.21 (klassische Anschauung)**.** Dazu betrachten wir in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mithilfe geeigneter Integrale kann man die Länge von (glatten) Kurven bestimmen (Analysis II). In diesem Fall erhält man für alle $\alpha\in[0,\pi]$

$$L(\gamma|_{[0,\alpha]}) = \int_0^\alpha \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2\,dt = \alpha = \arccos\Big(\frac{\cos\alpha+0}{1\cdot 1}\Big) = \sphericalangle\big(e_1,\gamma(\alpha)\big).$$

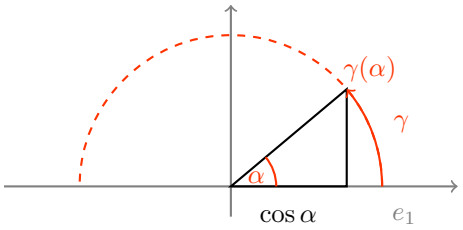


Abbildung 1.2.: Winkel, Bogenlänge und Ankathete

Anmerkung für Lehramtsstudenten (Winkel in der Schule)**.** Versuchen Sie zu verstehen, wie diese Begrifflichkeiten mit dem in der Schule unterrichteten Winkelbegriff zusammenhängen. Achten Sie dabei insbesondere darauf, welche mathematischen Konzepte dabei durch anschauliche Gegenstücke ersetzt werden!

Beispiel 1.1.22. In $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ gilt (so wie wir es auch aus der Anschauung erwarten würden)

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \arccos \frac{\langle e_1, e_2\rangle_2}{\|e_1\|_2 \cdot \|e_2\|_2} = \arccos 0 = \pi/2$$

und

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, e_1\right) = \arccos\cos\varphi = \varphi$$

für alle $\varphi \in [0, \pi]$.

Beispiel 1.1.23 (senkrechte Vektoren)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V \setminus \{0\}$. Nach Definition des Winkels gilt genau dann $\sphericalangle(x, y) = \pi/2$, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ ist. In diesem Fall nennt man die Vektoren x und y *orthogonal*. Dieses Konzept ist außerordentlich wichtig und wird ausführlich in Kapitel 1.2 behandelt.

Ausblick 1.1.24 (elementare ebene und räumliche Geometrie)**.** Wir haben nun im Prinzip alle Hilfsmittel beisammen, um die (elementare) ebene und räumliche Geometrie mithilfe der euklidischen Vektorräume $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ bzw. $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ zu modellieren und zu entwickeln. Zum Beispiel könnte man nun die Begriffe „Dreieck“ und „Kreis“ definieren und die Standardsätze darüber beweisen (z.B. die Invarianz der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken etc.) [8]. Wir werden uns im folgenden jedoch auf andere Aspekte konzentrieren.

1.1.3 Lineare Isometrien

Wir erinnern uns daran, dass zu einer mathematischen Theorie nicht nur Objekte, sondern immer auch strukturerhaltende Morphismen gehören. Im Fall der euklidischen/unitären Vektorräume sind dies die (linearen) Isometrien.

Definition 1.1.25 (lineare isometrische Einbettung, lineare Isometrie)**.** Seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(V', \|\cdot\|')$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Eine *lineare isometrische Einbettung* $(V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V', \|\cdot\|')$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow V'$, die

  $$\forall_{x \in V} \quad \big\|f(x)\big\|' = \|x\|$$

  erfüllt.

- Eine *lineare Isometrie* $(V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V', \|\cdot\|')$ ist eine lineare isometrische Einbettung $f\colon V \longrightarrow V'$, für die es eine lineare isometrische Einbettung $g\colon V' \longrightarrow V$ mit

  $$f \circ g = \mathrm{id}_{V'} \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_V$$

  gibt.

Bemerkung 1.1.26 (alternative Charakterisierung linearer Isometrien)**.** Jede lineare isometrische Einbettung ist injektiv (nachrechnen). Lineare isometrische Einbettungen zwischen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind also genau dann Isomorphismen, wenn die beiden Vektorräume dieselbe Dimension haben (Korollar I.4.4.15). Da in diesem Fall die inverse Abbildung auch automatisch eine isometrische Einbettung ist (nachrechnen), folgt: Lineare isometrische Einbettungen zwischen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind genau dann (lineare) Isometrien, wenn die beiden Vektorräume dieselbe Dimension haben.

Beispiel 1.1.27 (Isometrien in der euklidischen Ebene)**.**

- *Drehungen.* Wir erinnern kurz an die Rotationsmatrizen: Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und sei

  $$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

  Dann ist $L(R(\varphi))\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Rotation um φ um den Nullpunkt (Abbildung 1.3).

  Die Abbildung $L(R(\varphi))\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist isometrisch bezüglich $\|\cdot\|_2$, denn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}\|R(\varphi)\cdot x\|_2^2 &= \left\|\begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot x_1-\sin\varphi\cdot x_2\\ \sin\varphi\cdot x_1+\cos\varphi\cdot x_2\end{pmatrix}\right\|_2^2\\ &= \cos^2\varphi\cdot x_1^2-2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot x_1\cdot x_2+\sin^2\varphi\cdot x_2^2\\ &+\sin^2\varphi\cdot x_1^2+2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot x_1\cdot x_2+\cos^2\varphi\cdot x_2^2\\ &= (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\cdot(x_1^2+x_2^2)\\ &= x_1^2+x_2^2=\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

- *Spiegelungen.* Die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}\cdot e_2$ wird durch die Matrix
$$S:=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
beschrieben. Die Abbildung $L(S)\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ist isometrisch bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$, denn für alle $x\in\mathbb{R}^2$ ist
$$\|S\cdot x\|_2^2=\left\|\begin{pmatrix}-x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\|_2^2=x_1^2+x_2^2=\|x\|_2^2.$$

- *Translationen.* Sei $a\in\mathbb{R}^2$ und sei
$$\begin{aligned}f\colon\mathbb{R}^2&\longrightarrow\mathbb{R}^2\\ x&\longmapsto x+a\end{aligned}$$
die zugehörige Translationsabbildung. Dann ist f *nicht* linear, aber im folgenden Sinne abstandserhaltend bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Metrik: Für alle $x,y\in\mathbb{R}^2$ gilt
$$\big\|f(x)-f(y)\big\|_2=\|x-y\|_2.$$

- *Streckungen.* Streckungs-/Skalierungsabbildungen sind im allgemeine *keine* linearen Isometrien: Sei $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann ist die Streckungsabbildung
$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2&\longrightarrow\mathbb{R}^2\\ x&\longmapsto\lambda\cdot x\end{aligned}$$
ein Isomorphismus und genau dann isometrisch bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$, wenn $|\lambda|=1$ ist.

Bemerkung 1.1.28 (allgemeine euklidische Isometrien)**.** Sei $n\in\mathbb{N}$ und sei $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die isometrisch bezüglich des euklidischen Abstands ist, die also
$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n}\quad\big\|f(x)-f(y)\big\|_2=\|x-y\|_2$$

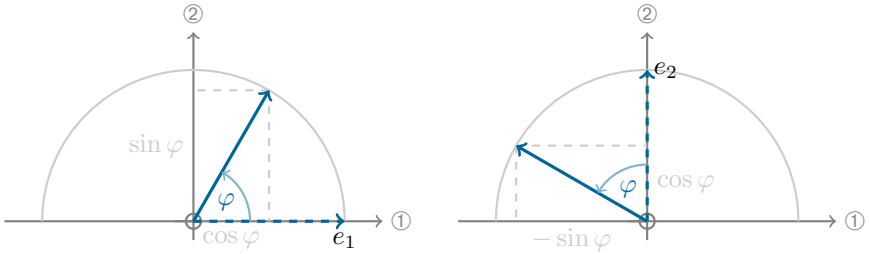


Bild von e_1 Bild von e_2

Abbildung 1.3.: Zusammenhang zwischen Rotation und Rotationsmatrix

erfüllt. Dann ist f bereits affin linear, d.h. die „verschobene“ Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) - f(0) \end{aligned}$$

ist $\mathbb{R}$-linear (und eine lineare Isometrie in unserem Sinne). Der Beweis dieser Tatsache ist elementar [8, Satz 2.5.1], würde uns aber von unseren eigentlichen Zielen zu weit entfernen. Es ist daher auch geometrisch (nicht nur aus dem Blickwinkel der Linearen Algebra) sinnvoll, sich auf lineare Isometrien einzuschränken.

Wir haben bisher nur Strukturerhaltung bezüglich der Norm gefordert. Im euklidischen und unitären Fall könnte man auch noch verlangen, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt. Tatsächlich muss man dies nicht zusätzlich verlangen, da dank Polarisierung der folgende Starrheitssatz gilt:

Proposition 1.1.29 (Isometrien sind winkeltreu)**.** *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(V', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ euklidische Vektorräume und sei $f\colon V \longrightarrow V'$ eine lineare Isometrie bezüglich den induzierten Normen. Dann gilt*

$$\forall_{x,y\in V\setminus\{0\}} \quad \sphericalangle\big(f(x), f(y)\big) = \sphericalangle(x, y).$$

Beweis. Seien $x, y \in V \setminus \{0\}$. Da f ein Isomorphismus ist, ist dann auch $f(x) \neq 0$ und $f(y) \neq 0$; insbesondere ist der Winkel $\sphericalangle(f(x), f(y))$ definiert. Mithilfe von Polarisierung (Proposition 1.1.16) und der Isometrieeigenschaft folgt

$$\big\langle f(x), f(y)\big\rangle' = \langle x, y\rangle.$$

Die Definition des Winkels durch das Skalarprodukt bzw. die Norm liefert dann, dass $\sphericalangle\big(f(x), f(y)\big) = \sphericalangle(x, y)$. □

Ein Spezialfall der Isomorphismen sind Automorphismen. Im Fall der linearen Isometrien erhält man so die Symmetriegruppe:

Definition 1.1.30 (Isometriegruppe)**.** Sei $(V, \|\cdot|)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\mathrm{Isom}\big(V, \|\cdot\|\big) := \big\{ f \mid f\colon (V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V, \|\cdot\|) \text{ ist eine lineare Isometrie} \big\}$$

eine Gruppe bezüglich Abbildungskomposition (nachrechnen), die *Isometriegruppe von* $(V, \|\cdot\|)$.

Wir werden in Kapitel 1.2.3 die Isometriegruppen der Anschauungsräume $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ bzw. $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ mithilfe des Orthogonalitätsbegriffs systematisch untersuchen und explizit beschreiben. Aufbauend darauf könnte man zum Beispiel die Symmetriegruppen der platonischen Körper explizit berechnen.

1.1.4 Matrizenkalkül für Bilinearformen

Es stellt sich nun die natürliche Frage, wie man die Menge aller Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ oder allgemeiner der Bilinearformen (mit gewissen Eigenschaften) gut beschreiben und klassifizieren kann. Als ersten Schritt in diese Richtung überlegen wir uns, wie man diese Fragestellungen in der Sprache von Matrizen ausdrücken kann.

Da es etwas unübersichtlich ist, den reellen und den komplexen Fall gleichzeitig zu behandeln, konzentrieren wir uns zuerst auf den reellen Fall und geben im Anschluss die entsprechenden Resultate im komplexen Fall an (Kapitel 1.1.5).

Bemerkung 1.1.31 (der Raum der Bilinearformen)**.** Ist V ein Vektorraum über einem Körper K, so schreiben wir $\mathrm{Bil}_K(V)$ für die Menge aller Bilinearformen auf V. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation bildet $\mathrm{Bil}_K(V)$ einen K-Vektorraum (nachrechnen).

Bilinearformen lassen sich wie folgt durch Matrizen darstellen, unter Verwendung der Notation aus (Korollar I.4.3.3 und Kapitel I.5).

Proposition 1.1.32 (Bilinearformen aus Matrizen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Dann sind*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Bil}_K(V) &\longrightarrow M_{n\times n}(K) \\ b &\longmapsto M_C(b) := \big(b(c_j, c_k)\big)_{j,k\in\{1,\ldots,n\}}, \\ \psi\colon M_{n\times n}(K) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_K(V) \\ A &\longmapsto B_C(A) \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen. Dabei verwenden wir die folgende Notation: Für $A \in M_{n\times n}(K)$ sei

$$\begin{aligned} B_C(A)\colon V \times V &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto T_{C,E_n}(x)^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(y). \end{aligned}$$

Beweis. Zu φ: Eine einfache Rechnung zeigt, dass φ linear ist.

Zu ψ: Ist $A \in M_{n\times n}(K)$, so zeigen dieselben Überlegungen wie bei der Definition des euklidischen Skalarproduktes, dass $B_C(A)$ eine Bilinearform auf V ist. Außerdem ist ψ linear (nachrechnen).

Zu $\varphi \circ \psi$: Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann ist $\varphi \circ \psi(A) = A$, denn: Für alle $j,k \in \{1,\dots,n\}$ ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \big(\varphi \circ \psi(A)\big)_{j,k} &= \big(T_{C,E_n}(c_j)\big)^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(c_k) \\ &= e_j^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot e_k = A_{j,k} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass Matrixmultiplikation mit den Standardeinheitsvektoren Zeilen bzw. Spalten extrahiert (Beispiel I.4.2.9).

Zu $\psi \circ \varphi$: Sei $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$. Dann ist $\psi \circ \varphi(b) = b$, denn: Aufgrund der Bilinearität von $\psi \circ \varphi(b)$ und b genügt es zu zeigen, dass diese beiden Abbildungen auf Paaren von Basisvektoren aus C übereinstimmen. Für alle $j,k \in \{1,\dots,n\}$ gilt nach Konstruktion

$$\big(\psi \circ \varphi(b)\big)(c_j,c_k) = e_j^{\mathsf{T}} \cdot M_C(b) \cdot e_k = \big(M_C(b)\big)_{j,k} = b(c_j,c_k).$$

Auch dabei haben wir wieder verwendet, dass Matrixmultiplikation mit den Standardeinheitsvektoren Zeilen bzw. Spalten extrahiert. □

Beispiel 1.1.33 (Standardskalarprodukt)**.** Sei K ein Körper. Ist $V = K^n$ und $C = E_n$ die Standardbasis, so schreiben wir kurz $M(b) := M_{E_n}(b)$ und $B(A) := B_{E_n}(A)$. Die Definition von $B(A)$ vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} B(A)\colon K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot y. \end{aligned}$$

Ist $K = \mathbb{R}$, so ist $B(I_n)$ nichts anderes als das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

In Analogie zu Proposition I.5.1.20 und Korollar I.5.1.21 erhalten wir:

Proposition 1.1.34 (Basiswechsel und Matrizen von Bilinearformen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$, sei C eine Basis von V und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit*
$$A = S^{\mathsf{T}} \cdot M_C(b) \cdot S.$$
2. *Es gibt eine Basis D von V mit $A = M_D(b)$.*

Beweis. Wir machen zunächst eine Vorüberlegung zum Basiswechsel: Ist D eine Basis von V und ist $S := M_{D,C} \in \mathrm{GL}_n(K)$ die zugehörige Basiswechselmatrix, so erhalten wir

$$\begin{aligned} b(x,y) &= T_{C,E_n}(x)^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot T_{C,E_n}(y) \\ &= (S \cdot T_{D,E_n}(x))^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S \cdot T_{D,E_n}(y) \\ &= T_{D,E_n}(x)^\mathsf{T} \cdot \big(S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S\big) \cdot T_{D,E_n}(y) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in V$. Mit Proposition 1.1.32 (angewendet auf die Basis D) folgt aus dieser Gleichung die Basiswechselformel

$$M_D(b) = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S.$$

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1.*:* Es gebe eine Basis D von V mit $A = M_D(b)$. Die Vorüberlegung liefert $A = M_D(b) = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S$ für $S := M_{D,C} \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2.*:* Es gebe eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S$. Da S invertierbar ist, bilden die Spalten $(s_1, \ldots, s_n)$ von S eine Basis von K^n. Also ist

$$D := \big(T_{E_n,C}(s_1), \ldots, T_{E_n,C}(s_n)\big)$$

eine Basis von V und es gilt nach Konstruktion $M_{D,C} = S$ (nachrechnen!). Nach der Vorüberlegung ist somit $A = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S = M_D(b)$. □

Caveat 1.1.35. Man beachte, dass sich die Basiswechselformel für Matrizen zu Bilinearformen von der Basiswechselformel für Matrizen zu linearen Abbildungen signifikant unterscheidet! Im bilinearen Fall involviert die Transformation das *Transponierte* der Basiswechselmatrix, im linearen Fall das *Inverse*.

Beispiel 1.1.36 (Basiswechselwunder für Bilinearformen)**.** Wir betrachten die Bilinearform

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 5 \cdot x_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x_1 \cdot y_2 + 3 \cdot x_2 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$M_{E_2}(b) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Basis (nachrechnen!)

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$M_C(b) = M_C^\mathsf{T} \cdot M_{E_2}(b) \cdot M_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie im Fall linearer Abbildungen kann also auch bei der Betrachtung von Bilinearformen der Übergang zu einer anderen Basis die Untersuchung erheblich vereinfachen.

Mithilfe von Proposition 1.1.32 und Proposition 1.1.34 können wir statt mit Bilinearformen auch einfach mit Matrizen arbeiten. Es stellt sich daher die Frage, wie sich Eigenschaften von Bilinearformen in entsprechende Eigenschaften von Matrizen übersetzen.

Proposition 1.1.37 (Symmetriekriterium)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, sei C eine Basis und sei $b\colon V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform auf K. Dann ist b genau dann symmetrisch, wenn die Matrix $M_C(b)$ symmetrisch ist.*

Beweis. Ist b symmetrisch, so folgt aus der Definition von $M_C(b)$, dass die Matrix $M_C(b)$ symmetrisch ist.

Sei umgekehrt $A := M_C(b)$ symmetrisch. Da 1×1-Matrizen symmetrisch sind, gilt $b(x,y) = b(x,y)^\mathsf{T}$ für alle $x, y \in V$. Mit Proposition 1.1.32 und der Kompatibilität von Transponieren und Matrixmultiplikation (diese folgt durch direktes Nachrechnen oder mithilfe von Proposition I.5.1.16) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(x,y)^\mathsf{T} \\ &= \big(B_C(A)(x,y)\big)^\mathsf{T} \\ &= \big(T_{C,E_n}(x)^\mathsf{T} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(y)\big)^\mathsf{T} \\ &= T_{C,E_n}(y)^\mathsf{T} \cdot A^\mathsf{T} \cdot (T_{C,E_n}(x)^\mathsf{T})^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Da A nach Voraussetzung symmetrisch ist, folgt

$$\begin{aligned} b(x,y) &= T_{C,E_n}(y)^\mathsf{T} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(x) \\ &= B_C(A)(y,x) \\ &= b(y,x). \end{aligned}$$

Also ist b symmetrisch. □

Etwas komplizierter ist die Lage bei der Untersuchung von Definitheit.

Definition 1.1.38 (Definitheit von Matrizen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *positiv definit* wenn die Bilinearform $B(A)$ auf $\mathbb{R}^n$ positiv definit ist. Analog definert man negative Definitheit, ... für Matrizen.

Wir werden in Korollar 1.3.14 Kriterien kennenlernen, mit denen man überprüfen kann, ob eine gegebene symmetrische Matrix positiv definit ist.

Insbesondere folgern wir aus den obigen Betrachtungen: Um symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$ zu klassifizieren genügt es, symmetrische Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zu klassifizieren. Dies werden wir in Kapitel 1.3 genauer untersuchen. Die Klassifikation der Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ erfolgt in Kapitel 1.2.2.

1.1.5 Matrizenkalkül für Sesquilinearformen

Analog können wir im komplexen Fall verfahren:

Bemerkung 1.1.39 (der Raum der Sesquilinearformen)**.** Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so schreiben wir $\mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V)$ für die Menge aller Sesquilinearformen auf V. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation bildet $\mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V)$ einen $\mathbb{C}$-Vektorraum (nachrechnen).

Proposition 1.1.40 (Sesquilinearformen aus Matrizen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Dann sind*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V) &\longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ b &\longmapsto M_C(b) = \big(b(c_j, c_k)\big)_{j,k\in\{1,\ldots,n\}}, \\ \psi\colon M_{n\times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V) \\ A &\longmapsto B_C^{\mathbb{C}}(A) \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Dabei verwenden wir die folgende Notation: Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sei

$$\begin{aligned} B_C^{\mathbb{C}}(A)\colon V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto T_{C,E_n}(x)^{\mathsf{H}} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(y). \end{aligned}$$

Beweis. Dies zeigt man analog zu Proposition 1.1.32. □

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ erhält man in der obigen Notation als $B_{E_n}^{\mathbb{C}}(I_n)$.

Proposition 1.1.41 (Basiswechsel und Matrizen von Bilinearformen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei $b \in \mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V)$, sei C eine Basis von V und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit*
$$A = S^{\mathsf{H}} \cdot M_C(b) \cdot S.$$
2. *Es gibt eine Basis D von V mit $A = M_D(b)$.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum reellen Fall (Proposition 1.1.34). □

Das komplexe Analogon zu symmetrischen Matrizen sind die selbstadjungierten Matrizen.

Definition 1.1.42 (selbstadjungierte Matrix)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist *selbstadjungiert*, wenn $A^{\mathsf{H}} = A$ ist, d.h., wenn

$$\forall_{j,k\in\{1,\dots,k\}} \quad \overline{A_{k,j}} = A_{j,k}.$$

Proposition 1.1.43 (hermitesche Sesquilinearformen aus selbstadjungierten Matrizen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, sei C eine Basis von V und sei $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Dann ist b genau dann hermitesch, wenn die Matrix $M_C(b)$ selbstadjungiert ist.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum reellen Fall (Proposition 1.1.37), wobei wir statt Transponieren den Operator $\cdot^{\mathsf{H}}$ verwenden. □

1.2 Orthogonalität

Der Winkelbegriff (zu einem gegebenen Skalarprodukt) liefert insbesondere auch eine Definition von Orthogonalität. Wir werden im folgenden orthogonale Vektoren betrachten und zeigen, dass jeder euklidische Vektorraum eine sogenannte Orthonormalbasis besitzt. Solche Orthonormalbasen liefern in vielen Anwendungen bequeme Koordinaten.

1.2.1 Orthogonale Vektoren

In Beispiel 1.1.23 haben wir bereits gesehen, wie man den Winkel $\pi/2$ (der anschaulich zur Orthogonalität korrespondiert) mithilfe des Skalarprodukts charakterisieren kann. Es ist außerdem nützlich, diesen Begriff auch auf den Nullvektor zu verallgemeinern:

Definition 1.2.1 (orthogonal)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum.

- Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen *orthogonal*, falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch
$$x \perp y.$$
- Allgemeiner nennen wir Teilmengen $A, B \subset V$ *orthogonal* (und schreiben dann $A \perp B$), wenn
$$\forall_{x\in A} \quad \forall_{y\in B} \quad x \perp y.$$
- Ist $A \subset V$, so nennen wir
$$A^{\perp} := \{y \in V \mid \forall_{x\in A} \quad x \perp y\}$$
das *orthogonale Komplement von A*.

Bemerkung 1.2.2 (Nullvektor)**.** Aufgrund der positiven Definitheit von Skalarprodukten ist der Nullvektor (in einem euklidischen/unitären Vektorraum) der einzige Vektor, der zu allen anderen Vektoren orthogonal ist.

Dies hat die folgende Konsequenz: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $A \subset V$. Dann ist

$$A \cap A^\perp \subset \{0\},$$

denn: Sei $x \in A \cap A^\perp$. Insbesondere ist $x \perp x$, und damit $x = 0$. Wir werden diese Aussage in Korollar 1.2.13 verfeinern.

Beispiel 1.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt in $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$e_j \perp e_k \iff j \neq k$$

Außerdem gilt zum Beispiel, dass e_1 *nicht* zu $e_1 + e_2$ orthogonal, aber es ist $(e_1 + e_2) \perp (e_1 - e_2)$. Außerdem ist

$$\{e_1\}^\perp = (\mathbb{R} \cdot e_1)^\perp = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_2, \ldots, e_n\}.$$

Bemerkung 1.2.4 (Orthogonalität und Abstände)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum mit induzierter Norm $\| \cdot \|$ und seien $x, y \in V$ mit $x \perp y$. Dann gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(nachrechnen!). Der Satz des Pythagoras ist also in die Definition des Skalarprodukts bzw. der induzierten Norm eingebaut.

1.2.2 Orthonormalbasen

In euklidischen bzw. unitären Vektorräumen ist es oft nützlich, statt allgemeiner Basen sogenannte Orthonormalbasen zu betrachten.

Definition 1.2.5 (Orthonormalbasis)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum.

1. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist ein *Orthonormalsystem*, wenn

   $$\forall_{i,j \in I} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$$

   (d.h. alle Vektoren der Familie haben Länge 1 und die Vektoren stehen alle orthogonal aufeinander).

2. Eine *Orthonormalbasis von* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Basis von V, die ein Orthonormalsystem ist.

Beispiel 1.2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Lemma 1.2.7 (Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit). *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Jedes Orthonormalsystem in V ist linear unabhängig (im euklidischen Fall über $\mathbb{R}$, im unitären Fall über $\mathbb{C}$).*

Beweis. Sei $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in V. Ist $J \subset I$ endlich und ist $(\lambda_j)_{j \in J}$ eine Familie in $\mathbb{R}$ (bzw. im unitären Fall in $\mathbb{C}$), mit $\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j = 0$, so folgt mit den Eigenschaften des Skalarprodukts

$$0 = \langle v_k, 0 \rangle = \Big\langle v_k, \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j \Big\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle v_k, v_j \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \delta_{k,j} = \lambda_k$$

für alle $k \in J$. Also ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Mit demselben Argument erhält man auch die folgende Verallgemeinerung von Bemerkung 1.2.4: Ist $(\lambda_j)_{j \in J}$ eine Familie in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$), so gilt

$$\Big\| \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j \Big\| = \sqrt{\sum_{j \in J} |\lambda_j|^2}$$

für die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\| \cdot \|$ auf V. □

Jeder endlich-dimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis und eine solche kann mit dem folgenden Verfahren aus einer gewöhnlichen Basis konstruiert werden:

Satz 1.2.8 (Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt). *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum, sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall), sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $(w_1, \ldots, w_n)$ in V mit*

$$\forall_{k \in \{1, \ldots, n\}} \quad \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\big(\{w_1, \ldots, w_k\}\big) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\big(\{v_1, \ldots, v_k\}\big).$$

Genauer gilt: Die Familie $(w_1, \ldots, w_n)$, die rekursiv durch

$$w_1 := \frac{1}{\|\widetilde{w}_1\|} \cdot \widetilde{w}_1 \quad \textit{und} \quad \widetilde{w}_1 := v_1$$

und

$$w_{k+1} := \frac{1}{\|\widetilde{w}_{k+1}\|} \cdot \widetilde{w}_{k+1} \quad \textit{und} \quad \widetilde{w}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v_{k+1} \rangle \cdot w_j$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ definiert ist, hat diese Eigenschaft. Dabei bezeichnet $\| \cdot \|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V.

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, machen wir die Konstruktion anschaulich plausibel: Nach Konstruktion entsteht w_k jeweils aus $\widetilde{w}_k$ durch Normierung auf die Länge 1.

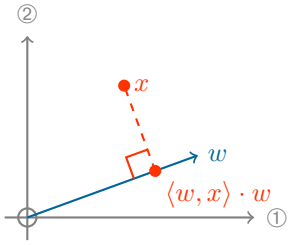


Abbildung 1.4.: Extraktion des w-Anteils

Ist $x \in V$ und $w \in V$ mit $\|w\| = 1$, so gibt $\langle w, x\rangle \cdot w$ den w-Anteil von x (im Sinne einer orthogonalen Zerlegung) an (Abbildung 1.4). In der rekursiven Definition

$$\widetilde{w}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot w_j$$

wird also der Anteil von v_{k+1} extrahiert, der nicht in Richtung der $w_1, \ldots, w_k$ liegt.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung folgendermaßen per Induktion:

Induktionsanfang. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, ist $v_1 \neq 0$. Insbesondere ist w_1 wohldefiniert und $\|w_1\| = 1$. Nach Konstruktion ist dabei $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1\}$.

Induktionsvoraussetzung. Sei $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und es sei bereits gezeigt, dass $(w_1, \ldots, w_k)$ ein Orthonormalsystem mit $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_k\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist.

Induktionsschritt. Wir zeigen nun, dass dann auch $(w_1, \ldots, w_{k+1})$ ein Orthonormalsystem mit $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ ist.

- Es ist $\widetilde{w}_{k+1} \neq 0$, denn: Nach Induktionsvoraussetzung ist die Linearkombination $\sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot w_j \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie ist, folgt aus der Konstruktion von $\widetilde{w}_{k+1}$, dass $\widetilde{w}_{k+1} \neq 0$.

  Also ist w_{k+1} wohldefiniert und $\|w_{k+1}\| = 1$.

- Sei $\ell \in \{1, \ldots, k\}$. Dann ist $\langle w_\ell, w_{k+1}\rangle = 0$, denn: Es genügt dafür, $\langle w_\ell, \widetilde{w}_{k+1}\rangle = 0$ zu zeigen. Nach Konstruktion und Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}\langle w_\ell, \widetilde{w}_{k+1}\rangle &= \left\langle w_\ell, v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot w_j \right\rangle \\ &= \langle w_\ell, v_{k+1}\rangle - \sum_{j=1}^{k}\langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot \langle w_\ell, w_j\rangle \\ &= \langle w_\ell, v_{k+1}\rangle - \langle w_\ell, v_{k+1}\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Nach Konstruktion von w_{k+1} und nach Induktionsvoraussetzung ist $w_{k+1} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ und $v_{k+1} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich daraus die Gleichheit $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$. □

Beispiel 1.2.9. Wir betrachten die linear unabhängige Familie

$$\left(v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)$$

in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$. Wenden wir das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an, so erhalten wir

$$\widetilde{w}_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

sowie

$$\widetilde{w}_2 = v_2 - \langle w_1, v_2\rangle_2 \cdot w_1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

bzw.

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Dann ist (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$.

Korollar 1.2.10. *Jeder endlich-dimensionale euklidische/unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Jeder (endlich-dimensionale) Vektorraum besitzt eine (endliche) Basis. Auf eine solche Basis können wir das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt anwenden (Satz 1.2.8) und erhalten so eine Orthonormalbasis. □

Als erste Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir, dass im endlich-dimensionalen Fall das Standardskalarprodukt (bis auf Isometrie) das einzige Skalarprodukt ist:

Korollar 1.2.11 (Klassifikation der endlich-dimensionalen euklidischen/unitären Vektorräume)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitären Vektorraum der endlichen Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall, $\mathbb{C}$ im komplexen Fall). Dann gibt es einen Isomorphismus $f\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ mit*

$$\forall_{x,y \in V} \quad \big\langle f(x), f(y) \big\rangle_2 = \langle x, y \rangle.$$

(Dies ist gleichbedeutend damit, dass f eine lineare Isometrie bezüglich der induzierten Normen ist.)

Beweis. Aufgrund von Satz 1.2.8 besitzt V eine Orthonormalbasis B. Mit Bemerkung 1.2.4 folgt dann, dass der Isomorphismus $T_{B,E_n}\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine lineare Isometrie ist. Da lineare Isometrien mit dem Skalarprodukt verträglich sind (Proposition 1.1.16 bzw. Proposition 1.1.29), folgt die Behauptung. □

Aus der Existenz von Orthonormalbasen erhält man außerdem auch das wichtige Werkzeug der orthogonalen Projektionen.

Korollar 1.2.12 (orthogonale Projektion)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $p_U\colon V \longrightarrow V$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gilt* $\operatorname{im} p_U \subset U$
2. *und es gilt* $\operatorname{im}(p_U - \mathrm{id}_V) \subset U^\perp$.

Man bezeichnet p_U als orthogonale Projektion von V auf U.

Beweis. Existenz. Nach Orthonormalisierungssatz (Satz 1.2.8) besitzt U eine Orthonormalbasis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ (bezüglich dem von V eingeschränkten Skalarprodukt). Dann definieren wir

$$\begin{aligned} p_U\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, x \rangle \cdot v_j. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist p_U linear und $\operatorname{im} p_U \subset U$. (Wegen $v_j = p_U(v_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt sogar $p_U(x) = x$ für alle $x \in U$.)

Außerdem gilt $\operatorname{im}(p_U - \mathrm{id}_V) \subset U^\perp$, denn: Sei $x \in V$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Konstruktion von p_U gilt

$$\begin{aligned} \langle v_j, p_U(x) - x \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \big(\big\langle v_j, \langle v_k, x \rangle \cdot v_k \big\rangle - \langle v_j, x \rangle \big) \\ &= \langle v_j, x \rangle \cdot \langle v_j, v_j \rangle - \langle v_j, x \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist $(p_U - \mathrm{id}_V)(x) \in \{v_1, \ldots, v_n\}^\perp = U^\perp$.

Eindeutigkeit. (Übungsaufgabe). □

Orthogonale Komplemente liefern eine Möglichkeit, kanonische komplementäre Untervektorräume zu konstruieren:

Korollar 1.2.13 (Komplemente). *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum.*

1. *Dann ist $U^\perp$ ein zu U komplementärer Untervektorraum.*
2. *Insbesondere ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} U^\perp &\longrightarrow V/U \\ x &\longmapsto x + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von reellen/komplexen Vektorräumen.

Beweis. Zu 1. Es ist $U^\perp$ ein Untervektorraum, denn: Man kann dies direkt nachrechnen. Mit der bereits gelernten Theorie können wir aber auch bequem wie folgt argumentieren. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{y \in V \mid \forall_{x\in U} \quad x \perp y\} \\ &= \{y \in V \mid \forall_{x\in U} \quad \langle x, y\rangle = 0\} \\ &= \bigcap_{x\in U} \ker\langle x, \cdot\rangle. \end{aligned}$$

Da Kerne von linearen Abbildungen Untervektorräume sind und Durchschnitte von Untervektorräumen Untervektorräume sind, folgt, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum ist.

Außerdem sind U und $U^\perp$ komplementär, denn:

- Es ist $U \cap U^\perp = \{0\}$ (Bemerkung 1.2.2).
- Es ist $U + U^\perp = V$, denn: Sei $x \in V$. Ist $p_U \colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf U, so folgt

$$x = -\big(p_U(x) - x\big) + p_U(x);$$

der erste Term liegt in $U^\perp$, der zweite in U. Also ist $x \in U + U^\perp$.

Zu 2. Dies folgt aus dem ersten Teil und Bemerkung I.4.4.12. □

Die obigen Aussagen über die Existenz von Orthonormalbasen, orthogonale Projektionen, komplementäre Untervektorräume, … gelten im allgemeinen *nicht*, wenn der betrachtete Untervektorraum unendlich-dimensional ist. Im unendlich-dimensionalen Fall werden zusätzlich noch Abgeschlossenheitseigenschaften bezüglich der induzierten Norm benötigt. Die Untersuchung solcher Fragen ist Gegenstand der Funktionalanalysis (Ausblick 1.1.19).

Ausblick 1.2.14 (Fouriertransformation)**.** Die zusammengesetzte Familie

$$\big(x \mapsto \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot x)\big)_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \cup \big(x \mapsto \sqrt{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist ein Orthonormalsystem in $C([0,1],\mathbb{R})$ (bezüglich dem L^2-Skalarprodukt aus Beispiel 1.1.5); dies folgt aus einer länglichen (aber elementaren) Berechnung der entsprechenden Integrale.

Es gilt sogar noch mehr: bezüglich der durch das L^2-Skalarprodukt induzierten Norm ist der von dieser Familie erzeugte Untervektorraum dicht im Untervektorraum der stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$. Dies ist die Grundlage der sogenannten *Fouriertransformation*, bei der man periodische Funktionen als Reihe der obigen Sinus- und Kosinusfunktionen darstellt.

1.2.3 Die orthogonale Gruppe

Wir untersuchen im folgenden die Symmetriegruppe der euklidischen Ebene bzw. des dreidimensionalen euklidischen Raums genauer. Dazu betrachten wir die folgenden Matrixgruppen:

Definition 1.2.15 (orthogonale Gruppe, unitäre Gruppe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man die folgenden Gruppen:

$\mathrm{O}(n)$	$:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid L(A) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \lVert\cdot\rVert_2)\}$	*orthogonale Gruppe* von $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{SO}(n)$	$:= \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$	*spezielle orthogonale Gruppe* von $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{U}(n)$	$:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid L(A) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^n, \lVert\cdot\rVert_2)\}$	*unitäre Gruppe* von $\mathbb{C}^n$
$\mathrm{SU}(n)$	$:= \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}$	*spezielle unitäre Gruppe* von $\mathbb{C}^n$

Die Verträglichkeit von Abbildungskomposition mit Matrixmultiplikation und die Multplikativität der Determinante zeigen, dass es sich dabei tatsächlich um Gruppen handelt (nachrechnen).

An dieser Stelle sollte man sich daran erinnern, dass Automorphismen von $\mathbb{R}^n$ mit positiver Determinante orientierungserhaltend sind und solche mit negativer Determinante orientierungsumkehrend sind. Erstere können wir im dreidimensionalen euklidischen Raum praktisch realisieren, letztere im Normalfall nicht: Es ist einfach, sich in eine gewisse Richtung zu drehen; es ist (zum Glück!) nicht ohne weiteres möglich, sich als Ganzes an einer Ebene zu spiegeln (viele molekulare Strukturen haben nur in einer der beiden möglichen Orientierungen den gewünschten Effekt).

Zum Beispiel enthält $\mathrm{O}(2)$ die Rotationen um den Ursprung und die Spiegelungen an den Geraden in $\mathbb{R}^2$ (Beispiel 1.1.27 bzw. Übungsaufgabe). In Satz 1.2.18 werden wir sehen, dass $\mathrm{O}(2)$ (wie wir auch aus der Anschauung erwarten würden!) keine weiteren Elemente enthält.

In der Praxis ist es bequem, die folgenden alternativen Beschreibungen dieser Gruppen zu verwenden. Die erste Eigenschaft erklärt auch die Bezeichnung als „orthogonale“ Gruppe.

Proposition 1.2.16. *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

1. *Es ist f genau dann eine lineare Isometrie (bezüglich der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm auf V), wenn $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Orthonormalbasis von V ist.*

2. *Ist f eine lineare Isometrie, so gilt im euklidischen Fall $M_{B,B}(f) \in \mathrm{O}(n)$ und im unitären Fall $M_{B,B}(f) \in \mathrm{U}(n)$.*

Beweis. Zu 1. Ist f eine lineare Isometrie, so ist f wegen Polarisierung mit dem Skalarprodukt verträglich (Proposition 1.1.16 und Proposition 1.1.29). Insbesondere bildet f also Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.

Ist umgekehrt $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Orthonormalbasis von V, so ist f eine Isometrie (Bemerkung 1.2.4 und Beweis von Lemma 1.2.7).

Zu 2. Da B eine Orthonormalbasis ist, ist $T_{B,E_n} \colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine lineare Isometrie bezüglich dem euklidischen Abstand $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{K}^n$ (Beweis von Korollar 1.2.11); dabei bezeichnet $\mathbb{K}$ den Grundkörper. Also ist auch die Komposition

$$L\big(M_{B,B}(f)\big) = f_{B,B} = T_{B,E_n} \circ f \circ T_{B,E_n}^{-1} \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine lineare Isometrie bezüglich $\| \cdot \|_2$. Nach Definition ist somit $M_{B,B}(f)$ in der orthogonalen bzw. unitären Gruppe. □

Korollar 1.2.17 (alternative Beschreibung der orthogonalen/unitären Gruppe)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\mathrm{O}(n) = \big\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\big|\; A^{\mathsf{T}} \cdot A = I_n \big\}$$

und

$$\mathrm{U}(n) = \big\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \;\big|\; A^{\mathsf{H}} \cdot A = I_n \big\}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur im euklidischen Fall (der unitäre Fall geht analog): Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, so gilt nach Definition des Standardskalarprodukts genau dann $A^{\mathsf{T}} \cdot A = I_n$, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ bilden. Mit Proposition 1.2.16 folgt somit die Behauptung. □

Satz 1.2.18 (niedrigdimensionale orthogonale Gruppen)**.**

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt*

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup \big\{ S \cdot A \;\big|\; A \in \mathrm{SO}(n) \big\},$$

wobei S die Spiegelungsmatrix

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n)$$

bezeichnet.

2. *Es gilt* $\mathrm{SO}(2) = \{R(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2 \cdot \pi)\}$. *D.h.* $\mathrm{SO}(2)$ *ist die Gruppe der Rotationen in* $\mathbb{R}^2$ *um den Ursprung.*

3. *Das Komplement* $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ *besteht genau aus der Menge aller Spiegelungen in* $\mathbb{R}^2$ *an Geraden. Genauer: Sei* $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Dann gilt genau dann* $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, *wenn es* $B \in \mathrm{O}(2)$ *gibt mit*

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Die Gruppe* $\mathrm{SO}(3)$ *besteht genau aus den Drehungen in* $\mathbb{R}^3$ *um Geraden. Genauer: Sei* $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. *Dann gilt genau dann* $A \in \mathrm{SO}(3)$, *wenn es* $B \in \mathrm{O}(3)$ *und* $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ *gibt mit*

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1.2.19 (über die Konjugation mit orthogonalen Matrizen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ist $B \in \mathrm{O}(n)$, so ist $B^{-1} \cdot A \cdot B$, die Matrix für die lineare Abbildung $L(A)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, die durch die Spalten von B gegeben ist. Der obige Satz besagt also, dass Isometrien der euklidischen Ebene bzw. des euklidischen Raums bezüglich geeigneter orthonormaler(!) Koordinatensysteme ein besonders einfache Gestalt haben.

Beweis. Zu 1. Offenbar ist die rechte Seite in der linken Seite enthalten.

Sei umgekehrt $A \in \mathrm{O}(n)$. Mit der Multiplikativität der Determinante und Korollar I.5.3.22 erhalten wir

$$1 = \det I_n = \det(A^{\mathsf{T}} \cdot A) = \det A^{\mathsf{T}} \cdot \det A = \det A \cdot \det A,$$

und damit $\det A \in \{-1, 1\}$.

- Ist $\det A = 1$, so gilt nach Definition $A \in \mathrm{SO}(n)$.
- Ist $\det A = -1$, so ist

$$\det(S^{-1} \cdot A) = \frac{1}{\det S} \cdot \det A = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

und damit $S^{-1} \cdot A \in \mathrm{SO}(n)$. Daher hat $A = S \cdot (S^{-1} \cdot A)$ die gewünschte Gestalt.

Zu 2. Ist $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$, so ist $R(\varphi) \in \mathrm{SO}(2)$ (Beispiel 1.1.27). Sei umgekehrt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2).$$

Die Bedingung $A \in \mathrm{SO}(2)$ liefert (mithilfe von Korollar 1.2.17) die folgenden Gleichungen:

$$a^2 + c^2 = (a, c) \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = 1 \tag{1.1}$$

$$b^2 + d^2 = (b, d) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 1 \tag{1.2}$$

$$a \cdot b + c \cdot d = (b, d) \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{1.3}$$

$$a \cdot b + c \cdot d = (a, c) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

$$a \cdot d - b \cdot c = \det A = 1 \tag{1.5}$$

Wir multiplizieren Gleichung (1.4) mit b, Gleichung (1.5) mit d und addieren die entstehenden Gleichungen; dies liefert

$$d = a \cdot (b^2 + d^2) + b \cdot c \cdot d - b \cdot c \cdot d = a \cdot (b^2 + d^2).$$

Mit Gleichung (1.2) erhalten wir somit $a = d$. Analog zeigt man $b = -c$.

Aus der Analysis wissen wir außerdem wegen Gleichung (1.1), dass es ein $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ mit

$$a = \cos \varphi \quad \text{und} \quad c = \sin \varphi$$

gibt. Insgesamt folgt daher $A = R(\varphi)$.

Zu 3. Dies kann man durch eine geeignete Kombination der ersten beiden Teile sehen oder indem man den Beweis des zweiten Teils auf den Fall von Determinante -1 anpasst (Übungsaufgabe).

Zu 4. Eine Rechnung zeigt: Für alle $B \in \mathrm{O}(3)$ und alle $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ ist

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

ein Element von $\mathrm{SO}(3)$.

Um zu verstehen, warum alle Elemente von $\mathrm{SO}(3)$ von dieser Form sind, bietet es sich an, zunächst etwas Spektraltheorie für Isometrien zu entwickeln (Lemma 1.2.20). Sei nun $A \in \mathrm{SO}(3)$ und $f := L(A) \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Die Idee ist,

zunächst einen Kandidaten für die Rotationsachse zu finden und sich dann des zweiten bzw. dritten Teils zu bedienen.

- *Eine spezielle Gerade.* Der Endomorphismus f besitzt einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert 1 oder -1, denn: Das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{R}[T]$ von f ist ein Polynom dritten Grades mit Leitkoeffizient 1. Also gilt

$$\lim_{x \to -\infty} \chi_f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \chi_f(x) = \infty;$$

  mit dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass χ_f mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Somit besitzt f mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und insbesondere einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ. Nach Lemma 1.2.20 ist dabei $\lambda \in \{1, -1\}$. Indem wir statt v den normierten Vektor $1/\|v\| \cdot v$ betrachten, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|v\| = 1$ ist.

- *Reduktion auf den zweidimensionalen Fall.* Sei $U := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$ (Korollar 1.2.13). Sei (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von U. Dann ist (v, w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Da f als Isometrie Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen abbildet, folgt $f(w_1), f(w_2) \in \{f(v)\}^\perp = (\mathbb{R} \cdot v)^\perp = U$ bzw. $f(U) \subset U$. Also ist $f|_U \in \mathrm{Isom}(U, \|\cdot\|_2)$. Daher ist (Proposition 1.2.16)

$$A_U := M_{(w_1,w_2),(w_1,w_2)}(f|_U) \in \mathrm{O}(2)$$

  und (wie man an $M_{(v,w_1,w_2),(v,w_1,w_\rangle}(f)$ ablesen kann)

$$\det A_U = \frac{\det A}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Ist $\lambda = 1$, so ist $A_U \in \mathrm{SO}(2)$ und es gibt nach dem zweiten Teil ein $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ mit $A_U = R(\varphi)$; in anderen Worten: auf U wirkt f durch Rotation um φ. Wir betrachten dann die Matrix B, deren Spalten die Orthonormalbasis (v, w_1, w_2) bilden. Somit ist $B \in \mathrm{O}(3)$ und nach Konstruktion gilt

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- Ist $\lambda = -1$, so ist $A_U \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ und es gibt nach dem dritten Teil eine Matrix $B_U \in \mathrm{O}(2)$ mit

$$B_U^{-1} \cdot A_U \cdot B_U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

in anderen Worten: auf U wirkt f als Spiegelung an einer Geraden. Mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_U \end{pmatrix} \cdot (v \,|\, w_1 \,|\, w_2) \in \mathrm{O}(3)$$

erhalten wir somit

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indem wir die erste und dritte Spalte von B tauschen, erhalten wir eine Matrix $C \in \mathrm{O}(3)$ mit

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\pi) \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Lemma 1.2.20 (grundlegende spektrale Eigenschaften von Isometrien)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{Isom}(V, \|\cdot\|)$, wobei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V bezeichnet. Im euklidischen Fall sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, im unitären Fall sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

1. *Dann ist $\sigma_{\mathbb{K}}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$.*
2. *Sind $\lambda, \mu \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ mit $\lambda \neq \mu$, so gilt*

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \perp \mathrm{Eig}_\mu(f).$$

Insbesondere treffen diese Eigenschaften also auf Matrizen aus $\mathrm{O}(n)$ zu.

Beweis. Zu 1. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f und sei $x \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Da f eine Isometrie ist, folgt

$$\|x\| = \big\|f(x)\big\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Wegen $x \neq 0$ ist somit $|\lambda| = 1$.

Zu 2. Seien $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von f und seien $x, y \in V$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ bzw. μ. Da f auch mit dem Skalarprodukt verträglich ist (wegen Polarisierung; Proposition 1.1.16), folgt dann

$$\langle x, y \rangle = \big\langle f(x), f(y) \big\rangle = \langle \lambda \cdot x, \mu \cdot y \rangle = \overline{\lambda} \cdot \mu \cdot \langle x, y \rangle.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ und $|\lambda| = 1 = |\mu|$ erhalten wir $\overline{\lambda} \cdot \mu \neq 1$, und damit $\langle x, y \rangle = 0$. Also ist $x \perp y$. □

Korollar 1.2.21. *Jede lineare Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ lässt sich als Komposition von einer oder zwei Spiegelungen schreiben.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.2.18 und einem kleinen geometrischen Argument (Übungsaufgabe). □

Beispiel 1.2.22 (kleine unitäre Gruppe)**.** Nach Definition der unitären Gruppen ist $\mathrm{U}(1) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$. Man beachte dabei, dass $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ nichts anderes als der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ist.

1.3 Spektralsätze

Die Untersuchung von Endomorphismen auf Diagonalisierbarkeit ist sowohl in den Anwendungen der linearen Algebra als auch für die abstrakte Klassifikation von Endomorphismen von Bedeutung. Im euklidischen/unitären Fall stellt sich heraus, dass es eine große Klasse von Endomorphismen gibt, die sich besonders schön diagonalisieren lassen: Dies sind die sogenannten selbstadjungierten Endomorphismen.

Wir führen zunächst selbstadjungierte Endomorphismen ein und beweisen dann den sogenannten Spektralsatz (also, dass solche Endomorphismen auf eine besonders schöne Weise diagonalisierbar sind). Als Anwendung erhält man zum Beispiel die Hauptachsentransformation. Zum Abschluss betrachten wir noch den Sylvesterschen Trägheitssatz und Definitheitskriterien für symmetrische Matrizen.

1.3.1 Selbstadjungierte Endomorphismen

Ein Endomorphismus eines euklidischen/unitären Vektorraums ist selbstadjungiert, wenn er sich „durch das Skalarprodukt durchziehen“ lässt.

Definition 1.3.1 (selbstadjungiert)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Ein Endomorphimus $f\colon V \longrightarrow V$ ist *selbstadjungiert*, wenn

$$\forall_{x,y\in V} \quad \big\langle x, f(y)\big\rangle = \big\langle f(x), y\big\rangle.$$

Wir erinnern daran, dass eine komplexe Matrix A selbstadjungiert heißt, wenn $A^{\mathsf{H}} = A$ ist. Sind alle Koeffizienten von A reell, so ist dies äquivalent dazu, dass A symmetrisch ist (also $A^{\mathsf{T}} = A$ gilt).

Proposition 1.3.2 (Selbstadjungiertheit via Matrizen)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei B eine Orthonormalbasis von V und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn die Matrix $M_{B,B}(f)$ selbstadjungiert ist.*

Beweis. Wir schreiben $B = (v_1, \dots, v_n)$. Da B eine Orthonormalbasis ist, gilt für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\big\langle v_j, f(v_k) \big\rangle = \left\langle v_j, \sum_{\ell=1}^{n} A_{\ell,k} v_\ell \right\rangle = A_{j,k}$$

und analog

$$\big\langle f(v_j), v_k \big\rangle = \overline{A_{k,j}}.$$

Mit der Bi- bzw. Sesquilinearität des Skalarprodukts folgt daraus die Behauptung. □

Der obige Beweis erinnert an die Betrachtungen in Kapitel 1.1.4 und 1.1.5. Tatsächlich gibt es auch die Möglichkeit, beide Aspekte in einem gemeinsamen Formalismus zu fassen.

Die Charakterisierung aus Proposition 1.3.2 erlaubt es uns, auf einfache Weise Beispiele für Selbstadjungiertheit anzugeben:

Beispiel 1.3.3. Der Endomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2017 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

ist selbstadjungiert, aber der Endomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 2017 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

ist *nicht* selbstadjungiert.

Die folgende Beobachtung erklärt den Begriff der *Selbst*adjungiertheit:

Proposition 1.3.4 (adjungierte Homomorphismen)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es genau einen Endomorphismus $f^{\mathsf{H}} \colon V \longrightarrow V$ mit*

$$\forall_{x,y \in V} \quad \big\langle x, f(y) \big\rangle = \big\langle f^{\mathsf{H}}(x), y \big\rangle.$$

Man bezeichnet f^{H} dann auch als adjungierte Abbildung von f.

Beweis. Existenz. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und sei $A := M_{B,B}(f)$. Wir definieren den Endomorphismus

$$f^{\mathsf{H}} := T_{B,E_n}^{-1} \circ L\big(A^{\mathsf{H}}\big) \circ T_{B,E_n} \colon V \longrightarrow V.$$

Für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt dann nach Konstruktion

$$\langle v_j, f(v_k)\rangle = A_{j,k} = \overline{A^{\mathsf{H}}_{k,j}} = \langle f^{\mathsf{H}}(v_j), v_k\rangle.$$

Mit der Bi- bzw. Sesquilinearität des Skalarprodukts folgt daraus $\langle x, f(y)\rangle = \langle f^{\mathsf{H}}(x), y\rangle$ für alle $x, y \in V$.

Eindeutigkeit. Seien $F, G\colon V \longrightarrow V$ Endomorphismen mit

$$\forall_{x,y\in V} \quad \langle F(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle G(x), y\rangle.$$

Sei $x \in V$. Dann gilt für alle $y \in V$ (insbesondere für $y = F(x) - G(x)$), dass

$$\langle F(x) - G(x), y\rangle = \langle F(x), y\rangle - \langle G(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle - \langle x, f(y)\rangle = 0.$$

Mit der positiven Definitheit erhalten wir daraus $F(x) - G(x) = 0$ bzw. $F(x) = G(x)$. Dies beweist die Eindeutigkeit. □

Korollar 1.3.5 (Selbst-Adjungiertheit)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn $f = f^{\mathsf{H}}$ gilt.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der vorigen Proposition 1.3.4. □

Caveat 1.3.6. Oft wird die adjungierte Abbildung von f in der Literatur auch mit f^* bezeichnet. Dies kann jedoch zu Verwechslungen mit der *dualen* Abbildung führen. Da die duale Abbildung bezüglich (dualer Basen) durch die transponierte Matrix dargestellt wird (Proposition I.5.1.16) und da man mithilfe von Skalarprodukten auch Dualisieren kann (Übungsaufgabe), stimmen diese beiden Konstruktionen (im reellen Fall) sogar in einem gewissen Sinne überein. Wir werden davon im folgenden aber keinen Gebrauch machen und daher die adjungierte Abbildung mit f^{H} bezeichnen.

1.3.2 Der Spektralsatz

Satz 1.3.7 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Es bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall). Dann gilt:*

1. *Alle Eigenwerte von f über $\mathbb{K}$ sind bereits reell, d.h. $\sigma_{\mathbb{K}}(f) \subset \mathbb{R}$.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.*
3. *Insbesondere ist f über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar.*

Wir werden den zweiten Teil dieses Satzes per Induktion über die Dimension des Vektorraums führen. Dazu benötigen wir zwei wesentliche Bausteine:

- Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen/unitären Vektorraums besitzt mindestens einen Eigenwert/-vektor.

- Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum von V mit $f(W) \subset W$, so gilt auch $f(W^\perp) \subset W^\perp$.

Kombinieren wir diese beiden Eigenschaften, so sehen wir, dass wir uns Dimension für Dimension nach unten (bis zur Dimension 0) hangeln können.

Anmerkung zum Lernen. Woher kennen Sie diese Beweisstrategie?

Beweis. Zu 1. Sei $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ und sei $v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Da f selbstadjungiert ist, folgt

$$\lambda \cdot \langle v, v\rangle = \big\langle v, f(v)\big\rangle = \big\langle f(v), v\big\rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle v, v\rangle.$$

Wegen $v \neq 0$ erhalten wir daraus $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. λ ist reell.

Zu 3. Der dritte Teil ist eine direkte Folgerung aus dem zweiten Teil.

Zu 2. Wir beweisen die zweite Behauptung durch Induktion über $\dim_{\mathbb{K}} V$:

Induktionsanfang. Im Fall $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ ist nichts zu zeigen.

Induktionsvoraussetzung. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und es sei bereits gezeigt, dass es zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus eines euklidischen/unitären Vektorraums der Dimension $n-1$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt.

Induktionsschritt. Sei $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ und sei $f\colon V \longrightarrow V$ selbstadjungiert.

- Dann besitzt f mindestens einen Eigenvektor $v \in V$, denn: Wegen $n > 0$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{K}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ (das Grad n hat) nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz I.6.3.8) mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist λ ein Eigenwert von f und nach dem ersten Teil $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so argumentieren wir wie folgt: Sei B eine Orthonormalbasis von V und sei $A := M_{B,B}(f) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Da f selbstadjungiert ist, ist A symmetrisch bzw. selbstadjungiert (Proposition 1.3.2). Fassen wir A als Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ auf, so zeigt das obige Argument im komplexen Fall für $L(A)\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, dass λ eine reelle(!) Nullstelle von $\chi_A = \chi_f$ ist (es macht keinen Unterschied, ob wir das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{C}$ oder über $\mathbb{R}$ berechnen). Somit ist λ auch ein Eigewert der reellen Matrix A bzw. von f.

  Insbesondere besitzt f mindestens einen Eigenvektor $v \in V$.

- Sei $U := (\mathbb{K} \cdot v)^\perp \subset V$. Dann gilt $f(U) \subset U$, denn: Sei $x \in U$. Dann gilt (da f selbstadjungiert und v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist)

  $$\big\langle f(x), v\big\rangle = \big\langle x, f(v)\big\rangle = \lambda \cdot \langle x, v\rangle = 0,$$

  und damit $f(x) \perp v$. Also ist auch $f(x) \in \{v\}^\perp = (\mathbb{K} \cdot v)^\perp = U$.

- Anwendung der Induktionsvoraussetzung: Da U komplementär zu $\mathbb{K} \cdot v$ ist (Korollar 1.2.13), ist

  $$\dim_{\mathbb{C}} U = \dim_{\mathbb{C}} V - 1 = n - 1.$$

Die Einschränkung $f|_U \colon U \longrightarrow U$ ist nach dem vorigen Schritt tatsächlich ein Endomorphismus von U und nach Konstruktion selbstadjungiert (bezüglich dem von V auf U eingeschränkten Skalarprodukt).

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt somit U eine Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ aus Eigenvektoren von $f|_U$.

Dann ist $(1/\|v\| \cdot v, u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. □

Bemerkung 1.3.8 (Spektralsatz für normale Operatoren)**.** Allgemeiner gilt auch ein leicht modifizerter Spektralsatz für sogenannte *normale Operatoren*, d.h. für Endomorphismen f mit $f^{\mathsf{H}} \circ f = f \circ f^{\mathsf{H}}$ (mit einem ähnlichen Beweis). Neben den selbstadjungierten Endomorphismen sind auch Endomorphismen, die lineare Isometrien sind, normal. Das Konzept der normalen Operatoren erlaubt es also, die spektralen Eigenschaften von selbstadjungierten und isometrischen Endomorphismen gleichzeitig zu behandeln.

Korollar 1.3.9 (Spektralsatz für symmetrische Matrizen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, d.h. $A = A^{\mathsf{T}}$. Dann ist A (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar. Genauer gilt sogar: Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Diagonalgestalt ist.*

Beweis. Da A symmetrisch ist, ist $f := L(A) \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ selbstadjungiert. Also können wir den Spektralsatz (Satz 1.3.7) auf f anwenden und erhalten so eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Dann hat die Matrix $S := M_B$ (d.h. die Matrix, deren Spalten aus den Vektoren aus B besteht) die Eigenschaft, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Diagonalgestalt ist. Da B eine Orthonormalbasis ist, gilt dabei außerdem $S \in \mathrm{O}(n)$. □

Bemerkung 1.3.10. Mit den bereits entwickelten Techniken können wir für reelle symmetrische Matrizen A solche Transformationsmatrizen S wie in Korollar 1.3.9 rechnerisch bestimmen:

- Wir bestimmen die Eigenwerte von A über das charakteristische Polynom χ_A.
- Wir bestimmen mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren Basen für die Eigenräume von A.
- Wir werden das Orthonormalisierungsverfahren auf jede dieser Basen an.
- Wir setzen diese Basen zu einer Basis des Gesamtraums zusammen und verwenden diese Basisvektoren als Spalten von S.

Man beachte, dass die Spalten von S tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden: Nach dem Spektralsatz (alternativ: über eine einfache Rechnung) sind die Eigenräume orthogonal zueinander. Somit lassen sich Orthonormalbasen der Eigenräume zu einer Orthonormalbasis des gesamten Raums zusammensetzen.

Bemerkung 1.3.11 (Verzicht auf den Fundementalsatz der Algebra)**.** Im reellen Fall kann man auch ohne den Fundamentalsatz der Algebra auskommen. Man kann nämlich mit dem folgenden analytischen Trick auf die Existenz eines reellen Eigenwertes schließen:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} R\colon S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, A\cdot x\rangle_2 \end{aligned}$$

wobei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ ist. Wir zeigen nun, dass diese Abbildung ein Minimum λ besitzt und dass Minimalstellen Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind:

- *Existenz eines Minimums:* Die Abbildung R ist stetig (sogar glatt) und S^{n-1} ist kompakt. Also besitzt R ein Minimum $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Das Minimum ist ein Eigenwert von A:* Sei $v \in S^{n-1}$ eine Minimalstelle von R. Mithilfe der Methode der Lagrangemultiplikatoren für die Bestimmung von Extrema der glatten Funktion R (die sich auch glatt auf eine Umgebung von S^{n-1} fortsetzen lässt) unter Nebenbedingungen (Analysis II) sieht man dann, dass $A\cdot v = \lambda\cdot v$ ist.

Korollar 1.3.12 (Wurzeln aus „nicht-negativen“ symmetrischen Matrizen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gibt es eine Matrix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit*

$$B^2 = A.$$

Beweis. Wir wenden den Konjugationstrick an: Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.9) ist A diagonalisierbar. Da $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, existieren somit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$A = S\cdot D\cdot S^{-1},$$

wobei

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten dann die Matrix $B := S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, wobei wir die suggestive Notation

$$\sqrt{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

vewenden. Nach Konstruktion gilt

$$B^2 = S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot S \cdot S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot S = S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot S = S^{-1} \cdot D \cdot S = A,$$

wie gewünscht. □

Ausblick 1.3.13 (Spektralkalkül)**.** Allgemeiner kann man auf diagonalisierbare (insbesondere auf symmetrische) Matrizen mit demselben Trick auch andere Funktionen sinnvoll anwenden. Die systematische Betrachtung solcher Konstruktion führt zum sogenannten *Spektralkalkül* in der Funktionalanalysis.

Aus dem Spektralsatz erhalten wir zudem auch das folgende Kriterium für positive Definitheit symmetrischer Matrizen:

Korollar 1.3.14 (Definitheitskriterium für symmetrische Matrizen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann ist die Matrix A*

genau dann positiv definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{>0}$
genau dann positiv semi-definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$
genau dann negativ definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{<0}$
genau dann negativ semi-definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\leq 0}$
genau dann indefinit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset \neq \sigma_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathbb{R}_{<0}$.

Beweis. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.9 gibt es $S \in \mathrm{O}(n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D;$$

insbesondere ist $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Da die Matrix S orthogonal ist, folgt $A = S^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot S$.

Wir zeigen nur das Kriterium für positive Definitheit (die anderen Fälle gehen analog):

Sei A positiv definit und $j \in \{1, \dots, n\}$. Mit $v_j := S^{-1} \cdot e_j$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} 0 &< v_j^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot v_j \\ &= v_j^{\mathsf{T}} \cdot S^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot S \cdot v_j = (S \cdot v_j)^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot (S \cdot v_j) = e_j^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot e_j \\ &= \lambda_j. \end{aligned}$$

Es gelte umgekehrt $\lambda_j > 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $y := S \cdot x$. Dann folgt

$$x^\mathsf{T} \cdot A \cdot x = (S \cdot x)^\mathsf{T} \cdot D \cdot (S \cdot x) = y^\mathsf{T} \cdot D \cdot y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_j^2.$$

Ist $x \neq 0$, so ist $y \neq 0$ und es gibt ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $y_j \neq 0$. Wegen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{>0}$ erhalten wir somit

$$x^\mathsf{T} \cdot A \cdot x \geq \lambda_j \cdot y_j^2 > 0.$$

Also ist A positiv definit. □

Bemerkung 1.3.15 (das Hauptminorenkriterium)**.** In der Praxis kann auch das folgende Kriterium für positive Definitheit nützlich sein: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,n\}} \quad \det A(j) > 0$$

ist. Dabei bezeichnet $A(j)$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die $(j+1)$-te, …, n-te Zeile und Spalte von A streicht. Die Determinanten $\det A(j)$ bezeichnet man auch als *Hauptminoren von A*. Dies kann man zum Beispiel durch Induktion über n beweisen (Übungsaufgabe).

Symmetrische Matrizen treten zum Beispiel auf natürliche Weise in der mehrdimensionalen Analysis auf (als Hesse-Matrizen gutartiger Funktionen) oder in der algebraischen Topologie (im Kontext von Schnittformen).

Ausblick 1.3.16 (Hesse-Matrix)**.** Definitheitskriterien sind (analog zum eindimensionalen Fall) in der mehrdimensionalen Analysis bei der Suche nach lokalen Extrema nützlich:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine lokale Extremalstelle von f, so gilt $f'(x) = 0$. Dies ist also eine notwendige Bedingung für lokale Extremalstellen.

Ist $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f'(x) = 0$, so gibt es das folgende hinreichende Kriterium: Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Ist diese positiv definit, so ist x eine isolierte lokale Minimalstelle. Ist $f''(x)$ negativ definit, so ist x eine isolierte lokale Maximalstelle. Ist $f''(x)$ indefinit, so ist x *keine* lokale Extremalstelle.

Indem man eine Matrix zu $f''(x)$ mithilfe der partiellen Ableitungen berechnet (sogenannte *Hesse-Matrix*), kann man nun Definitheitskriterien für symmetrische Matrizen anwenden.

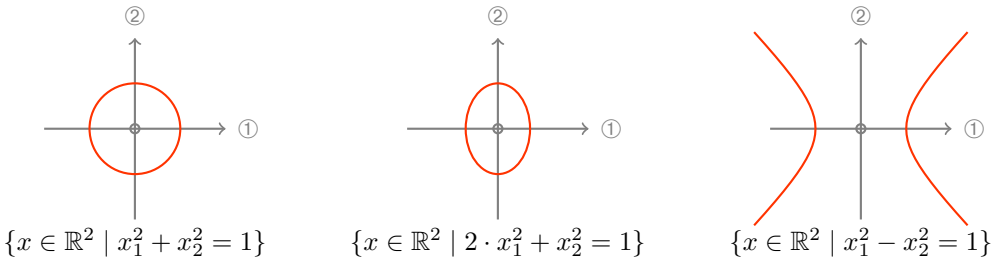


Abbildung 1.5.: Beispiele für ebene Quadriken

1.3.3 Hauptachsentransformation

Eine schöne geometrische Anwendung des Spektralsatzes für symmetrische Matrizen ist die sogenannte Hauptachsentransformation. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf „zentrierte“ Quadriken (der allgemeine Fall kann daraus aber durch quadratischer Ergänzung erhalten werden und braucht keine weiteren theoretischen Hilfsmittel). Quadriken sind Lösungsmengen von (homogenen) quadratischen Gleichungen:

Definition 1.3.17 (Quadrik)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die zugehörige *Quadrik* definiert als

$$Q(A, c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\mathsf{T} \cdot A \cdot x = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 1.3.18. Einfache Beispiele für ebene Quadriken sind (Abbildung 1.5):

$$Q\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 1\right) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \qquad \text{(Einheitskreis)}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 1\right) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 + x_2^2 = 1\} \qquad \text{(Ellipse)}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, 1\right) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\} \qquad \text{(Hyperbel)}$$

Mithilfe des Spektralsatzes für symmetrische Matrizen lassen sich Quadriken vollständig klassifizieren. Insbesondere liefert dies auch eine Klassifikation der sogenannten Kegelschnitte.

Korollar 1.3.19 (Hauptachsentransformation)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und eine Isometrie $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ mit*

$$Q(A,c) = f\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_j^2 = c\right\}\right).$$

Man bezeichnet in dieser Situation die Geraden $f(\mathbb{R} \cdot e_1), \ldots, f(\mathbb{R} \cdot e_n)$ (die paarweise orthogonal zueinander stehen) auch als Hauptachsen *von $Q(A,c)$.*

Beweis. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.9) gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$S^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D.$$

Sei $f := L(S) = L((S^{\mathsf{T}})^{-1})\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist f eine lineare Isometrie bezüglich der euklidischen Norm und

$$\begin{aligned} Q(A,c) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x = c\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \cdot (S \cdot D \cdot S^{\mathsf{T}}) \cdot x = c\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (S^{\mathsf{T}} \cdot x)^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot (S^{\mathsf{T}} \cdot x) = c\right\} \\ &= f\big(\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; x^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot x = c\}\big). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.3.20. Sei

$$Q := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{5}{4} \cdot x_1^2 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{4} \cdot x_2^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Um zu verstehen, was dies für ein geometrisches Gebilde ist, führen wir die Hauptachsentransformation durch: Als ersten Schritt schreiben wir Q als Quadrik einer geeigneten symmetrischen Matrix: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \cdot \sqrt{3} \\ -3/4 \cdot \sqrt{3} & -1/4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dann ist A symmetrisch und

$$Q = Q(A,1).$$

Als nächsten Schritt bestimmen wir Hauptachsen für Q. Dazu bestimmen wir eine Eigenbasis von A. Mithilfe des charakteristischen Polynoms etc. findet man heraus, dass

$$\left(v_1 := \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right)$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A ist. Die Eigenwerte sind dabei 2 bzw. -1. Also sind $\mathbb{R} \cdot v_1$ und $\mathbb{R} \cdot v_2$ Hauptachsen von Q und wir

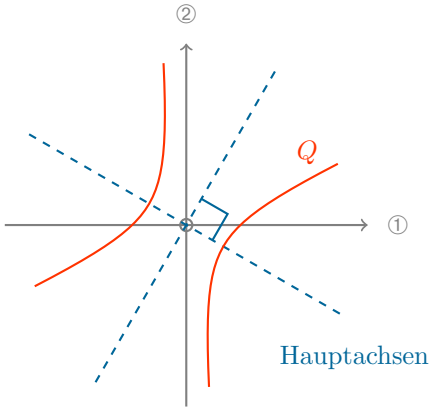


Abbildung 1.6.: Eine Hyperbel und ihre Hauptachsen

erhalten

$$Q = f\big(\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 - x_2^2 = 1\}\big)$$

mit $f := L((v_1 \mid v_2))$. Es handelt sich daher um eine Hyperbel (Abbildung 1.6).

Ausblick 1.3.21 (Trägheitsmomente/Deviationsmomente)**.** In der Physik werden Trägheitsmomente durch Tensoren beschrieben. Diese Tensoren kann man durch reelle Matrizen darstellen, die in dieser Situation symmetrisch sind. Mithilfe der Hauptachsentransformation lassen sich (orthogonale) Koordinaten finden, für die die zugehörige Trägheitsmomentenmatrix eine Diagonalmatrix ist (d.h. in diesen Koordinaten verschwinden die sogenannten Deviationsmomente). Solche Koordinaten sind z.B. bei der analytischen Untersuchung von Kreiseln hilfreich.

1.3.4 Der Trägheitssatz und die Signatur

Nach dem Spektralsatz sind reelle symmetrische Matrizen diagonalisierbar und man kann solche Diagonalisierungen immer durch orthogonale Matrizen realisieren. Insbesondere ist dies also beim Basiswechsel für Matrizen von symmetrischen Bilinearformen hilfreich. Allgemeiner gilt für solche Basiswechsel sogar:

Satz 1.3.22 (Trägheitssatz von Sylvester)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch.*

1. *Dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $r, k \in \mathbb{N}$ mit*

$$S^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ist $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ wie im ersten Teil, so gilt $r = n_+$ und $k = n_-$, wobei

$$\begin{aligned} n_+ := \max\big\{\dim_{\mathbb{R}} U \;\big|\; & U \subset \mathbb{R}^n \text{ ist ein Untervektorraum} \\ & \text{und für alle } x \in U \setminus \{0\} \text{ ist } x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x > 0\big\}, \\ n_- := \max\big\{\dim_{\mathbb{R}} U \;\big|\; & U \subset \mathbb{R}^n \text{ ist ein Untervektorraum} \\ & \text{und für alle } x \in U \setminus \{0\} \text{ ist } x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x < 0\big\} \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Zahlen r und k im ersten Teil unabhängig von S.

Man bezeichnet die Differenz $n_+ - n_-$ auch als Signatur von A.

Beweis. Zu 1. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.9) gibt es $S \in \mathrm{O}(n)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$S^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D.$$

Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass die Eigenwerte wie folgt sortiert sind (ansonsten tauschen wir die Spalten von S entsprechend):

$$\begin{aligned} \lambda_1, \ldots, \lambda_r &> 0, \\ \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+k} &< 0, \\ \lambda_{r+k+1}, \ldots, \lambda_n &= 0. \end{aligned}$$

Dann hat die Matrix

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot s_1 \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \cdot s_r \;\Big|\; \frac{-1}{\sqrt{|\lambda_{r+1}|}} \cdot s_{r+1} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \frac{-1}{\sqrt{|\lambda_{r+k}|}} \cdot s_{r+k} \;\Big|\; s_{r+k+1} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; s_n\Big),$$

die man durch Reskalieren der Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von S erhält, die gewünschte Eigenschaft (nachrechnen).

Zu 2. Sei

$$\begin{aligned} b := B(A) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

die von A induzierte symmetrische Bilinearform und sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ wie im ersten Teil des Satzes.

Wir zeigen, dass $r = n_+$ ist (der Beweis von $k = n_-$ geht analog): Nach Wahl von S ist b auf dem Untervektorraum

$$S^{-1}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1,\dots,e_r\})\big) \subset \mathbb{R}^n.$$

positiv definit (nachrechnen). Insbesondere ist daher $r \leq n_+$.

Angenommen, es gilt $r < n_+$, d.h. es gibt einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim_{\mathbb{R}} W > r$, auf dem b positiv definit ist. Aus der Dimensionsformel für komplementäre Untervektorräume erhalten wir dann, dass

$$W \cap S^{-1}\big(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_{r+1},\dots,e_n\})\big)$$

nicht Dimension 0 hat. Insbesondere gibt es in diesem Durchschnitt einen Vektor $x \neq 0$. Wegen $x \in W$ gilt einerseits $b(x,x) > 0$. Nach Wahl von S ist b auf dem rechten Untervektorraum negativ semi-definit; daher gilt $b(x,x) \leq 0$. Dies ist ein Widerspruch.

Also ist $r = n_+$, wie behauptet. □

Die Bezeichnung des Satzes als Trägheitssatz geht auf die Originalarbeit von Sylvester zurück (da die Zahlen n_+ und n_- zu träge sind, sich unter Basiswechsel für Bilinearformen zu ändern).

Ausblick 1.3.23 (die Signatur in der Topologie)**.** Der Sylvestersche Trägheitssatz zeigt, dass auch die Signatur von symmetrischen Bilinearformen auf endlich-dimensionalen reellen Vektorräume wohldefiniert ist (da sie unter Basiswechsel invariant ist).

Diese Invariante wird zum Beispiel in der algebraischen Topologie verwendet: Dort treten auf natürliche Weise bei Mannigfaltigkeiten symmetrische Bilinearformen (die sogenannte Schnittform) auf. Da es auf dem entsprechenden endlich-dimensionalen reellen Vektorraum jedoch keine ausgezeichnete Basis ist, benötigt man eine Invariante von symmetrischen Bilinearformen, die nicht auf die Wahl einer Basis angewiesen ist. Die Signatur ist eine solche Invariante und führt dann zur Signatur von Mannigfaltigkeiten.

2

Normalformen II: Moduln über Hauptidealringen

Wir kommen nun zum Klassifikationsproblem für Endomorphismen bzw. von Matrizen bis auf Ähnlichkeit zurück. Das Hauptziel ist dabei, die Existenz der Jordanschen Normalform zu beweisen. Wir werden dieses Problem durch einen algebraischen Trick auf ein anderes Klassifikationsproblem zurückführen, das eine schöne und auch auf andere Probleme anwendbare Lösung besitzt: die Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen.

In diesem Kapitel werden wir die Grundlagen über Ringe (eine Abschwächung von Körpern) und Moduln (das Analogon von Vektorräumen aber für Ringe) erklären und die Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen durchführen.

Überblick über dieses Kapitel.

2.1	Zerlegung von Endomorphismen und Moduln	50
2.2	Ringe	52
2.3	Moduln	57
2.4	Hauptidealringe	73
2.5	Moduln über Hauptidealringen	87

Schlüsselbeispiel. Polynomringmoduln, die von Endomorphismen auf Vektorräumen induziert werden.

2.1 Zerlegung von Endomorphismen und Moduln

Um die Strategie für die Klassifikation von Endomorphismen geeignet formulieren zu können, führen wir etwas Terminologie für Endomorphismen ein bzw. Zerlegungen von Vektorräumen mit Endomorphismen in kleinere Bausteine.

Definition 2.1.1 (invariant, zyklisch, irreduzibel)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

- Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist *f-invariant*, wenn $f(U) \subset U$ gilt.
- Der Vektorraum U ist *f-zyklisch*, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt, für den $\{f^n(v) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.
- Der Vektorraum V ist *f-reduzibel*, wenn es nicht-triviale komplementäre f-invariante Untervektorräume $U, W \subset V$ gibt (d.h. es gilt $f(U) \subset U$, $f(W) \subset W$ sowie $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$, aber $U \neq \{0\}$ und $W \neq \{0\}$).
- Der Vektorraum V ist *f-irreduzibel*, wenn er nicht f-reduzibel ist.

Beispiel 2.1.2 (diagonalisierbarer Endomorphismus)**.** Sei K ein Körper, seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und sei

$$\begin{aligned} f\colon K^2 &\longrightarrow K^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

Die Untervektorräume $K \cdot e_1$ und $K \cdot e_2$ sind f-invariant und komplementär. Also ist K^2 ein f-reduzibler Vektorraum.

Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist K^2 *nicht* f-zyklisch (denn für alle $v \in K^2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $f^n(v) \in K \cdot v$). Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist K^2 ein f-zyklischer Vektorraum, denn $(e_1 + e_2, f(e_1 + e_2) = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2)$ ist eine Basis von K^2.

Beispiel 2.1.3 (Jordanblock)**.** Sei K ein Körper, sei $\lambda \in K$ und sei

$$\begin{aligned} f\colon K^2 &\longrightarrow K^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

Der Untervektorraum $K \cdot e_1 \subset K^2$ ist f-invariant (da e_1 ein Eigenvektor von f ist), aber der Vektorraum K^2 ist f-irreduzibel (eindimensionale f-invariante Untervektorräume sind Eigenräume und die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von f ist nur 1). Außerdem ist K^2 ein f-zyklischer Vektorraum, denn $(e_2, f(e_2))$ ist eine Basis von K^2.

Bei der Untersuchung orthogonaler bzw. selbstadjungierter Matrizen hat uns das Standardskalarprodukt via Orthogonalität für jeden invarianten Unterraum einen invarianten komplementären Unterraum geliefert. Im allgemeinen Fall besitzt jedoch *nicht* jeder invariante Unterraum einen invarianten komplementären Unterraum, wie dieses Jordanblock-Beispiel zeigt.

Beispiel 2.1.4 (Endomorphismus ohne Eigenwerte)**.** Sei $\varphi \in (0, 2 \cdot \pi) \setminus \{\pi\}$ und sei

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto R(\varphi) \cdot x. \end{aligned}$$

Dann besitzt $\mathbb{R}^2$ *keine* eindimensionalen f-invarianten Untervektorräume (da f keine reellen Eigenwerte besitzt). Also ist $\mathbb{R}^2$ ein f-irreduzibler Vektorraum. Außerdem ist $(e_1, f(e_1))$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, d.h. der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist f-zyklisch. Aber f kann *nicht* durch eine Jordanblock dargestellt werden (da f ja keine Eigenwerte besitzt).

Um die Existenz der Jordanschen Normalform (Satz I.6.4.11) für komplexe Matrizen zu beweisen, genügt es also (in Kombination mit einer Induktion über die Dimension des unterliegenden Vektorraums) die folgenden Aussagen für Endomorphismen $f \colon V \longrightarrow V$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V zu zeigen:

- Ist V ein f-irreduzibler Vektorraum, so ist V bereits f-zyklisch.
- Ist V ein f-irreduzibler (und damit f-zyklischer) Vektorraum, so kann f bezüglich einer geeigneten Basis durch einen Jordanblock dargestellt werden.

Für die Eindeutigkeit müssen wir zusätzlich nachweisen, dass diese Zerlegungen im wesentlichen eindeutig sind.

Die Schlüsselidee ist, Endomorphismen $f \colon V \longrightarrow V$ eines K-Vektorraums V mit dem folgenden Trick in eine andere algebraische Struktur zu übersetzen: Dazu betrachten wir die „Skalarmultiplikation“

$$\begin{aligned} K[T] \times V &\longrightarrow V \\ \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot T^j, x \right) &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot f^j(x) \end{aligned}$$

von $K[T]$ auf V (dabei bezeichnet f^j die j-fache Komposition von f mit sich selbst). Nun ist $K[T]$ zwar kein Körper, aber immer noch gut genug für das Klassifikationsziel. Durch diese Konstruktion wird V zu einem sogenannten Modul über dem Ring $K[T]$. Die wesentliche Beobachtung ist dabei, dass sich die grundlegenden Eigenschaften von $f \colon V \longrightarrow V$ wie Irreduzibilität etc. an Eigenschaften des $K[T]$-Moduls V ablesen lassen, die sich wiederum durch Berechnungen mit Polynomen bestimmen lassen. Diese Theorie werden wir in den folgenden Abschnitten entwickeln.

2.2 Ringe

Ringe sind grob gesagt Körper, in denen man auf die Existenz von multiplikativen Inversen (und manchmal auch auf die Kommutativität der Multiplikation oder gar auf die Existenz eines neutralen Elements bezüglich Multiplikation) verzichtet.

2.2.1 Ringe

Wir führen die grundsätzlichen Begriffe über Ringe ein; wir schränken uns dabei der Einfachheit halber auf Ringe mit Eins ein.

Definition 2.2.1 (Ring)**.** Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge R und Abbildungen $+, \cdot : R \times R \longrightarrow R$ (*Addition* bzw. *Multiplikation*) mit folgenden Eigenschaften:

- Das Paar $(R, +)$ bildet eine abelsche Gruppe. Wir schreiben 0 für das neutrale Element dieser Gruppe.
- Die Multiplikation ist assoziativ und es gibt ein neutrales Element bezüglich Multiplikation; dieses ist dann eindeutig bestimmt (nachrechnen) und wird mit 1 bezeichnet.
- Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. für alle $x, y, z \in R$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist *kommutativ*, wenn

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Beispiel 2.2.2 (Ringe)**.**

- Alle Körper sind kommutative Ringe.
- Der *Nullring* besteht aus der Menge $\{0\}$ mit der einzig möglichen Addition bzw. Multiplikation; in diesem Fall ist $1 = 0$.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring.
- Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ bezüglich der Polynomaddition bzw. Polynommultiplikation ein kommutativer Ring (Kapitel I.6.3.1).

- Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum, so ist $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ ein Ring (bezüglich punktweiser Addition bzw. Abbildungskomposition als Multiplikation); das neutrale Element der Multiplikation ist dabei id_V. Ist $\dim_K V \geq 2$, so ist dieser Ring *nicht* kommutativ.

  Insbesondere ist auch für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_{n\times n}(K)$ bezüglich Matrixaddition/-multiplikation ein Ring.

Allgemeine Ringe sind viel zu wild, um vernünftig damit arbeiten zu können. Wir werden uns daher im folgenden zumeist auf algebraisch gutartige Ringe einschränken.

Definition 2.2.3 (Integritätsring)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Man bezeichnet den Ring R als *Integritätsring*, wenn er *nullteilerfrei* ist, d.h., wenn

$$\forall_{x,y\in R} \quad x \cdot y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \vee y = 0).$$

Beispiel 2.2.4. Körper sind Integritätsringe und $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsring. Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet mit komponentenweiser Addition bzw. Multiplikation einen kommutativen Ring. Dieser ist jedoch *kein* Integritätsring, da bzgl. dieser Multiplikation $e_1 \cdot e_2 = 0$ gilt.

Proposition 2.2.5 (Nullteilerfreiheit von Polynomringen)**.** *Sei K ein Körper.*

1. *Für alle $f, g \in K[T]$ gilt* $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.
2. *Insbesondere ist $K[T]$ ein Integritätsring.*

Beweis. Zu 1. Es genügt, die Behauptung für $f \neq 0$ und $g \neq 0$ zu beweisen (wegen $\deg 0 = -\infty$ und den normalen Rechenregeln für $-\infty$).

Sei $n := \deg f$ und $m := \deg g$. Also können wir f und g in der Form $f = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot T^j$ bzw. $g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot T^j$ mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ schreiben. Nach Definition der Multiplikation von Polynomen ist

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot T^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot T^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{k=\max(0,j-m)}^{\min(n,j)} a_k \cdot b_{j-k} \right) \cdot T^j \\ &= (a_n \cdot b_m) \cdot T^{n+m} + \sum_{j=0}^{m+n-1} \left(\sum_{k=\max(0,j-m)}^{\min(n,j)} a_k \cdot b_{j-k} \right) \cdot T^j. \end{aligned}$$

Da K als Körper nullteilerfrei ist, ist $a_n \cdot b_m \neq 0$. Also ist $\deg(f \cdot g) = n+m = \deg f + \deg g$.

Zu 2. Wir wissen bereits, dass $K[T]$ ein kommutativer Ring ist. Es bleibt also nur die Nullteilerfreiheit zu zeigen: Seien $f, g \in K[T] \setminus \{0\}$. Dann ist $\deg f \geq 0$ und $\deg g \geq 0$. Mit dem ersten Teil folgt somit

$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g \geq 0,$$

und daher insbesondere $f \cdot g \neq 0$. □

Bemerkung 2.2.6. Allgemeiner kann man nicht nur Polynomringe mit Körperkoeffizienten, sondern mit Ringkoeffizienten betrachten. Die obige Proposition verallgemeinert sich dann entsprechend: Ist R ein Integritätsring, so ist auch der Polynomring $R[T]$ über R ein Integritätsring.

2.2.2 Ringhomomorphismen

Wo Objekte (in diesem Fall Ringe) sind, sind auch die Morphismen (in diesem Fall Ringhomomorphismen) nicht weit:

Definition 2.2.7 (Ringhomomorphismus)**.** Seien R, S Ringe. Ein *Ringhomomorphismus* $R \longrightarrow S$ ist eine Abbildung $f\colon R \longrightarrow S$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildung f ist ein Gruppenhomomorphismus der unterliegenden additiven abelschen Gruppen, d.h. es gilt

$$\forall_{x,y \in R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

- Es gilt $f(1) = 1$ und

$$\forall_{x,y \in R} \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

  (Die Multiplikation links ist dabei die Multiplikation in R, die rechts ist die Multiplikation in S).

Analog zum Fall von Vektorräumen führt man auch den Begriff der *Ringisomorphismen* als Ringhomomorphismen ein, die einen inversen Ringhomomorphismus besitzen. Die Klasse der Ringe bildet zusammen mit den Ringhomomorphismen eine Kategorie (Anhang A.2).

Beispiel 2.2.8.

- Ist R ein Ring, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow R$.
- Sei K ein Körper und sei $x \in K$. Dann ist der Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{aligned} K[T] &\longrightarrow K \\ p &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

  ein Ringhomomorphismus.

  Ist $p \in K[T]$, so ist die Abbildung

$$K \longrightarrow K$$
$$y \longmapsto p(y)$$

im allgemeinen *kein* Ringhomomorphismus!

- Es gibt *keinen* Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (wohin soll $1/2$?) und *keinen* Ringhomomorphismus $\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{Q}$ (in $\mathbb{F}_2$ gilt $1+1 = 0$, nicht aber in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$).

Im folgenden werden wir erklären, wie man Polynomringe mithilfe von Homomorphismen durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren kann. Um diese universelle Eigenschaft formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Algebren bzw. Algebrahomomorphismen:

Bemerkung 2.2.9 (Algebren, Algebrenhomomorphismus)**.** Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* ist ein Paar $(A, *)$, bestehend aus einem Ring A und einer Abbildung $*\colon K \times A \longrightarrow A$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die unterliegende additive Gruppe von A bildet zusammen mit $*$ einen K-Vektorraum.
2. Die Skalarmultiplikation $*$ ist mit der Ringmultiplikation verträglich, d.h. es gilt

$$\forall_{\lambda \in K} \quad \forall_{x,y \in A} \quad \lambda * (x \cdot y) = (\lambda * x) \cdot y = x \cdot (\lambda * y).$$

Im folgenden werden wir im Normalfall in Algebren sowohl die Skalar- als auch die Ringmultiplikation mit „$\cdot$“ bezeichnen. Eine Abbildung zwischen K-Algebren ist ein *K-Algebrenhomomorphismus*, wenn sie gleichzeitig ein Ring- und ein K-Vektorraumhomomorphismus ist.

Wichtige Beispiele für K-Algebren sind K selbst (in diesem Fall stimmen die Ring- und die Skalarmultiplikation überein), der Polynomring $K[T]$ und die Endomorphismenringe $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ bzw. $M_{n\times n}(K)$, wobei V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$ ist, jeweils bezüglich der bereits bekannten Ring- und K-Vektorraumstruktur.

Satz 2.2.10 (universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** *Sei K ein Körper.*

1. *Ist A eine K-Algebra und $x \in A$, so gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon K[T] \longrightarrow A$ mit*

$$\varphi(T) = x.$$

   Ist $p \in K[T]$, so schreibt man auch kurz $p(x) := \varphi(p)$.

2. *Sei P eine K-Algebra und $t \in P$ mit folgender Eigenschaft: Ist A eine K-Algebra und $x \in A$, so gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon P \longrightarrow A$ mit $\varphi(t) = x$. Dann gibt es genau einen K-Algebrenisomorphismus $\varphi\colon K[T] \longrightarrow P$ mit $\varphi(T) = t$.*

Beweis. Zu 1. Sei A eine K-Algebra und sei $x \in A$.

Existenz. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi\colon K[T] &\longrightarrow A \\ \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j &\longmapsto \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Multiplikation auf $K[T]$ und den Verträglichkeitseigenschaften von Skalar- und Ringmultiplikation in A folgt, dass φ tatsächlich ein K-Algebrenhomomorphismus ist. Nach Konstruktion gilt dabei $\varphi(T) = x$.

Eindeutigkeit. Seien $\varphi, \psi\colon K[T] \longrightarrow A$ Algebrenhomomorphismen mit der Eigenschaft $\varphi(T) = x = \psi(T)$. Dann gilt für alle $f = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j$ (mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_m \in K$), dass

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi\Big(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \varphi(T^j) && (K\text{-Linearität von } \varphi) \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \big(\varphi(T)\big)^j && (\text{Multiplikativität von } \varphi) \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j \end{aligned}$$

und ebenso auch $\psi(f) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j$. Insbesondere ist $\varphi(f) = \psi(f)$.

Zu 2. Dies folgt mit dem üblichen Trick für universelle Eigenschaften (Abbildung I.4.6). Wir werden diesen später in einem anderen Kontext ausführlich diskutieren. □

Ausblick 2.2.11 (universelle Eigenschaften)**.** Die meisten universellen Eigenschaften (z.B. auch die universelle Eigenschaft von Quotienten, direkten Summen, Produkten, ...) sind von der obigen Form:

- Einerseits geben sie einem eine einfache Methode, um Morphismen zu konstruieren. Dabei lassen sich im Normalfall nur entweder Morphismen *aus* dem Objekt oder Morphismen *in* das Objekt einfach charakterisieren. Im Fall des Polynomrings ist es nach der universellen Eigenschaft leicht, Morphismen aus dem Polynomring heraus zu konstruieren.
- Andererseits geben die universellen Eigenschaften eine Methode, um das gegebene Objekt (bis kanonische Isomorphie) eindeutig zu charakterisieren und damit unter anderen Objekten wiederzuerkennen.

Diese Aspekte lassen sich im Rahmen der Kategorientheorie allgemeiner formalisieren.

Beispiel 2.2.12 (Endomorphismenpolynome)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi\colon K[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

mit $\varphi(T) = f$. Ist $p \in K[T]$, so schreiben wir kurz $p(f) := \varphi(p)$. Expliziter gilt (nach dem obigen Beweis): Ist $p = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j \in K[T]$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_m \in K$, so ist

$$p(f) = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot f^j,$$

wobei f^j die j-fache Komposition von f bezeichnet.

2.3 Moduln

Grob gesagt sind Moduln Vektorräume mit einer Skalarmultiplikation durch Ringelemente statt Körperelemente. Viele grundlegende Eigenschaften von Vektorräumen übertragen sich auf Moduln (alles, wofür man keine multiplikativen Inversen von Skalaren oder die Kommutativität der Multiplikation benötigt). Im allgemeinen ist die Modultheorie jedoch viel verworrener als die Vektorraumtheorie, da Ringe viel wilder sein können als Körper.

2.3.1 Moduln

Wir orientieren uns bei der Definition von Moduln an der Definition von Vektorräumen:

Definition 2.3.1 (Modul, Untermodul)**.** Sei R ein Ring. Ein *R-Modul* ist ein Tripel $(V, +, \cdot\,)$, bestehend aus einer Menge V und Abbildungen $+\colon V \times V \longrightarrow V$ bzw. $\cdot : R \times V \longrightarrow V$, mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.
- *Assoziativität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v \in V$ gilt

$$(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v).$$

- *Neutrale Skalarmultiplikation.* Für alle $v \in V$ gilt

$$1 \cdot v = v.$$

- *Distributivität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v, w \in V$ gilt

$$(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad \text{und} \quad a \cdot (v+w) = a \cdot v + b \cdot w.$$

Ein *R-Untermodul von V* ist eine Teilmenge $U \subset V$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildungen $+ \colon V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot : R \times V \longrightarrow V$ schränken sich zu Abbildungen $+ \colon U \times U \longrightarrow U$ und $\cdot : R \times U \longrightarrow U$ ein.

- Die Menge U bildet bezüglich dieser eingeschränkten Addition bzw. Skalarmultiplikation einen R-Modul.

Caveat 2.3.2. In diesem Zusammenhang heißt es im Singular „der Modul“ bzw. im Plural „die Moduln“ (jeweils mit Betonung auf der ersten Silbe).

Beispiel 2.3.3.

- Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum, so ist V ein K-Modul. Man spricht in diesem Fall aber eigentlich immer von Vektorräumen und nicht von Moduln.

- Ist R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$, so bildet die Menge R^n der n-Tupel mit Koeffizienten aus R (geschrieben als Spaltenvektoren) einen R-Modul bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation (im Falle von Körpern: Proposition I.3.1.6).

- Ist R ein Ring und X eine Menge, so bildet die Menge $\mathrm{Abb}(X, R)$ aller Abbildungen $X \longrightarrow R$ einen R-Modul bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation (im Falle von Körpern: Beispiel I.3.1.9).

- Ist $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, so bildet A mit dieser Addition und der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times A &\longrightarrow A \\ (n, v) &\longmapsto \begin{cases} \overbrace{v + \cdots + v}^{n \text{ mal}} & \text{falls } n > 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \\ -(\underbrace{v + \cdots + v}_{-n \text{ mal}}) & \text{falls } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  einen $\mathbb{Z}$-Modul. Umgekehrt liefert jeder $\mathbb{Z}$-Modul durch Vergessen der Skalarmultiplikation eine abelsche Gruppe (bezüglich der Addition des Moduls).

  Insbesondere wird auf diese Weise zum Beispiel die additive Gruppe des Körpers $\mathbb{F}_2$ zu einem zwei-elementigen(!) $\mathbb{Z}$-Modul.

Bemerkung 2.3.4 (Rechnen in Moduln)**.** Die folgenden grundlegenden Eigenschaften übertragen sich wortwörtlich von Vektorräumen auf Moduln (indem man die Beweise direkt in die Sprache der Moduln übersetzt): Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul.

- *Grundlegende Rechnungen in Moduln.* Die Modulversion von Proposition I.3.1.10 lautet (siehe auch Caveat 2.3.5):
  1. Für alle $a \in R$ gilt $a \cdot 0 = 0$. Dabei bezeichnet 0 auf beiden Seiten das neutrale Element der Gruppe $(V, +)$.
  2. Für alle $v \in V$ gilt $0 \cdot v = 0$. Dabei bezeichnet 0 auf der linken Seite das neutrale Element von $(R, +)$ und auf der rechten Seite das neutrale Element von $(V, +)$.
  3. Für alle $a \in R$, $v \in V$ gilt
  $$(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v).$$

- *Charakterisierung von Untermoduln.* Die Modulversion von Proposition I.3.1.13 lautet: Sei $U \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge. Dann ist U genau dann ein R-Untermodul von V, wenn folgende Bedingungen beide erfüllt sind:
  ① Für alle $u, v \in U$ gilt $u + v \in U$.
  ② Für alle $a \in R$ und alle $u \in U$ gilt $a \cdot u \in U$.

- *Durchschnitte.* Die Modulversion von Proposition I.3.1.16 lautet: Sind $U, W \subset V$ Untermoduln von V, so ist auch $U \cap W$ ein R-Untermodul von V.

  Allgemeiner gilt: Ist $Z \subset P(V)$ eine nicht-leere Menge von R-Untermoduln von V, so ist auch der Durchschnitt $\bigcap Z = \{v \mid \forall_{U \in Z} \quad v \in U\}$ ein R-Untermodul von V.

- *Erzeugte Untermoduln.* Sei $E \subset V$. Dann heißt der R-Untermodul
  $$\mathrm{Span}_R(E) := \bigcap_{U \in U_E(V)} U$$
  von E erzeugter R-Untermodul von V. Dabei bezeichnet $U_E(V) \subset P(V)$ die Menge aller R-Untermoduln U von V mit $E \subset U$ (insbesondere ist $V \in U_E(V)$).

  Ist $\mathrm{Span}_R(E) = V$, so ist E ein *Erzeugendensystem von V*. Falls V ein endliches Erzeugendensystem besitzt, ist V ein *endlich erzeugter R-Modul*.

  Analog zu Proposition I.3.1.21 erhalten wir die folgende explizite Beschreibung erzeugter Untermoduln: Ist $E \subset V$, so gilt

$$\mathrm{Span}_R(E) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot v_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, v_1, \ldots, v_n \in E, a_1, \ldots, a_n \in R \right\}.$$

Caveat 2.3.5 (Torsion in Moduln)**.** Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Ist $a \in R$ und $v \in V$ mit $a \cdot v = 0$, so folgt im allgemeinen *nicht*, dass $a = 0$ oder $v = 0$ ist! Dies ist eine der wesentlichen Komplikationen der Modultheorie.

Zum Beispiel gilt in dem $\mathbb{Z}$-Modul, den wir aus der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_2$ erhalten, dass $2 \cdot 1 = 0$ ist, aber $2 \neq 0$ (in $\mathbb{Z}$) und $1 \neq 0$ (in $\mathbb{F}_2$).

Unsere ursprüngliche Motivation Moduln zu untersuchen basiert auf dem folgenden zentralen Beispiel, das wir bereits in Kapitel 2.1 angedeutet haben; in Kapitel 3 werden wir die Modultheorie der folgenden Abschnitte auf solche Moduln zu Vektorraumendomorphismen anwenden.

Proposition 2.3.6 (Modul zu einem Endomorphismus)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann bildet V bezüglich der Vektorraumaddition und der Abbildung*

$$\begin{aligned} K[T] \times V &\longrightarrow V \\ (p, x) &\longmapsto \big(p(f)\big)(x) \end{aligned}$$

einen $K[T]$-Modul, den zu f assoziierten $K[T]$-Modul $V[f]$.

Beweis. Da V ein K-Vektorraum ist, bildet V bezüglich Addition eine abelsche Gruppe. Es bleiben daher nur die Aussagen über die $K[T]$-Skalarmultiplikation zu zeigen. Diese zeigt man, indem man die beteiligten Definitionen Schritt für Schritt expandiert:

- *Assoziativität:* Seien $p, q \in K[T]$ und $v \in V$. Da der Einsetzungshomomorphismus $K[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ein K-Algebrenhomomorphismus ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} (p \cdot q) \cdot v &= \big((p \cdot q)(f)\big)(v) \\ &= \big(p(f) \circ q(f)\big)(v) \\ &= \big(p(f)\big)\big(\big(q(f)\big)(v)\big) \\ &= \big(p(f)\big)(q \cdot v) \\ &= p \cdot (q \cdot v). \end{aligned}$$

- *Neutrale Skalarmultiplikation:* Sei $v \in V$. Dann gilt für das Einspolynom $E := 1 = T^0 \in K[T]$ wegen $f^0 = \mathrm{id}_V$, dass

$$E \cdot v = \big(E(f)\big)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v.$$

- *Distributivität:* Seien $p, q \in K[T]$ und $v, w \in V$. Analog zur Assoziativität erhalten wir (da die Addition in $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ punktweise definiert ist)

$$\begin{aligned}(p+q)\cdot v &= \big((p+q)(f)\big)(v)\\ &= \big(p(f)+q(f)\big)(v)\\ &= \big(p(f)\big)(v)+\big(q(f)\big)(v)\\ &= p\cdot v + q\cdot v.\end{aligned}$$

Da $p(f)$ eine lineare Abbildung ist, gilt außerdem auch

$$\begin{aligned}p\cdot(v+w) &= \big(p(f)\big)(v+w)\\ &= \big(p(f)\big)(v)+\big(p(f)\big)(w)\\ &= p\cdot v + p\cdot w.\end{aligned}$$

□

2.3.2 Modulhomomorphismen

Modulhomomorphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen Moduln:

Definition 2.3.7 (Modulhomomorphismus)**.** Sei R ein Körper und seien V und W Moduln über R. Eine *R-lineare Abbildung von V nach W* (oder ein *R-Modulhomomorphismus* von V nach W) ist eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $v, v' \in V$ gilt

$$f(v+v') = f(v) + f(v')$$

- und für alle $v \in V$ und alle $a \in R$ gilt

$$f(a\cdot v) = a\cdot f(v).$$

Ein *R-Modulisomorphismus* ist ein Modulhomomorphismus, der einen bezüglich Komposition inversen Modulhomomorphismus besitzt. Wenn es einen R-Modulisomorphismus $V \longrightarrow W$ gibt, so nennen wir V und W isomorph und schreiben dafür $V \cong_R W$.

Die Klasse der Moduln über einem gegebenen Ring bildet zusammen mit den Modulhomomorphismen eine Kategorie (Anhang A.2).

Beispiel 2.3.8.

- Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen sind selbstverständlich auch Modulhomomorphismen.
- Gruppenhomomorphismen abelscher Gruppen (d.h. Abbildungen zwischen abelschen Gruppen, die mit der Addition verträglich sind), sind $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen bezüglich der zugehörigen $\mathbb{Z}$-Modulstruktur aus Beispiel 2.3.3.

- Ist R ein Ring und $m, n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $M_{m\times n}(R)$ für die Menge aller $\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$-indizierten Familien in R. Analog zum Fall von Matrizen über Körpern definieren wir die Matrixmultiplikation für Matrizen über Ringen.

  Ist R ein kommutativer Ring und ist $A \in M_{m\times n}(R)$, so ist

  $$\begin{aligned} L(A)\colon R^n &\longrightarrow R^m \\ x &\longmapsto A\cdot x \end{aligned}$$

  ein R-Modulhomomorphismus (für die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation benötigt man die Kommutativität von R; alternativ kann man auch durch $x \longmapsto (x^{\mathsf{T}}\cdot A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ für allgemeine Ringe Modulhomomorphismen definieren).

Proposition 2.3.9 (Modulhomomorphismen zwischen Endomorphismenmoduln)**.** *Sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K und seien $f\colon V \longrightarrow V$ und $g\colon W \longrightarrow W$ Endomorphismen. Sei $F\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung F ist ein $K[T]$-Modulhomomorphismus $V[f] \longrightarrow W[g]$.*
2. *Es gilt $F\circ f = g\circ F$. In anderen Worten: Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ V & \xrightarrow[F]{} & W \end{array}$$

   ist kommutativ.

Beweis. Es sei F ein $K[T]$-Modulhomomorphismus $V[f] \longrightarrow W[g]$. Dann ist $F\circ f = g\circ F$, denn: Sei $v \in V$. Da F mit der $K[T]$-Skalarmultiplikation verträglich ist, folgt

$$\begin{aligned} g\big(F(v)\big) &= \big(T(g)\big)\big(F(v)\big) \\ &= T\cdot F(v) \\ &= F(T\cdot v) \\ &= F\big((T(f))(v)\big) \\ &= F\big(f(v)\big). \end{aligned}$$

Es gelte umgekehrt $F\circ f = g\circ F$. Dann ist F ein $K[T]$-Modulhomomorphismus, denn: Induktiv folgt aus der Voraussetzung, dass $F\circ f^j = g^j\circ F$ für alle $j\in\mathbb{N}$ gilt. Ist $p = \sum_{j=0}^{m} a_j\cdot T^j \in K[T]$ mit $a_j,\dots,a_m \in R$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(p \cdot v) = F\big((p(f))(v)\big) = F\Big(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot f^j(v)\Big) &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot F\big(f^j(v)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot g^j\big(F(v)\big) \\ &= p \cdot \big(F(v)\big). \end{aligned}$$

Da F als K-lineare Abbildung auch mit Addition verträglich ist, folgt die Behauptung. □

Insbesondere werden also zwei Endomorphismen von Vektorräumen genau dann durch einen Vektorraumisomorphismus ineinander übersetzt, wenn die zugehörigen Moduln über dem Polynomring isomorph sind.

Bemerkung 2.3.10 (Kerne von Modulhomomorphismen)**.** Sei R ein Ring und sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann bezeichnet man

$$\ker f := \big\{x \in V \;\big|\; f(x) = 0\big\} \subset V$$

als *Kern von* f. Es gilt (nachrechnen):

1. Der Kern von f ist ein R-Untermodul von V.
2. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ ist.

Beispiel 2.3.11 (die geraden Zahlen)**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus (wobei $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_2$ als abelsche Gruppen bezüglich Addition bzw. als $\mathbb{Z}$-Moduln auffassen). Also ist $\ker f$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}$. Nach Definition gilt dabei

$$\ker f = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.3.3 Ideale

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Modul- und der Vektorraumtheorie ist die Tatsache, dass der R-Modul R im allgemeinen nicht-triviale Untermoduln besitzen kann. Es ist plausibel, dass solche Untermoduln eine wichtige Rolle bei der Klassifikation der R-Moduln spielen werden. Daher bekommen sie einen eigenen Namen:

Definition 2.3.12 (Ideal)**.** Sei R ein Ring. Ein *(linksseitiges) Ideal* in R ist ein R-Untermodul des R-Moduls R.

Beispiel 2.3.13.

- Ist K ein Körper, so sind $\{0\}$ und K die einzigen Ideale in K (nachrechnen).
- Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist die Teilmenge $n \cdot \mathbb{Z} = \{a \cdot n \mid a \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$ ein Ideal im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen (nachrechnen). Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\{0\} \cup \{2 \cdot k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sind *keine* Ideale in $\mathbb{Z}$.
- Ist K ein Körper, ist V ein K-Vektorraum und ist $U \subset V$, so ist die Menge $\{f \in \mathrm{Hom}_K(V,V) \mid f|_U = 0\}$ ein (linksseitiges) Ideal in $\mathrm{Hom}_K(V,V)$.

Bemerkung 2.3.14 (Kerne als Ideale)**.** Seien R, S Ringe und sei $\varphi\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Dann bezeichnet man

$$\ker\varphi := \big\{x \in R \,\big|\, \varphi(x) = 0\big\} \subset R$$

als *Kern von* φ. Es gilt (nachrechnen!):

1. Der Kern von φ ist ein Ideal in R.
2. Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker\varphi = \{0\}$ ist.

Ausblick 2.3.15. Ideale sind auch noch aus einem weiteren Grund in der Ringtheorie von Bedeutung: Ideale sind nämlich genau die Teilmengen von Ringen, die als Kerne von Ringhomomorphismen auftreten können, und können verwendet werden, um sogenannte Quotientenringe und Quotientenkörper zu konstruieren. Dies werden wir im Rahmen der Körpertheorie in der Algebra systematisch untersuchen.

2.3.4 Quotientenmoduln

Um Moduln insgesamt besser verstehen zu können, benötigen wir außer Untermoduln auch die bereits für Vektorräume bekannten Konstruktionstechniken der Quotientenmoduln und der direkten Summen.

Wir beginnen mit der Definition der Quotientenmoduln; dabei verwenden wir wie im Fall von Vektorräumen eine geeignete Äquivalenzrelation (die alles vergisst, was in dem gegebenen Untermodul passiert, Proposition I.3.4.13 und I.3.4.14):

Proposition 2.3.16 (Quotienten nach Untermoduln)**.** *Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul, sei $U \subset V$ ein Untermodul und sei $\sim_U$ die Relation auf V, die durch*

$$\big\{(v,w) \in V \times V \;\big|\; v - w \in U\big\} \subset V \times V$$

definiert ist. Wir schreiben dann $V/U := V/\sim_U$.

1. *Für alle* $v, w \in V$ *gilt*

$$v \sim_U w \iff v + U = w + U$$

2. *Die Relation* $\sim_U$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* V *.*

3. *Ist* $v \in V$ *, so ist die von* v *repräsentierte Äquivalenzklasse bezüglich* $\sim_U$ *der affine Untermodul* $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$ *.*

Beweis. Der Beweis im Fall von Vektorräumen hat an keiner Stelle verwendet, dass die Skalare aus einem Körper stammen. Daher können wir den Beweis wörtlich übernehmen:
Zu 1. Seien $v, w \in V$. Gilt $v \sim_U w$, so ist $u := v - w \in U$, und damit

$$v + U = (w + u) + U = w + (u + U) = w + U.$$

Gilt umgekehrt $v + U = w + U$, so folgt insbesondere, dass es ein $u \in U$ mit $v + 0 = w + u$ gibt. Dann ist aber

$$v - w = u \in U.$$

Zu 2. Reflexivität von $\sim_U$ ist klar. Symmetrie von $\sim_U$ folgt, da U als Untermodul unter additiven Inversen abgeschlossen ist. Transitivität ergibt sich, da U als Untermodul unter Addition abgeschlossen ist.
Zu 3. Dies ist eine einfach Rechnung (ähnlich zum ersten Teil). □

Proposition 2.3.17 (Quotientenmodul)**.** *Sei* R *ein Ring, sei* V *ein* R*-Modul, sei* $U \subset V$ *ein Untermodul.*

1. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \cdot\colon R \times V/U &\longrightarrow V/U \\ (a, v + U) &\longmapsto (a \cdot v) + U, \\ +\colon V/U \times V/U &\longrightarrow V/U \\ (v + U, w + U) &\longmapsto (v + w) + U \end{aligned}$$

   sind wohldefiniert.

2. *Die Menge* V/U *bildet bezüglich der obigen Skalarmultiplikation und Addition einen* R*-Modul.*

Man bezeichnet dann V/U *mit dieser Struktur als* Quotientenmodul von V nach U *oder auch als* V modulo U *.*

Beweis. Auch in diesem Fall lässt sich der Beweis von Vektorräumen (Proposition I.3.4.14) ohne Schwierigkeiten auf Moduln übertragen. □

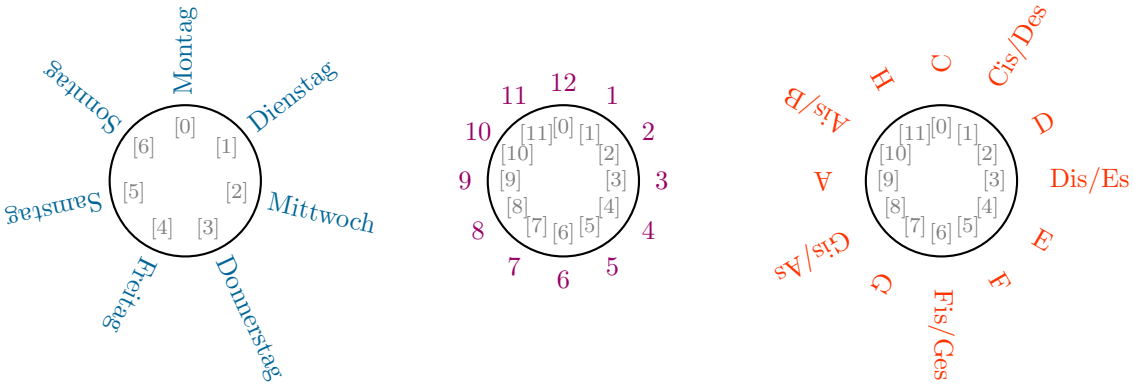


Abbildung 2.1.: Moduln im Alltag

Beispiel 2.3.18. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann ist $n \cdot \mathbb{Z}$ ein Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$. Der Quotientenmodul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/(n \cdot \mathbb{Z})$ besteht dann aus genau n Elementen und die Addition bzw. Skalarmultiplikation erfolgt „modulo n“, d.h. es werden nur die Reste bezüglich Division durch n betrachtet.

Genauer: Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 + n \cdot \mathbb{Z}, 1 + n \cdot \mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + n \cdot \mathbb{Z}\} = \{[0], \ldots, [n-1]\}.$$

Sind $k, m \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $a \in \mathbb{Z}$, so gilt (im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$[k] + [m] = [r] \quad \text{und} \quad a \cdot [k] = [s],$$

wobei r und s die Reste von $k + m$ bzw. $a \cdot k$ bei Division durch n sind.

Der Modul $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ kann verwendet werden, um die Arithmetik von Wochentagen zu simulieren, der Modul $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ kann verwendet werden, um die Arithmetik von Stunden oder Halbtönen (in der gleichstufigen Stimmung) zu modellieren (Abbildung 2.1).

Das Objekt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tritt an verschiedenen Stellen in der Algebra mit leicht unterschiedlichem Fokus auf: so wie hier als $\mathbb{Z}$-Modul oder als Baustein der Gruppentheorie (als abelsche Gruppe) oder als Ring (als Quotientenring des Ideals $n \cdot \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$).

Caveat 2.3.19. Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul und seien $U, W \subset V$ Untermoduln mit $U \cong_R W$. Dann folgt im allgemeinen *nicht*, dass die Quotientenmoduln V/U und V/W isomorph sind!

Zum Beispiel sind die Untermoduln $\mathbb{Z}$ und $2 \cdot \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln isomorph, aber $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ hat nur ein Element, wohingegen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aus genau zwei Elementen besteht.

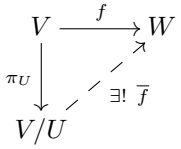
Statt mit der Konstruktion von Quotientenmoduln bietet es sich oft an, mit der universellen Eigenschaft bzw. mit dem Homomorphiesatz zu arbeiten:

Satz 2.3.20 (universelle Eigenschaft von Quotienten)**.** *Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann besitzt der Quotientenmodul V/U zusammen mit der kanonischen Projektion*

$$\begin{aligned} \pi_U \colon V &\longrightarrow V/U \\ v &\longmapsto v + U \end{aligned}$$

die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden R-Modul W und jeden Modulhomomorphismus $f \colon V \longrightarrow W$ mit $U \subset \ker f$ gibt es genau einen Modulhomomorphismus $\overline{f} \colon V/U \longrightarrow W$ mit

$$\overline{f} \circ \pi_U = f.$$



In anderen Worten: Für jeden R-Modul W ist die R-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(\pi_U, W) \colon \operatorname{Hom}_R(V/U, W) &\longrightarrow \left\{ f \in \operatorname{Hom}_R(V, W) \;\middle|\; f|_U = 0 \right\} \\ g &\longmapsto g \circ \pi_U \end{aligned}$$

zwischen den entsprechenden Homomorphismenräumen bijektiv (und somit ein Isomorphismus von R-Moduln).

Beweis. Der Beweis für den Vektorraumfall funktioniert auch für Moduln: Sei $f \colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus mit $U \subset \ker f$.

- *Existenz von $\overline{f}$:* Die Abbildung

  $$\begin{aligned} \overline{f} \colon V/U &\longrightarrow W \\ v + U &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

  ist wegen $U \subset \ker f$ wohldefiniert und außerdem R-linear (nachrechnen). Nach Konstruktion ist $\overline{f} \circ \pi_U = f$.

- *Eindeutigkeit von $\overline{f}$:* Die Eindeutigkeit folgt, da π_U surjektiv ist. □

Satz 2.3.21 (Homomorphiesatz für Moduln)**.** *Sei R ein Modul und sei $f \colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann ist*

$$\begin{aligned} \overline{f} \colon V/\ker f &\longrightarrow \operatorname{im} f := \left\{ f(v) \;\middle|\; v \in V \right\} \\ v + \ker f &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

ein (wohldefinierter!) Isomorphismus von R-Moduln.

Beweis. Dies können wir wie im Vektorraumfall beweisen: Nach Definition von $\ker f$ ist $\overline{f}$ wohldefiniert. Da R-lineare Abbildungen genau dann Modulisomorphismen sind, wenn sie bijektiv sind (das ist die Modulversion von Proposition I.4.4.8), genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{im}\overline{f} = \operatorname{im} f$ und $\ker\overline{f} = \{0 + \ker f\}$ gilt:

- *Bild* von $\overline{f}$: Nach Konstruktion ist $\operatorname{im}\overline{f} = \operatorname{im} f$.
- *Kern* von $\overline{f}$: Es gilt

$$\begin{aligned}\ker\overline{f} &= \{v + \ker f \mid f(v) = 0\}\\ &= \{v + \ker f \mid v \in \ker f\}\\ &= \{0 + \ker f\}.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.3.22 (zyklische Moduln)**.** *Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der R-Modul V ist* zyklisch*, d.h. von einem Element erzeugt.*
2. *Es gibt ein Ideal $A \subset R$ mit $V \cong_R R/A$.*

Beweis. Sei V zyklisch, d.h. es gibt ein $v \in V$ mit $V = \operatorname{Span}_R\{v\} = R \cdot v$. Also ist

$$\begin{aligned}f\colon R &\longrightarrow V\\ a &\longmapsto a \cdot v\end{aligned}$$

ein surjektiver R-Modulhomomorphismus und mit dem Homomorphiesatz (Satz 2.3.21) folgt, dass das Ideal $A := \ker f \subset R$ die Eigenschaft

$$R/A = R/\ker f \cong_R \operatorname{im} f = V$$

besitzt.

Es gebe umgekehrt ein Ideal $A \subset R$ mit $V \cong_R R/A$; sei $f\colon R/A \longrightarrow V$ ein R-Modulisomorphismus. Wegen $R/A = \operatorname{Span}_R\{1 + A\}$ ist R/A von einem Element erzeugt. Da f surjektiv und R-linear ist, ist dann auch das Bild $V = \operatorname{im} f = \operatorname{Span}_R\{f(1 + A)\}$ von einem Element erzeugt (und damit zyklisch). □

Der Begriff des zyklischen Moduls ist dabei natürlich an das Beispiel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (Beispiel 2.3.18, Abbildung 2.1) angelehnt.

2.3.5 Direkte Summen

Wie Vektorräume lassen sich auch Moduln durch direkte Summen kombinieren. Statt nur die direkte Summe von zwei Moduln einzuführen, werden wir uns gleich mit allgemeinen direkten Summen befassen:

Definition 2.3.23 (direktes Produkt/direkte Summe)**.** Sei R ein Ring, sei I eine Menge und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln.

- Die Menge

$$\prod_{i\in I} V_i := \Big\{ f \in \mathrm{Abb}\Big(I, \bigcup_{i\in I} V_i\Big) \;\Big|\; \forall_{i\in I} \quad f(i) \in V_i \Big\}$$

ist bezüglich komponentenweiser Addition bzw. Skalarmultiplikation ein R-Modul, das *Produkt der* $(V_i)_{i\in I}$. Die Elemente von $\prod_{i\in I} V_i$ notieren wir oft statt als Abbildungen auch als Familien $(x_i)_{i\in I}$ (wobei dann $x_i \in V_i$ für jedes $i \in I$ gilt).

Ist $j \in I$, so schreiben wir

$$\begin{aligned} \pi_j \colon \prod_{i\in I} V_i &\longrightarrow V_j \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

für die *Projektion auf den j-ten Faktor* und

$$\begin{aligned} i_j \colon V_j &\longmapsto \prod_{i\in I} V_i \\ x &\longmapsto \left(i \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \right) \end{aligned}$$

für die *Inklusion des j-ten Faktors.*

- Die Menge

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \Big\{ f \in \prod_{i\in I} V_i \;\Big|\; \text{es gibt eine endliche Menge } J \subset I \text{ mit } f|_{I\setminus J} = 0 \Big\}$$

ist ein Untermodul von $\prod_{i\in I} V_i$, die *direkte Summe der* $(V_i)_{i\in I}$.

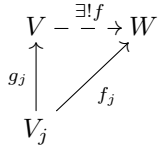
Ist $j \in I$, so schreiben wir auch $i_j \colon V_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$ für die *Inklusion des j-ten Summanden.*

Ist die Indexmenge I eine zweielementige Menge, so erhält man im Vektorraumfall genau die Definition der direkten Summe zweier Vektorräume und wir werden auch im Modulfall $V \oplus W$ für die direkte Summe zweier Moduln U und W (über demselben Grundring) schreiben.

Direkte Summen werden durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert, die es ermöglicht, Homomorphismen *aus* direkten Summen *heraus* zu konstruieren, indem man den Homomorphismus auf jedem Summanden vorgibt:

Satz 2.3.24 (universelle Eigenschaft der direkten Summe)**.** *Sei R ein Ring und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Wir sagen, dass ein Modul V zusammen mit Modulhomomorphismen $(g_i\colon V_i \to V)_{i\in I}$ die* universelle Eigenschaft der direkten Summe *$\bigoplus_{i\in I} V_i$ besitzt, wenn folgendes gilt: Für jeden R-Modul W und jede Familie $(f_i\colon V_i \to W)_{i\in I}$ von Modulhomomorphismen gibt es genau einen Modulhomomorphismus $f\colon V \longrightarrow W$ mit*

$$\forall_{i\in I} \quad f \circ g_i = f_i.$$



Dann gilt:

1. *Die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$ erfüllt zusammen mit den kanonischen Inklusionen $(i_j)_{j\in I}$ der Summanden die universelle Eigenschaft der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$.*

2. *Erfüllt ein R-Modul V zusammen mit Modulhomomorphismen $(g_i)_{i\in I}$ die universelle Eigenschaft der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$, so gibt es genau einen Modulisomorphismus $f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow V$ mit*

$$\forall_{j\in I} \quad f \circ i_j = g_j.$$

Beweis. Zu 1. Sei $(f_i\colon V_i \longrightarrow W)_{i\in V}$ eine Familie von Modulhomomorphismen.

- *Existenz von f:* Es ist

$$\begin{aligned} f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i &\longmapsto W \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} f_i(x_i) \end{aligned}$$

  ein wohldefinierter (man beachte, dass jede der Summen auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden ungleich Null besitzt) R-Modulhomomorphismus. Nach Konstruktion gilt dabei für alle $j \in I$ und alle $x \in V_j$, dass

$$f \circ i_j(x) = f_j(x_i);$$

  also ist $f \circ i_j = f_j$.

- *Eindeutigkeit von f:* Da $\bigoplus_{i\in I} V_i$ nach Konstruktion von $\bigcup_{j\in I} \operatorname{im} i_j$ erzeugt wird, folgt die Eindeutigkeit.

Zu 2. Wir folgen dem Kinderlied *Brüderchen, komm tanz mit mir*: („... einmal hin, einmal her, rundherum das ist nicht schwer ... "):

- *„einmal hin":* Da $\bigoplus_{i\in I} V_i$ (mit $(i_j)_{j\in I}$) die universelle Eigenschaft der direkten Summe erfüllt, gibt es einen eindeutig bestimmten Modulhomomorphismus $f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow W$ mit

$$\forall_{j\in I} \quad f \circ i_j = g_j.$$

- *„einmal her":* Da V (mit $(g_i)_{i\in I}$) die universellen Eigenschaft der direkten Summe erfüllt, gibt es einen Modulhomomorphismus $g\colon V \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$ mit

$$\forall_{j\in I} \quad g \circ g_j = i_j.$$

- *„rundherum, das ist nicht schwer":* Nach Konstruktion gilt für alle $j \in I$, dass

$$(f \circ g) \circ g_j = g_j = \mathrm{id}_V \circ g_j \quad \text{und} \quad (g \circ f) \circ i_j = i_j = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I} V_i} \circ i_j.$$

  Wenden wir die Eindeutigkeitsaussage aus der universellen Eigenschaft auf $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ an, so erhalten wir daraus

$$f \circ g = \mathrm{id}_V \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I} V_i}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Ausblick 2.3.25 (Koprodukt)**.** Die universelle Eigenschaft der direkten Summe lässt sich nicht nur für Moduln, sondern auch in anderen Kategorien formulieren. Dies führt zum Begriff des Koprodukts (Anhang A.3).

Caveat 2.3.26 (Produkte vs. Summen)**.** Sei R ein Ring und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Ist die Menge I unendlich, so unterscheidet sich die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$ vom direkten Produkt $\prod_{i\in I} V_i$ im allgemeinen bereits in der Mächtigkeit, aber auch in der universellen Eigenschaft: Die universelle Eigenschaft des direkten Produktes beschreibt Homomorphismen *in* das Produkt *hinein*. Homomorphismen aus Produkten heraus können nur in speziellen Situationen konstruiert werden.

Mithilfe der direkten Summen können wir auch einen Unzerlegbarkeitsbegriff für Moduln einführen:

Definition 2.3.27 (zerlegbarer/unzerlegbarer Modul)**.** Sei R ein Ring und V ein R-Modul.

- Der R-Modul V ist *zerlegbar*, wenn es R-Moduln U, W mit $U \ncong_R \{0\}$, $W \ncong_R \{0\}$ und

$$V \cong_R U \oplus W$$

  gibt.

- Der R-Modul V ist *unzerlegbar*, wenn er nicht zerlegbar ist.

Vektorräume sind also genau dann unzerlegbar, wenn ihre Dimension höchstens 1 ist. Der Modulfall ist unübersichtlicher:

Caveat 2.3.28 (komplementäre Untermoduln)**.** Untermoduln besitzen im allgemeinen *keine* Komplemente: Ist R ein Ring, V ein R-Modul und $U \subset V$ ein Untermodul, so gibt es im allgemeinen *keinen* Untermodul $W \subset V$ mit $V \cong_R U \oplus W$ (wobei der Isomorphismus von den Inklusionen induziert wird).

Zum Beispiel besitzt der Untermodul $2 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ *kein* Komplement im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$.

Die universelle Eigenschaft der direkten Summe erinnert an die universelle Eigenschaft von Basen in Vektorräumen (Satz I.4.3.1).

Definition 2.3.29 (Basis eines Moduls, freier Modul)**.** Sei R ein Ring und V ein R-Modul.

- Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist *linear unabhängig (über R)*, wenn folgendes gilt: für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ und alle Familien $(a_j)_{j\in J}$ in R mit $\sum_{j\in J} a_j \cdot v_j = 0$ folgt bereits
$$\forall_{j\in J} \quad a_j = 0.$$
- Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist eine *R-Basis von V*, wenn sie über R linear unabhängig ist und V als R-Modul erzeugt.
- Der R-Modul V ist *frei*, wenn er eine Basis besitzt.

Beispiel 2.3.30.

- Jeder Vektorraum ist ein freier Modul über seinem Grundkörper, da jeder Vektorraum eine Basis besitzt (Satz I.3.3.21).
- Ist R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$, so ist der R-Modul R^n frei (die Ringversion der Standardbasis ist eine R-Basis von R^n).
- Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist *nicht* frei: Jeder nicht-triviale freie $\mathbb{Z}$-Modul muss natürlich mindestens $|\mathbb{Z}|$ Elemente enthalten. Aber $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besteht nur aus genau zwei Elementen.

Proposition 2.3.31 (freie Moduln als direkte Summen)**.** *Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul V ist frei.*
2. *Es gibt eine Menge I mit $V \cong_R \bigoplus_I R$.*

Beweis. Jede Basis von V kann für eine direkte Summenzerlegung verwendet werden; umgekehrt liefern die „Standardeinheitsvektoren“ in Moduln der Form $\bigoplus_I R$ eine Basis (Übungsaufgabe). □

Die Klassifikation der Vektorräume beruht auf dem Dimensionsbegriff. Für Moduln ist die Lage im allgemeinen deutlich komplizierter:

Caveat 2.3.32 (Dimension von Moduln)**.** Im allgemeinen gibt es *keine* vernünftige Dimensionstheorie für Moduln:

- Nicht jeder Modul ist frei! Zum Beispiel ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kein freier $\mathbb{Z}$-Modul.
- Es gibt Moduln über bestimmten Ringen, die Basen verschiedener Länge besitzen.

Wir haben nun die für uns wichtigen Bausteine für Moduln eingeführt (Quotientenmoduln, freie Moduln, direkte Summen). Als nächsten Schritt benötigen wir zunächst etwas Ringtheorie.

Anmerkung zum Lernen. Vergleichen Sie das, was Sie über Vektorräume wissen, mit der bereits entwickelten Modultheorie. Fällt es Ihnen jetzt leichter, die Konzepte, Konstruktionen und Beispiele aus der Linearen Algebra I zu verstehen?

2.4 Hauptidealringe

Allgemeine Ringe sind zu wild um eine sinnvolle vollständige Klassifikation ihrer Moduln zu ermöglichen. Da eine Klassifikation der Moduln auch ein gewisses Verständnis der Ideale des Grundrings mit einschließt, ist es naheliegend, sich auf Ringe zu beschränken, deren Ideale nicht zu kompliziert sind. Nach den Körpern die einfachste solche Klasse ist die Klasse der sogenannten Hauptidealringe.

2.4.1 Hauptidealringe

Definition 2.4.1 (erzeugtes Ideal, Hauptideal, Hauptidealring)**.** Sei R ein Ring.

- Ist $S \subset R$ eine Teilmenge, so schreibt man auch kurz $(S) := \operatorname{Span}_R S$ für das *von S erzeugte Ideal in R*.
- Die Ideale in R, die von einem einzelnen Element erzeugt werden, bezeichnet man als *Hauptideale*.
- Ein *Hauptidealring* ist ein Integritätsring, in dem alle Ideale Hauptideale sind.

Bemerkung 2.4.2 (einfache Beschreibung von Hauptidealen)**.** Sei R ein Ring und $a \in R$. Dann ist das von a erzeugte Hauptideal in R nichts anderes als

$$(a) = \mathrm{Span}_R\{a\} = R \cdot a = \{s \cdot a \mid s \in R\},$$

d.h. die Menge aller (Links-)Vielfachen von a.

Beispiel 2.4.3.

- Körper sind Hauptidealringe, denn: Ist K ein Körper, so sind $\{0\} = (0)$ und $K = (1)$ die einzigen Ideale in K.
- Der Polynomring $\mathbb{Z}[T]$ der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten ist *kein* Hauptidealring; zum Beispiel ist das Ideal $(2, T)$, das von 2 und T erzeugt wird, *kein* Hauptideal (nachrechnen).
- Wir werden sehen, dass $\mathbb{Z}$ und Polynomringe über Körpern Hauptidealringe sind (Kapitel 2.4.2).

2.4.2 Euklidische Ringe

Wie können wir beweisen, dass $\mathbb{Z}$ und Polynomringe über Körpern Hauptidealringe sind? Die grundlegende Idee dazu ist, Division mit Rest zu nutzen. Wir werden dies nun formalisieren:

Definition 2.4.4 (euklidischer Ring)**.** Sei R ein kommutativer, nullteilerfreier Ring.

- Eine *euklidische Gradfunktion* auf R ist eine Abbildung $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ mit: Für alle $a \in R$ und alle $b \in R \setminus \{0\}$ gibt es $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r \quad \text{und} \quad \big[\delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0\big].$$

- Der Ring R ist ein *euklidischer Ring*, wenn er eine euklidische Gradfunktion besitzt.

Da euklidische Ringe eine Verallgemeinerung großer Teile der elementaren Zahlentheorie (in $\mathbb{Z}$) erlauben, die auch von Euklid untersucht wurde, tragen auch diese Strukturen den Namen Euklids.

Beispiel 2.4.5 (die ganzen Zahlen als euklidischer Ring)**.** Die Abbildung (wobei $|\cdot|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ bezeichnet)

$$\begin{aligned} \delta\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

ist eine euklidische Gradfunktion auf $\mathbb{Z}$, denn: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Wir betrachten nur den Fall $a, b > 0$ (die anderen Fälle gehen analog). Sei

$$s := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot b \leq a\}.$$

Wegen $b \neq 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot b < a\}$ endlich; außerdem enthält diese Menge 0 und ist somit nicht-leer. Das Maximum existiert somit. Nach Konstruktion hat dabei

$$r := a - s \cdot b$$

die Eigenschaft $r \in \{0, \ldots, b-1\}$ und daher ist die Darstellung $a = s \cdot b + r$ von der gewünschten Form.

Insbesondere zeigt dies auch rigoros, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], \ldots, [n-1]\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt (Bespiel 2.3.18).

Proposition 2.4.6 (Polynomringe als euklidische Ringe)**.** *Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[T]$ ein euklidischer Ring bezüglich der modifizierten Gradabbildung* $\max(\deg, 0)\colon K[T] \longrightarrow \mathbb{N}$.

Beweis. Wir schreiben $\delta := \max(\deg, 0)\colon K[T] \longrightarrow \mathbb{N}$. Der Beweis, dass δ eine euklidische Gradfunktion ist, verwendet die sogenannte *Polynomdivision*, die wie folgt algorithmisch durchgeführt werden kann:

Seien $a, b \in K[T]$ mit $b \neq 0$. Wir zeigen per Induktion über $\delta(a) \in \mathbb{N}$, dass es $r, s \in K[T]$ mit $a = s \cdot b + r$ und $\delta(r) < \delta(b)$ (oder sogar $r = 0$) gibt.

- *Induktionsanfang.* Ist $a = 0$, so ist $a = 0 \cdot b + 0$ eine Darstellung der gewünschten Form.

  Ist $\delta(a) < \delta(b)$, so ist $a = 0 \cdot b + a$ eine Darstellung der gewünschten Form.

- *Induktionsvoraussetzung.* Sei $\delta(a) > 0$ und für alle $a' \in K[T]$ mit $\delta(a') < \delta(a)$ gebe es $r', s' \in K[T]$ mit $a' = s' \cdot b + r'$ und $\delta(r') < \delta(b)$ (oder sogar $r' = 0$).

- *Induktionsschritt.* Wir schreiben

  $$b = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot T^j \quad \text{und} \quad a = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j$$

  mit $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in K$ und $a_m \neq 0 \neq b_n$. Wegen $b_n \neq 0$ können wir das Polynom (Elimination der höchsten T-Potenz aus a)

  $$a' := a - \frac{a_m}{b_n} \cdot T^{m-n} \cdot b \in K[T]$$

  definieren; nach Konstruktion ist $\delta(a') < m = \delta(a)$ und

  $$a = a' + \frac{a_m}{b_n} \cdot T^{m-n} \cdot b.$$

  Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $r', s' \in K[T]$ mit $a' = s' \cdot b + r'$ und $\delta(r') < \delta(b)$ (oder sogar $r' = 0$). Damit ist

  $$a = \left(s' + \frac{a_m}{b_n} \cdot T^{m-n}\right) \cdot b + r'$$

eine Darstellung der gewünschten Form. □

Beispiel 2.4.7 (Polynomdivision)**.** Dividieren wir $T^3 - 1$ in $\mathbb{Q}[T]$ mit Rest durch $T + 2$, so erhalten wir $T^2 - 2 \cdot T + 4$ mit Rest -9, denn

$$T^3 - 1 = (T + 2) \cdot (T^2 - 2 \cdot T + 4) - 9.$$

Von Hand kann man dies wie folgt bestimmen:

$$\begin{array}{rl}
 & T^3 + 0 \cdot T^2 + 0 \cdot T - 1 = (T+2) \cdot (1 \cdot T^2 - 2 \cdot T + 4) - 9 \\
- & (\ T^3 + 2 \cdot T^2\ ) \\
\hline
 & \quad - 2 \cdot T^2 + 0 \cdot T - 1 \\
 & - (\ - 2 \cdot T^2 - 4 \cdot T\ ) \\
\hline
 & \qquad + 4 \cdot T - 1 \\
 & \quad - (\ + 4 \cdot T + 8\ ) \\
\hline
 & \qquad - 9
\end{array}$$

Proposition 2.4.8 (euklidische Ringe sind Hauptidealringe)**.** *Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.*

Beweis. Sei R ein euklidischer Ring mit eukildischer Gradfunktion $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ und sei $A \subset R$ ein Ideal. Ohne Einschränkung sei $A \neq \{0\}$. Wir betrachten ein Element $b \in A$ mit

$$\delta(b) = \min\big\{\delta(a) \;\big|\; a \in A \setminus \{0\}\big\} \in \mathbb{N};$$

ein solches Element existiert, da $A \setminus \{0\}$ nicht-leer ist und $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist. Dann gilt

$$A = \mathrm{Span}_R\{b\},$$

denn: Wegen $b \in A$ ist $\mathrm{Span}_R\{b\} \subset A$. Sei umgekehrt $a \in A$. Da δ eine euklidische Gradfunktion ist, gibt es $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r \quad \text{und} \quad \big[\delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0\big].$$

Wegen $r = a - s \cdot b$ und $a, b \in A$ folgt auch $r \in A$. Aufgrund der Minimalität von b bezüglich δ erhalten wir daraus $r = 0$. Also ist $a = s \cdot b \in \mathrm{Span}_R\{b\}$. □

Korollar 2.4.9.

1. *Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Hauptidealring.*
2. *Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ ein Hauptidealring.*

Beweis. Sowohl $\mathbb{Z}$ als auch $K[T]$ sind euklidische Ringe (Beispiel 2.4.5, Proposition 2.4.6). Also sind diese Ringe insbesondere auch Hauptidealringe (Proposition 2.4.8). □

Caveat 2.4.10. *Nicht* jeder Hauptidealring ist ein euklidischer Ring!

2.4.3 Teilbarkeit und Primfaktoren

Um Ideale und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Idealen in Hauptidealringen bzw. deren Quotientenmoduln besser zu verstehen, ist es hilfreich, sich mit der Teilbarkeit von Elementen auseinanderzusetzen.

Definition 2.4.11 (Einheit, assoziiert, teilt, irreduzibel, prim)**.** Sei R ein Integritätsring.

- Ein Element $a \in R$ ist eine *Einheit*, wenn es $b \in R$ mit $a \cdot b = 1$ und $b \cdot a = 1$ gibt. Wir schreiben $R^\times$ für die Gruppe (bezüglich Multiplikation!) der Einheiten von R.
- Elemente $a, b \in R$ heißen *assoziiert*, wenn es eine Einheit $s \in R^\times$ mit $a = s \cdot b$ gibt.
- Ein Element $b \in R$ *teilt* ein Element a, wenn es ein $s \in R$ mit $a = s \cdot b$ gibt. In diesem Fall schreibt man auch kurz $b \mid a$ („b teilt a“).
- Ein Element $a \in R \setminus \{0\}$ ist *irreduzibel*, wenn a keine Einheit ist und folgendes gilt: Für alle $x, y \in R$ mit $a = x \cdot y$ ist $x \in R^\times$ oder $y \in R^\times$.
- Ein Element $p \in R \setminus \{0\}$ ist *prim*, wenn p keine Einheit ist und folgendes gilt:
$$\forall_{x,y \in R} \quad p \mid x \cdot y \Longrightarrow (p \mid x \vee p \mid y).$$

Caveat 2.4.12 (Primzahlen aus der Schule)**.** Die Definition von Primzahlen aus der Schule entspricht der obigen Definition von irreduziblen Elementen; wir werden sehen, dass dies im Fall der ganzen Zahlen zur obigen Definition von Primelementen äquivalent ist (Proposition 2.4.17). In allgemeinen Ringen ist dies jedoch nicht zutreffend. Der Grund für die obige Definition von Primelementen ist, dass sie die Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen liefert (Bemerkung 2.4.20).

Beispiel 2.4.13.

- Ist K ein Körper, so gilt $K = \{0\} \cup K^\times$. Also enthalten Körper *keine* Primelemente.
- Die Zahl $2017 \in \mathbb{Z}$ ist irreduzibel (nachrechnen).
- Die Zahl $10 \in \mathbb{Z}$ ist *nicht* prim, denn $10 \mid 2 \cdot 5$, aber 10 teilt weder 2 noch 5.
- Das Polynom $T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$ ist irreduzibel (jeder Teiler müsste linear sein, was aber zu reellen Nullstellen führen würde). In $\mathbb{C}[T]$ gilt
$$T^2 + 1 = (T + i) \cdot (T - i)$$

und $T+i, T-i \notin \mathbb{C}[T]^\times$; das Polynom T^2+1 ist also in $\mathbb{C}[T]$ *nicht* irreduzibel.

- Ist K ein Körper und $\lambda \in K$, so ist $T-\lambda$ in $K[T]$ irreduzibel (aus Gradgründen).

Proposition 2.4.14 (Nullstellen vs. Linearfaktoren)**.** *Sei K ein Körper, sei $f \in K[T]$ und sei $\lambda \in K$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist λ eine Nullstelle von f, d.h. $f(\lambda) = 0$.*
2. *Es gilt $(T-\lambda) \mid f$ in $K[T]$.*

Beweis. Sei λ eine Nullstelle von f. Dann ist $T-\lambda$ ein Teiler von f, denn: Mithilfe von Polynomdivision erhalten wir $r, s \in K[T]$ mit

$$f = s \cdot (T-\lambda) + r \quad \text{und} \quad \deg r < 1.$$

Also ist r ein konstantes Polynom. Wegen

$$0 = f(\lambda) = s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda) + r(\lambda) = r(\lambda)$$

ist somit $r = 0$. Also ist $T-\lambda$ ein Teiler von f.

Ist umgekehrt $T-\lambda$ ein Teiler von f, so gibt es ein $s \in K[T]$ mit $f = s \cdot (T-\lambda)$. Insbesondere ist dann

$$f(\lambda) = s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda) = s(\lambda) \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Bemerkung 2.4.15 (Teilbarkeit und Ideale)**.** Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. Teilbarkeit und Assoziiertheit lassen sich dann wie folgt durch die zugehörigen Hauptideale (a) und (b) ausdrücken (nachrechnen):

1. Es gilt genau dann $b \mid a$, wenn $(a) \subset (b)$ ist.
2. Es gilt genau dann $(a) = (b)$, wenn a und b assoziiert sind.

Beispiel 2.4.16. Wir betrachten die Elemente $1, 2, 3, 6$ in $\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$1 \mid 2, \quad 1 \mid 3, \quad 1 \mid 6, \quad 2 \mid 6, \quad 3 \mid 6$$

und es bestehen keine weiteren Teilbarkeiten. Dies liefert entsprechende Inklusionsbeziehungen zwischen den zugehörigen Hauptidealen und kanonischen Projektionen zwischen den zugehörigen zyklischen Moduln (Abbildung 2.2) .

Die Definition von Primelementen ist in der Praxis nicht leicht nachzuprüfen. In Hauptidealringen ist aber prim zu sein äquivalent dazu irreduzibel zu sein. In vielen Fällen kann man so zeigen, dass gegebene Elemente prim sind.

Proposition 2.4.17 (irreduzibel vs. prim)**.** *Sei R ein Integritätsring und sei $a \in R \setminus \{0\}$ keine Einheit.*

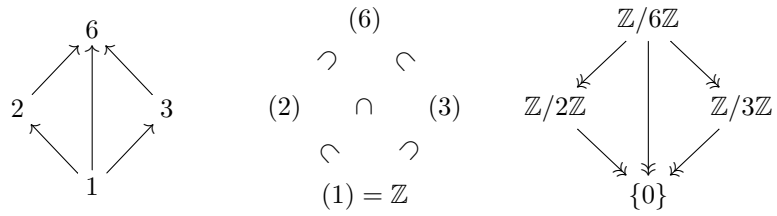


Abbildung 2.2.: Teilbarkeit, Idealinklusionen, kanonische Projektionen zwischen den zugehörigen zyklischen Moduln; links bedeuten dabei die Pfeile „ist ein Teiler von“.

1. *Ist a prim, so ist a auch irreduzibel.*
2. *Ist R ein Hauptidealring und ist a irreduzibel, so ist a bereits prim.*

Beispiel 2.4.18.

- Die Zahl $2017 \in \mathbb{Z}$ ist irreduzibel, und somit prim (da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist).
- Das Polynom $T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$ ist irreduzibel, und somit prim (da $\mathbb{R}[T]$ ein Hauptidealring ist).

  Da das Polynom $T^2 + 1 \in \mathbb{C}[T]$ *nicht* irreduzibel ist, ist es insbesondere auch nicht prim.
- Ist K ein Körper und $\lambda \in K$, so ist das Polynom $T - \lambda \in K[T]$ irreduzibel, und somit prim (da $K[T]$ ein Hauptidealring ist).

Literaturaufgabe (Primzahlen)**.** Die ersten (positiven) Primzahlen in $\mathbb{Z}$ lauten:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ \ldots$$

Bereits Euklid konnte rigoros nachweisen, dass es unendlich viele Primzahlen in $\mathbb{Z}$ gibt. Lesen Sie im Buch *Proofs from The Book* [1, Chapter 1] das Kapitel über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in $\mathbb{Z}$. Welcher Beweis gefällt Ihnen am besten?

Beweis (von Proposition 2.4.17). Zu 1. Sei a prim und seien $x, y \in R$ mit $a = x \cdot y$. Da a prim ist, folgt $a \mid x$ oder $a \mid y$. Ohne Einschränkung gelte $a \mid y$, d.h. es gibt ein $s \in R$ mit $y = s \cdot a$. Damit erhalten wir

$$a = x \cdot y = x \cdot s \cdot a.$$

Da R nullteilerfrei und $a \neq 0$ ist, folgt $x \cdot s = 1$. Also ist x eine Einheit. Somit ist a irreduzibel.

Zu 2. Sei R ein Hauptidealring und sei a irreduzibel. Dann ist a bereits prim, denn: Seien $x, y \in R$ mit $a \mid x \cdot y$. Um die Voraussetzung, dass R ein Hauptidealring ist, nutzen zu können, liegt es nahe, ein geeignetes Ideal zu untersuchen. Wir betrachten das Ideal

$$A := (a, x) = \mathrm{Span}_R\{a, x\} \subset R.$$

Da R ein Hauptidealring ist, ist A ein Hauptideal; also gibt es ein $z \in R$ mit $A = (z) = R \cdot z$. Wegen $a \in A$ und $x \in A$ folgt somit

$$z \mid a \quad \text{und} \quad z \mid x.$$

Insbesondere gibt es ein $s \in R$ mit $a = s \cdot z$. Da a irreduzibel ist, ist s oder z eine Einheit. Wir betrachten nun diese beiden Fälle:

① Es sei s eine Einheit. Dann ist $z = s^{-1} \cdot a$. Wegen $z \mid x$ erhalten wir somit auch $a \mid x$.

② Es sei z eine Einheit. Dann ist

$$R = R \cdot z = (z) = A = \mathrm{Span}_R\{a, x\}.$$

Insbesondere gibt es also $r, t \in R$ mit

$$1 = r \cdot a + t \cdot x.$$

Multiplikation mit y liefert

$$y = r \cdot a \cdot y + t \cdot x \cdot y.$$

Da a beide Summanden auf der rechten Seite teilt, ist somit a ein Teiler von y.

Insgesamt erhalten wir $a \mid x$ oder $a \mid y$. Es handelt sich bei a also um ein Primelement. □

In der elementaren Zahlentheorie (d.h. der Theorie der Arithmetik von $\mathbb{Z}$) sind die Primelemente die grundlegenden Bausteine: jede ganze Zahl außer 0, 1, -1 lässt sich (eindeutig) als Produkt von Primzahlen schreiben. Wir werden dies im folgenden ganz allgemein für jeden Hauptidealring beweisen.

Definition 2.4.19 (faktoriell)**.** Ein *faktorieller Ring* ist ein Integritätsring R, in dem sich jedes Element aus $R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$ als endliches Produkt von Primelementen schreiben lässt.

Bemerkung 2.4.20 (Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen)**.** Primfaktorzerlegungen sind (wenn sie existieren) im wesentlichen eindeutig: Sei R ein Integritätsring und seien $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m \in R$ Primelemente mit

$$\prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{j=1}^{m} q_j.$$

Dann folgt $n = m$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in R^\times$ mit

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,n\}} \quad p_j = \varepsilon_j \cdot q_{\sigma(j)}.$$

Man kann diese Aussage per Induktion über n aus der definierenden Eigenschaft von Primelementen ableiten (Übungsaufgabe).

Satz 2.4.21 (Hauptidealringe sind faktoriell)**.** *Jeder Hauptidealring ist faktoriell. Jede nicht-triviale Nicht-Einheit in einem Hauptidealring besitzt also eine im wesentlichen eindeutige Primfaktorzerlegung.*

Die naheliegende Idee des Beweises ist, Elemente schrittweise in Primfaktoren zu zerlegen: Ist das betrachtete Element irreduzibel, so ist es (da wir uns in einem Hauptidealring befinden) bereits prim. Ist es nicht irreduzibel, so kann es als Produkt zweier Nicht-Einheiten geschrieben werden, die man nach demselben Verfahren weiter zerlegen kann. Es bleibt jedoch noch nachzuweisen, dass dieses Verfahren tatsächlich nach endlich vielen Schritten terminiert. Wir werden den Beweis etwas abstrakter wie folgt formulieren:

Beweis. Sei R ein Hauptidealring. Sei $Q \subset R$ die Menge aller Elemente $a \in R\backslash(\{0\}\cup R^\times)$, die *nicht* als endliches Produkt von Primelementen geschrieben werden können. Wir betrachten dann die Menge $S := \{(a) \mid a \in Q\}$ der zugehörigen Hauptideale und zeigen, dass $S = \emptyset$ ist:

Angenommen, S wäre nicht-leer. Aus Lemma 2.4.22 folgt dann, dass S Elemente enthält, die bezüglich Inklusion maximal sind, d.h. es gibt ein $A \in S$ mit:

$$\forall_{B\in S} \quad A \subset B \Longrightarrow A = B.$$

Etwas genauer: *Angenommen,* es gäbe kein maximales Element in $S \neq \emptyset$. Sei $A_0 \in S$. Da A_0 nicht maximal ist, existiert ein $A_1 \in S$ mit $A_0 \subset A_1$ und $A_1 \neq A_0$. Da auch A_1 nicht maximal ist, gibt es dann ein $A_2 \in S$ mit .... Dies liefert eine echt aufsteigende Kette $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Idealen in R, im Widerspruch zu Lemma 2.4.22. Strenggenommen haben wir bei der Konstruktion der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine etwas schwächere Variante des Auswahlaxioms, *Axiom of Dependent Choice*, verwendet. Also enthält S ein maximales Element A.

Sei nun $a \in Q$ mit $A = (a)$. Wegen $a \in Q$ ist a insbesondere *kein* Primelement und daher (da R ein Hauptidealring ist) auch nicht irreduzibel. Es gibt also $x, y \in R \setminus R^\times$ mit

$$a = x \cdot y.$$

Wegen $a \in Q$ ist auch $x \in Q$ oder $y \in Q$. Ohne Einschränkung sei $x \in Q$. Aus $x \mid a$ erhalten wir aber $A = (a) \subset (x)$. Da A in S maximal ist, folgt $(a) = (x)$, und damit, dass a und x assoziiert sind. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass y keine Einheit ist. Also ist $S = \emptyset$, und damit auch $Q = \emptyset$. □

Lemma 2.4.22 (Hauptidealringe sind noethersch)**.** *Sei R ein Hauptidealring und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$A_n \subset A_{n+1}.$$

Dann wird diese Kette stationär, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq N}} \quad A_n = A_N.$$

Beweis. Wir betrachten die Vereinigung

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset R.$$

Da es sich dabei um eine aufsteigende Vereinigung handelt, ist A ein Ideal in R (nachrechnen). Nach Voraussetzung ist R ein Hauptidealring; es gibt daher ein $a \in R$ mit $A = (a)$.

Nach Definition von A gibt es dann aber bereits ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a \in A_N$. Also erhalten wir das Inklusionssandwich

$$A = (a) = R \cdot a \subset A_N \subset A_{N+1} \subset \cdots \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A,$$

und damit $A_n = A_N$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. □

Korollar 2.4.23 (der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie)**.**

1. *Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist faktoriell.*
2. *Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ faktoriell.*

Beweis. Nach Korollar 2.4.9 handelt es sich in beiden Fällen um Hauptidealringe; diese sind nach Satz 2.4.21 faktoriell. □

Beispiel 2.4.24.

- Eine/Die Primfaktorzerlegung von $12 \in \mathbb{Z}$ lautet

  $$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

  Viele der klassischen Mengenangaben (Dutzend, Anzahl der Minuten pro Stunde, ...) beruhen auf Zahlen (12, 60, ...), die „viele“ Teiler besitzen, um viel Flexibilität bei der Aufteilung zu liefern.

- Eine/Die Primfaktorzerlegung von $T^3 - T^2 + T - 1 \in \mathbb{R}[T]$ lautet

  $$T^3 - T^2 + T - 1 = (T - 1) \cdot (T^2 + 1).$$

  Eine/Die Primfaktorzerlegung von $T^3 - T^2 + T - 1 \in \mathbb{C}[T]$ lautet

  $$T^3 - T^2 + T - 1 = (T - 1) \cdot (T + i) \cdot (T - i).$$

Ausblick 2.4.25 (Primzahlen in der Praxis)**.** Primzahlen sind nicht nur in der Mathematik ein faszinierender Untersuchungsgegenstand, sondern sind auch aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken – ein Großteil der elektronischen Verschlüsselungs- und Authentifizierungstechnologie beruht auf zahlentheoretischen Eigenschaften von Primzahlen! Wir werden im Rahmen der Algebra-Vorlesung genauer auf solche Anwendungen eingehen.

2.4.4 Der größte gemeinsame Teiler

Will man mehrere Hauptideale zu neuen Idealen kombinieren, so kommt der größte gemeinsame Teiler ins Spiel:

Definition 2.4.26 (größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches)**.** Sei R ein Integritätsring und sei $S \subset R$.

- Ein *größter gemeinsamer Teiler von* S ist ein Element $d \in R$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt $d \mid s$ für alle $s \in S$ und für alle $a \in R$ gilt
$$\big(\forall_{s\in S} \quad a \mid s\big) \Longrightarrow a \mid d.$$
- Ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches von* S ist ein Element $m \in R$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt $s \mid m$ für alle $s \in S$ und für alle $a \in R$ gilt
$$\big(\forall_{s\in S} \quad s \mid a\big) \Longrightarrow m \mid a.$$

Proposition 2.4.27 (Darstellungen des ggT)**.** *Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$.*

1. *Falls es in R einen größten gemeinsamen Teiler von a und b gibt, so ist dieser bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt; wir schreiben dann $\mathrm{ggT}(a, b)$ für einen/den größten gemeinsamen Teiler von a und b.*
2. *Gibt es ein $d \in R$ mit $(d) = (a, b)$, so ist d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.*
3. *Ist R ein Hauptidealring, so gibt es einen größten gemeinsamen Teiler von a und b und für jeden größten gemeinsamen Teiler d von a und b gilt $(d) = (a, b)$. Insbesondere gibt es $r, s \in R$ mit*
$$d = r \cdot a + s \cdot b.$$
4. *Ist R faktoriell, ist $P \subset R$ ein Repräsentantensystem aller Primelemente modulo Assoziiertheit, sind $a, b \notin \{0\} \cup R^\times$ und sind*
$$a = \prod_{p\in P} p^{\nu_p(a)} \quad \text{und} \quad b = \prod_{p\in P} p^{\nu_p(b)}$$

die zugehörigen Primfaktorzerlegungen von a bzw. b, so ist

$$\prod_{p\in P} p^{\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}$$

der größte gemeinsame Teiler von a und b.

Beweis. Zu 1. Dies folgt aus der Definition größter gemeinsamer Teiler, da sich je zwei gößte gemeinsame Teiler c, d von a und b gegenseitig teilen.

Zu 2. Sei $d \in R$ mit $(d) = (a, b)$. Dann ist insbesondere $(a) \subset (d)$ und $(b) \subset (d)$ bzw. $d \mid a$ und $d \mid b$ (Bemerkung 2.4.15). Wegen $d \in (a, b)$ gibt es $r, s \in R$ mit $d = r \cdot a + s \cdot b$; daraus folgt, dass jedes Element, das a und b teilt, auch ein Teiler von d ist. Also ist d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.

Zu 3. Da R ein Hauptidealring ist, gibt es ein $c \in R$ mit $(c) = (a, b)$. Nach dem zweiten Teil handelt es sich dabei um einen/den größten gemeinsamen Teiler von a und b.

Ist $d \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler, so ist d nach dem ersten Teil zu c assoziiert. Somit folgt $(d) = (c) = (a, b) = \mathrm{Span}_R\{a, b\}$. Insbesondere gibt es $r, s \in R$ mit $d = r \cdot a + s \cdot b$.

Zu 4. Offenbar ist das angegebene Element ein Teiler von a und b. Betrachtet man die Primfaktorzerlegungen von Teilern von a und b, so sieht man, dass jeder dieser Teiler auch das angegebene Element teilt. □

In euklidischen Ringen können wir größte gemeinsame Teiler auf einfache Weise algorithmisch bestimmen. Dieses Verfahren geht auf Euklid zurück.

Algorithmus 2.4.28 (der euklidische Algorithmus)**.** Sei R ein euklidischer Ring mit der euklidischen Gradfunktion $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$. Außerdem sei ein Algorithmus für die Division mit Rest bezüglich δ gegeben. Seien $a, b \in R$. Wir berechnen nun daraus wie folgt ein Element von R:

- Ist $b = 0$, so beenden wir den Algorithmus und verwenden a als Ergebnis.
- Ist $b \neq 0$, so bestimmen wir durch Division mit Rest $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r \quad \text{und} \quad \big[\delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0\big]$$

und wenden den Algorithmus rekursiv auf b und r an.

Proposition 2.4.29 (Analyse des euklidischen Algorithmus)**.** *Sei R ein euklidischer Ring und seien $a, b \in R$. Dann gilt: Wendet man den euklidischen Algorithmus auf a und b bzgl. einer euklidischen Gradfunktion $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ auf R an, so terminiert der Algorithmus und für das resultierende Element $c \in R$ gilt*

$$(a, b) = (c)$$

bzw. $c = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Beweis. Der Algorithmus terminiert, da in jedem Rekursionsschritt der δ-Wert des zweiten Elements sinkt (oder der Algorithmus im darauffolgenden Schritt terminiert).

Außerdem hat das berechnete Element die gewünschte Eigenschaft, denn:

- Ist $b = 0$, so ist $(a, b) = (a, 0) = (a)$.
- Ist $b \neq 0$ und sind $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r,$$

so gilt $(a, b) = (b, r)$ (nachrechnen).

Induktiv folgt somit die Behauptung. □

Bemerkung 2.4.30 (der euklidische Algorithmus in Haskell)**.** In der funktionalen Programmiersprache Haskell (https://www.haskell.org) lässt sich der euklidische Algorithmus zum Beispiel wie folgt definieren:

```
gcd       :: (Integral a) => a -> a -> a
gcd x y   =  gcd' (abs x) (abs y)
             where gcd' a 0  =  a
                   gcd' a b  =  gcd' b (a `rem` b)
```

Beispiel 2.4.31. Wir bestimmen den größten gemeinsamen Teiler von 14 und 34 in $\mathbb{Z}$ mit dem euklidischen Algorithmus:

- Anwendung auf $(14, 34)$: Division mit Rest liefert $14 = 0 \cdot 34 + 14$.
- Anwendung auf $(34, 14)$: Division mit Rest liefert $34 = 2 \cdot 14 + 6$.
- Anwendung auf $(14, 6)$: Division mit Rest liefert $14 = 2 \cdot 6 + 2$.
- Anwendung auf $(6, 2)$: Division mit Rest liefert $6 = 3 \cdot 2 + 0$.
- Anwendung auf $(2, 0)$: Das Ergebnis ist 2.

Also ist 2 der größte gemeinsame Teiler von 14 und 34.

Indem wir rückwärts durch die Berechnungen durchgehen und jeweils geeignet auflösen, erhalten wir die folgende Darstellung des größten gemeinsamen Teilers durch die Ausgangszahlen:

$$\begin{aligned} 2 &= 14 - 2 \cdot 6 \\ &= 14 - 2 \cdot (34 - 2 \cdot 14) \\ &= 5 \cdot 14 - 2 \cdot 34. \end{aligned}$$

Ausblick 2.4.32 (Common Factor Attacks)**.** Die Tatsache, dass größte gemeinsame Teiler algorithmisch effizient berechnet werden können, hat praktische Konsequenzen. Zum Beispiel wurde dies genutzt, um erfolgreich private RSA-Schlüssel aus öffentlichen Schlüsseln zu berechnen (!), wenn bei der Schlüsselerzeugung „schlechte“ Zufallszahlen verwendet wurden [11].

Satz 2.4.33 (chinesischer Restsatz für Moduln)**.** *Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$ mit $(a, b) = (1)$ (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn R ein Hauptidealring ist und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt). Seien $r, s \in R$ mit $r \cdot a + s \cdot b = 1$ (Proposition 2.4.27). Dann sind*

$$\begin{aligned} f\colon R/(a \cdot b) &\longrightarrow R/(a) \oplus R/(b) \\ [x] &\longmapsto \big([x], [x]\big) \\ g\colon R/(a) \oplus R/(b) &\longrightarrow R/(a \cdot b) \\ \big([x], [y]\big) &\longmapsto [s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot y] \end{aligned}$$

wohldefinierte zueinander inverse R-Modulisomorphismen.

Beweis. Wohldefiniertheit von f: Die Wohldefiniertheit von f folgt aus der Tatsache, dass $(a \cdot b) = (b \cdot a) \subset (a)$ und $(a \cdot b) \subset (b)$.

Wohldefiniertheit von g: Dies ist eine einfache Rechnung (man beachte dabei auch, dass R kommutativ ist).

Die *R-Linearität von f bzw. g* kann man leicht nachrechnen.

Die *Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$:*

- Sei $[x] \in R/(a \cdot b)$. Dann ist (nach Definition von f, g, r, s)

$$\begin{aligned} g \circ f\big([x]\big) &= g\big([x], [x]\big) \\ &= [s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot x] \\ &= \big[(r \cdot a + s \cdot b) \cdot x\big] \\ &= [1 \cdot x] = [x]. \end{aligned}$$

- Sei umgekehrt $([x], [y]) \in R/(a) \oplus R/(b)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \circ g\big([x], [y]\big) &= f\big([s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot y]\big) \\ &= \big([s \cdot b \cdot x], [r \cdot a \cdot y]\big). \end{aligned}$$

  Wegen $r \cdot a + s \cdot b = 1$ erhalten wir in $R/(a)$, dass

$$[s \cdot b \cdot x] = \big[(1 - r \cdot a) \cdot x\big] = [1 \cdot x] - [r \cdot a \cdot x] = [x] - [0] = [x]$$

  und analog $[r \cdot a \cdot y] = [y]$ in $R/(b)$. Also ist

$$f \circ g\big([x], [y]\big) = \big([x], [y]\big).$$

□

Beispiel 2.4.34 (Flaschen)**.** Für welche Anzahlen von Flaschen bleiben

- beim Verpacken in Sechserkästen genau zwei Flaschen übrig und
- beim Verpacken in Elferkästen genau fünf Flaschen übrig?

Fragen dieser Art können mit dem chinesischen Restsatz beantwortet werden: Gesucht ist die Teilmenge $\{n \mid [n] = [2] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \text{ und } [n] = [5] \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$. Wegen $\mathrm{ggT}(6, 11) = 1$ und $2 \cdot 6 - 11 = 1$ ist

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/66\mathbb{Z} \\ \big([x], [y]\big) &\longmapsto [-11 \cdot x + 12 \cdot y] \end{aligned}$$

nach dem chinesischen Restsatz ein zu

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/66\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \\ [x] &\longmapsto \big([x], [x]\big) \end{aligned}$$

inverser Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln. Wegen

$$g\big([2], [5]\big) = [-11 \cdot 2 + 12 \cdot 5] = [38]$$

(in $\mathbb{Z}/66\mathbb{Z}$) ist $38 + 66\mathbb{Z}$ (bzw. $38 + 66 \cdot \mathbb{N}$) die gesuchte Menge von Anzahlen.

2.5 Moduln über Hauptidealringen

Vektorräume über einem gegebenen Grundkörper werden durch die Dimension bis auf Isomorphie klassifiziert. In der Modultheorie ist diese Klassifikation komplizierter – wie wir bereits anhand der behandelten Beispiele erahnen können. Für gewisse Klassen von Ringen ist eine Klassifikation noch möglich, z.B. für Hauptidealringe. Wir werden nun endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen klassifizieren.

Unsere Strategie ist dabei wie folgt:

- Wir beschreiben endlich erzeugte Moduln durch Matrizen mit Koeffizienten im Grundring (Kapitel 2.5.1).
- Wir beweisen dann ein Klassifikationsresultat für Matrizen, den Elementarteilersatz für Matrizen (Kapitel 2.5.2).
- Wir übersetzen diese Klassifikation in entsprechende Resultate für Moduln, den Elementarteilersatz für Moduln und den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Kapitel 2.5.3).

2.5.1 Präsentationen von Moduln

Als ersten Schritt beschreiben wir endlich erzeugte Moduln durch Matrizen:

Satz 2.5.1. *Sei R ein Hauptidealring, sei V ein endlich erzeugter R-Modul und sei $U \subset V$ ein Untermodul. Dann ist auch U endlich erzeugt.*

Beweis. Wir schreiben

$$d(V) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } n\text{-elementiges Erzeugendensystem von } V\};$$

da V nach Voraussetzung endlich erzeugt ist, handelt es sich bei $d(V)$ um eine wohldefinierte natürliche Zahl. Wir zeigen die Behauptung nun durch Induktion über $d(V)$; genauer zeigen wir: Ist $U \subset V$ ein Untermodul, so gilt $d(U) \leq d(V)$.

- *Induktionsanfang.* Ist $d(V) = 0$, so ist $V \cong_R \{0\}$. Der einzige Untermodul von V ist also V selbst (und damit insbesondere endlich erzeugt).

- *Induktionsvoraussetzung.* Sei nun $m := d(V) > 0$ und es sei für alle endlich erzeugten R-Moduln V' mit $d(V') < m$ bereits gezeigt, dass jeder Untermodul U' von V' endlich erzeugt ist und $d(U') \leq d(V')$ erfüllt.

- *Induktionsschritt.* Sei S ein Erzeugendensystem von V mit $|S| = m$ und sei $U \subset V$ ein Untermodul. Als ersten Schritt zeigen wir, dass es genügt, den Fall zu betrachten, dass V ein freier Modul ist:

  Mit der universellen Eigenschaft des freien Moduls $R^m \cong_R \bigoplus_{\{1,\dots,m\}} R$ (bzw. der universellen Eigenschaft der Standardbasis von R^m) erhalten wir einen R-Modulhomomorphismus

  $$f\colon R^m \longrightarrow V$$

  mit $f(\{e_1, \dots, e_m\}) = S$. Da S ein Erzeugendensystem von V ist, ist f surjektiv. Sei $\widetilde{U} := f^{-1}(U) \subset R^m$. Dann ist $\widetilde{U}$ ein Untermodul von R^m und nach Konstruktion ist $f(\widetilde{U}) = U$. Es genügt also zu zeigen, dass $\widetilde{U}$ endlich erzeugt ist mit $d(\widetilde{U}) \leq m = d(V)$.

  Wir zerlegen das Problem nun: Dazu betrachten wir die Projektion

  $$\begin{aligned} \pi\colon R^m &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto x_m \end{aligned}$$

  auf die letzte Komponente (dies ist ein R-Modulhomomorphismus) und $K := \ker \pi = R^{m-1} \times \{0\} \subset R^m$. Mithilfe von π können wir $\widetilde{U}$ zerlegen:

– Der Untermodul $\widetilde{K} := K \cap \widetilde{U} \subset K$ ist wegen $d(K) \leq m-1$ nach Induktionsvoraussetzung endlich erzeugt und erfüllt

$$d(\widetilde{K}) \leq m-1.$$

– Nach dem Homomorphiesatz für Moduln (Satz 2.3.21) ist

$$\widetilde{U}/\widetilde{K} = \widetilde{U}/\ker(\pi|_{\widetilde{U}}) \cong_R \pi(\widetilde{U}) \subset R.$$

Da $\pi(\widetilde{U})$ ein Untermodul von R (d.h. ein Ideal) ist und R ein Hauptidealring ist, folgt

$$d(\widetilde{U}/\widetilde{K}) = d\big(\pi(\widetilde{U})\big) \leq 1.$$

Aus endlichen Erzeugendensystemen von $\widetilde{U}/\widetilde{K}$ und $\widetilde{K}$ können wir ein endliches Erzeugendensystem von $\widetilde{U}$ zusammensetzen (Übungsaufgabe) und wir erhalten

$$d(\widetilde{U}) \leq d(\widetilde{K}) + d(\widetilde{U}/\widetilde{K}) \leq m-1+1 = m,$$

wie gewünscht. □

Anmerkung zum Lernen. Bei der Reduktion auf Untermoduln von freien Moduln haben wir eine Konstruktion verwendet, die an vielen Stellen in der (homologischen) Algebra auftritt: Man beschreibt Moduln als Bild von Homomorphismen von freien Moduln. Analog ist es in der Gruppentheorie oft günstig, Gruppen als Bild von Gruppenhomomorphismen von sogenannten freien Gruppen anzusehen. An dieser Stelle zahlt sich also ein gutes Verhältnis zu universellen Eigenschaften aus, da diese – wie der Name schon sagt – universell einsetzbar sind.

Korollar 2.5.2 (endliche Präsentiertheit)**.** *Sei R ein Hauptidealring.*

1. *Ist $m \in \mathbb{N}$ und ist $U \subset R^m$ ein Untermodul, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ mit $U = \operatorname{im} L(A)$.*
2. *Ist V ein endlich erzeugter R-Modul, so ist V* endlich präsentiert*, d.h. es gibt $m, n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ mit*

$$V \cong_R R^m/\operatorname{im} L(A).$$

Beweis. Zu 1. Nach Satz 2.5.1 ist der Untermodul $U \subset R^m$ endlich erzeugt, da R^m ein endlich erzeugter R-Modul ist. Sei $T \subset U$ ein endliches Erzeugendensystem und $n := |T|$. Dann liefert die universelle Eigenschaft der direkten Summe $R^n \cong_R \oplus_{\{1,\dots,n\}} R$ einen R-Modulhomomorphismus $f\colon R^n \longrightarrow R^m$ mit $U = \operatorname{im} f$. Die Matrix $A := (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in M_{m\times n}(R)$ erfüllt $f = L(A)$ und somit

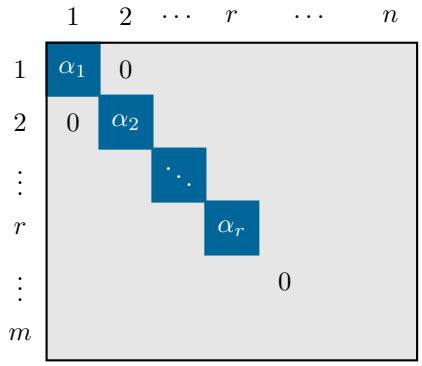


Abbildung 2.3.: Smith-Normalform; im grauen Bereich stehen nur Nullen.

$$U = \operatorname{im} f = \operatorname{im} L(A).$$

Zu 2. Sei $S \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem von V und sei $m := |S|$. Dann liefert die universelle Eigenschaft der direkten Summe einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $f\colon R^m \longrightarrow V$. Nach dem Homomorphiesatz induziert f einen R-Modulisomorphismus $R^m/\ker f \cong_R V$.

Da $\ker f \subset R^m$ ein Untermodul ist, erhalten wir aus dem ersten Teil ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ mit $\ker f = \operatorname{im} L(A)$. Also ist

$$V \cong_R R^m/\ker f = R^m/\operatorname{im} L(A). \qquad \square$$

Beispiel 2.5.3 (zyklische Moduln via Matrizen)**.** Sei R ein kommutativer Ring und sei $a \in R$. Dann ist $R/(a) \cong_R R/\operatorname{im} L(A)$, wobei $A \in M_{1\times 1}(R)$ die 1×1-Matrix ist, deren einziger Koeffizient das gegebene Element a ist.

Wir können im folgenden also endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen mithilfe von Matrizen beschreiben. Wir werden daher zunächst Matrizen über Hauptidealringen genauer betrachten.

2.5.2 Der Elementarteilersatz

Der Gauß-Algorithmus erlaubt es, Matrizen über Körper in Zeilenstufenform zu transformieren (Satz I.5.2.8). Da in allgemeineren Ringen nicht jedes Element ungleich 0 eine Einheit ist, können wir dieses Verfahren nicht ohne weiteres auf allgemeine Ringe übertragen bzw. müssen damit rechnen, dass die erreichbaren Zeilenstufenformen kompliziertere Pivotelemente enthält. Dies führt zur sogenannten Smith-Normalform und dem Elementarteilersatz für Matrizen:

Definition 2.5.4 (Smith-Normalform)**.** Sei R ein Integritätsring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times n}(R)$. Dann ist A in *Smith-Normalform*, wenn A von der Gestalt in Abbildung 2.3 ist, mit $r \in \{0, \dots, \min(m, n)\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R \setminus \{0\}$, wobei

$$\alpha_j \mid \alpha_{j+1}$$

für alle $j \in \{1, \dots, r-1\}$ gilt. Die Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ heißen *Elementarteiler von A*.

Beispiel 2.5.5. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ sind in Smith-Normalform. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ sind *nicht* in Smith-Normalform.

Satz 2.5.6 (Elementarteilersatz für Matrizen)**.** *Sei R ein Hauptidealring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times n}(R)$.*

1. *Dann gibt es Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$, $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass*

$$B := S \cdot A \cdot T$$

   in Smith-Normalform ist.

2. *Für die Elementarteiler $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ von B gilt:*

$$\forall_{k\in\{1,\dots,\min(m,n)\}} \quad D_k(A) = \begin{cases} (\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k) & \text{falls } k \le r \\ \{0\} & \text{falls } k > r. \end{cases}$$

   Insbesondere sind r und die Elementarteiler von B (bis auf Assoziiertheit) eindeutig durch A bestimmt; man bezeichnet sie daher auch als Elementarteiler von A.

Wir erklären nun die noch nicht definierten Begriffe $\mathrm{GL}_m(R)$ und $D_k(A)$, die in der obigen Formulierung des Elementarteilersatzes verwendet wurden:

Bemerkung 2.5.7 (Determinanten über Ringen)**.** Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann definieren wir (in Anlehnung an die Leibnizformel die Determinante

$$\begin{aligned} \det\colon M_{n\times n}(R) &\longrightarrow R \\ A &\longmapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Man kann nun analog zum Fall von Matrizen über Körpern nachrechnen, dass diese Determinantenfunktion n-linear und alternierend in den Zeilen und Spalten ist, die Normierung $\det I_n = 1$ erfüllt und durch Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte rekursiv berechnet werden kann; außerdem gilt für alle $A, B \in M_{n\times n}(R)$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Wir schreiben

$$\mathrm{GL}_n(R) := \big\{A \in M_{n\times n}(R) \;\big|\; \exists_{B\in M_{n\times n}(R)} \quad A \cdot B = I_n = B \cdot A\big\}$$

für die Menge der (über R) invertierbaren $n \times n$-Matrizen über R. Mithilfe der Ring-Version der Cramerschen Regel (Satz I.5.3.6) erhalten wir dann

$$\mathrm{GL}_n(R) = \big\{A \in M_{n\times n}(R) \;\big|\; \det A \in R^\times\big\};$$

man beachte dabei, dass im allgemeinen $R^\times \neq R \setminus \{0\}$ gilt.

Definition 2.5.8 (Determinantenideale)**.** Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{m\times n}(R)$. Sei $r \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$.

- Eine $r \times r$-*Untermatrix von* A ist eine Matrix der Form $(A_{j,k})_{j\in J,k\in K}$, wobei $J \subset \{1, \dots, m\}$, $K \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|J| = r = |K|$ sind.

  Strenggenommen sollten wir eigentlich die ordnungserhaltenden Bijektionen $f_J\colon \{1, \dots, r\} \longrightarrow J$ bzw. $f_K\colon \{1, \dots, r\} \longrightarrow K$ und die zugehörigen Matrizen $(A_{f_J(j),f_K(k)})_{j,k\in\{1,\dots,r\}}$ betrachten. Um die Notation etwas übersichtlicher zu halten, haben wir die obige Darstellung verwendet.

- Sei

  $$D_r(A) := \mathrm{Span}_R\big\{\det B \;\big|\; B \text{ ist eine } r \times r\text{-Untermatrix von } A\big\} \subset R$$

  das von der r-Minoren von A erzeugte Ideal in R.

Beweis (von Satz 2.5.6). Zu 1. Der Übersichtlichkeit halber beweisen wir die Existenz der Smith-Normalform nur in dem Fall, dass der Ring R euklidisch ist; der allgemeine Fall ist etwas aufwendiger (Bemerkung 2.5.10) und der euklidische Fall zeigt wie wir die für uns relevanten Fälle bequem algorithmisch behandeln können.

Analog zum Gaußschen Eliminationsverfahren verwenden wir Zeilen- und Spaltenoperationen der folgenden Form:

- Vertauschen zweier Zeilen [bzw. zweier Spalten].
- Multiplikation einer Zeile [bzw. einer Spalte] mit einer Einheit aus R.
- Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile [bzw. Spalte] zu einer anderen Zeile [bzw. Spalte].

Wie im Fall von Zeilenoperationen auf Matrizen über Körpern können wir die obigen Zeilenoperationen als Multiplikation der gegebenen Matrix von links mit über R invertierbaren Matrizen auffassen; analog erhalten wir die obigen Spaltenoperationen durch Multiplikation der gegebenen Matrix von rechts mit über R invertierbaren Matrizen.

Es genügt daher zu zeigen, dass wir die gegebene Matrix A durch die obigen Zeilen-/Spaltenoperationen in Smith-Normalform überführen können. Sei $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ eine euklidische Gradfunktion für R. Die essentielle Größe, die das Verfahren steuert, ist

$$\Delta(A) := \min\bigl\{\delta(A_{j,k}) \bigm| j \in \{1,\dots,m\}, k \in \{1,\dots,n\}, A_{j,k} \neq 0\bigr\} \in \mathbb{N}$$

(sofern $A \neq 0$ ist). Wir gehen dann wie folgt vor:

- *Minimierung des ersten Eintrags einer Matrix A.*
  - Ist $A = 0 \in M_{m\times n}(R)$ (oder $m = 0$ oder $n = 0$), so beenden wir den Algorithmus und verwenden A als **Ergebnis**.
  - Ist $A \neq 0$, so wenden wir Zeilen- und Spaltenvertauschungen an, um $\delta(A_{1,1}) = \Delta(A)$ zu erreichen. Falls es mehrere Matrixeinträge gibt, die $\Delta(A)$ liefern, kann man das Verfahren dadurch deterministisch gestalten, dass man den Eintrag mit dem kleinsten Spaltenindex und dann in dieser Spalte mit dem kleinsten Zeilenindex wählt und die zugehörigen Zeilen/Spalten entsprechend tauscht. Analog kann man auch alle anderen Schritte dieses Algorithmus deterministisch beschreiben.

    Wir wenden dann auf diese neue Matrix *Reduktion der ersten Zeile/Spalte* an.

- *Reduktion der ersten Zeile/Spalte einer Matrix A.*
  - Falls

    $$\forall_{k\in\{2,\dots,n\}} \quad A_{1,1} \mid A_{1,k} \quad \text{und} \quad \forall_{j\in\{2,\dots,m\}} \quad A_{1,1} \mid A_{j,1}$$

    gilt, wenden wir *Ausräumen der ersten Zeile/Spalte* auf unsere Matrix an.
  - Falls es ein $j \in \{2,\dots,m\}$ mit $A_{1,1} \nmid A_{j,1}$ gibt, wenden wir Division mit Rest an und erhalten so $r, s \in R$ mit

    $$A_{j,1} = s \cdot A_{1,1} + r \quad \text{und} \quad \delta(r) < \delta(A_{1,1}).$$

    Wir addieren nun das $-s$-fache der ersten Zeile von A zur j-ten Zeile von A. Der $(j,1)$-Eintrag der neuen Matrix ist also r. Dann wenden wir *Minimierung des ersten Eintrags* auf die entstandene Matrix an.

[Man beachte, dass sich durch diesen Schritt der Δ-Wert der Matrix verringert; dieser Schritt kann also nur endlich oft auftreten.]

– Falls es ein $k \in \{2, \dots, n\}$ mit $A_{1,1} \nmid A_{1,k}$ gibt (aber $A_{1,1}$ alle Einträge der ersten Spalte teilt), wenden wir Division mit Rest an un erhalten so $r, s \in R$ mit

$$A_{1,k} = s \cdot A_{1,1} + r \quad \text{und} \quad \delta(r) < \delta(A_{1,1}).$$

Wir addieren nun das $-s$-fache der ersten Spalte von A zur k-ten Spalte von A. Der $(1,k)$-Eintrag der neuen Matrix ist also r. Dann wenden wir *Minimierung des ersten Eintrags* auf die entstandene Matrix an.

[Man beachte, dass sich durch diesen Schritt der Δ-Wert der Matrix verringert; dieser Schritt kann also nur endlich oft auftreten.]

- *Ausräumen der ersten Zeile/Spalte einer Matrix A.*

[Wir sind nun in der Situation, dass $A_{1,1}$ ein Teiler aller Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte von A ist.]

1. Für jedes $j \in \{2, \dots, m\}$ addieren wir das $-q_{j,1}$-fache der ersten Zeile zur j-ten Zeile; dabei ist $q_{j,1} \in R$ das Element mit $A_{j,1} = q_{j,1} \cdot A_{1,1}$.
2. Für jedes $k \in \{2, \dots, n\}$ addieren wir das $-q_{1,k}$-fache der ersten Spalte zur k-ten Spalte; dabei ist $q_{1,k} \in R$ mit $A_{1,k} = q_{1,k} \cdot A_{1,1}$.

Sei A' die resultierende Matrix.

[Wir sind nun in der Situation, dass in der ersten Zeile und der ersten Spalte außer an der Position $(1,1)$ nur Nullen stehen.]

– Falls $A_{1,1}$ alle Matrixeinträge von A' teilt, so wenden wir *Minimierung des ersten Eintrags* (und alle damit verbundenen rekursiven Operationen) auf die verkleinerte Matrix

$$B := (A_{j-1,k-1})_{(j,k) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}} \in M_{(m-1)\times(n-1)}(R)$$

an und erhalten so eine Matrix B'. Dann verwenden wir

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

als **Ergebnis**.

– Falls es $j \in \{2, \dots, m\}$ und $k \in \{2, \dots, n\}$ mit $A_{1,1} \nmid A'_{j,k}$ gibt, so addieren wir die j-te Zeile von A' zur ersten Zeile von A' (dabei bleibt der Eintrag an Position $(1,1)$ und der Δ-Wert der gesamten

Matrix unverändert!) und wenden *Minimierung des ersten Eintrags* auf die entstandene Matrix an.

Dieser Algorithmus terminiert, da ein erneuter Durchlauf von *Minimierung des ersten Eintrags* nur nach/bei Verringerung des Δ-Werts oder einer Verkleinerung der Matrix auftritt.

Induktiv folgt, dass die erhaltene Matrix außerhalb der „Diagonalen“ nur Nullen enthält und sich die Diagonaleinträge in der richtigen Reihenfolge teilen. Das Ergebnis ist also in Smith-Normalform.

Zu 2. Nach Lemma 2.5.9 gilt

$$D_k(A) = D_k(S \cdot A \cdot T) = D_k(B)$$

für alle $k \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$. Da die $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ aufsteigend nach Teilbarkeit sortiert sind, folgt daher

$$D_k(A) = D_k(B) = \begin{cases} (\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k) & \text{falls } k \leq r \\ \{0\} & \text{falls } k > r \end{cases}$$

für alle $k \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$. Insbesondere können wir auf diese Weise rekursiv $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (bis auf Assoziiertheit) und r aus $D_1(A), \dots, D_r(A)$ von A bestimmen.

Alternativ kann man die Eindeutigkeit der Elementarteiler auch mithilfe der Verwendung geeigneter Quotienten-/Restklassenkörper und der Länge von Moduln oder Tensorprodukten beweisen [3, Kapitel 6.3]. □

Lemma 2.5.9 (Determinantenideale). *Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \in M_{m\times n}(R)$ und sei $k \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$.*

1. *Sind $S \in M_{m\times m}(R)$ und $T \in M_{n\times n}(R)$, so gilt*

$$D_k(S \cdot A) \subset D_k(A) \quad \text{und} \quad D_k(A \cdot T) \subset D_k(A).$$

2. *Sind $S \in \mathrm{GL}_{m\times m}(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_{n\times n}(R)$, so gilt*

$$D_k(S \cdot A \cdot T) = D_k(A).$$

Beweis. Der erste Teil folgt aus einer geschickten Berechnung/Darstellung der Determinanten von Untermatrizen unter Transformationen (Übungsaufgabe). Der zweite Teil ist eine direkte Konsequenz, indem man den ersten Teil auch auf die inversen Matrizen anwendet (Übungsaufgabe). □

Bemerkung 2.5.10 (der Fall allgemeiner Hauptidealringe). Der Beweis der Existenz der Smith-Normalform über allgemeinen Hauptidealringen ist ähnlich zum euklidischen Fall, jedoch im Detail etwas aufwendiger [3, S. 210ff]:

- Als Größenmaß der Matrixkoeffizienten verwendet man die Länge der Primfaktorzerlegung.

- Statt Division mit Rest in *Reduktion der ersten Zeile/Spalte* verwendet man eine Darstellung des größten gemeinsamen Teilers der beiden betrachteten Matrixkoeffizienten; an dieser Stelle werden dann auch etwas kompliziertere Zeilen-/Spaltenoperationen nötig, um den gewünschten Eliminationseffekt zu erzielen.

Anmerkung zum Lernen (Vergleich des Elementarteilersatzes mit anderen Resultaten)**.** Was besagt der Elementarteilersatz für Matrizen in dem Fall, dass der Grundring ein Körper ist? Welchen Algorithmus erhält man, wenn man den Algorithmus im Beweis des Elementarteilersatzes auf eine 1×2-Matrix mit Koeffizienten in einem euklidischen Ring anwendet? (Hinweis: es ist ein alter Bekannter!)

Beispiel 2.5.11 (Berechnung der Elementarteiler)**.** Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

Was sind die Elementarteiler von A ? Da A eine „kleine“ Matrix ist, können wir dies mit dem zweiten Teil von Satz 2.5.6 bequem beantworten:

- Bestimmung von $D_1(A)$: Der größte gemeinsame Teiler aller Matrixeinträge ist 2; also ist $D_1(A) = (4, 6, -8, 12) = (2)$.
- Bestimmung von $D_2(A)$: Die einzige 2×2-Untermatrix von A ist A selbst und
$$\det A = 4 \cdot 12 + 8 \cdot 6 = 96.$$
Also ist $D_2(A) = (96)$.

Somit sind 2 und $96/2 = 48$ die Elementarteiler von A.

Möchte man auch noch invertierbare Matrizen finden, die A in Smith-Normalform transformieren, so bietet es sich an, den im Beweis von Satz 2.5.6 beschriebenen Algorithmus anzuwenden:

- Minimierung des ersten Eintrags von A: Es ist $A \neq 0$ und $\Delta(A) = 4$ (bezüglich $\delta = |\cdot| \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$). Der erste Eintrag ist bereits Δ-minimal.
- Reduktion der ersten Zeile/Spalte von A: Alle Einträge der ersten Spalte sind durch 4 teilbar. Es gibt einen Eintrag ($6 = 1 \cdot 4 + 2$) in der ersten Zeile, der nicht durch 4 teilbar ist. Addition des -1-fachen der ersten Spalte zur zweiten Spalte liefert
$$A' := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}.$$
- Minimierung des ersten Eintrags von A': Wir tauschen dazu die erste und zweite Spalte. Dies liefert

$$A'' := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}.$$

- Reduktion der ersten Zeile/Spalte von A'': Der erste Eintrag (nämlich 2) teilt alle anderen Matrixeinträge in der ersten Zeile/Spalte.

- Ausräumen der ersten Zeile/Spalte von A'': Addition des -10-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile liefert

  $$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}$$

  Addition des -2-fachen der ersten Spalte dieser Matrix zur zweiten Spalte dieser Matrix liefert

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}.$$

  Der erste Matrixeintrag teilt alle anderen Einträge. Wir wenden daher den Algorithmus auf die 1×1-Matrix -48 an. Dies liefert insgesamt als Ergebnis

  $$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}.$$

Indem wir die Zeilen- und Spaltenoperationen in der richtigen Reihenfolge sammeln und in Matrizen umschreiben, erhalten wir für (Zeilenoperationen: zweite Zeile minus 10-mal die erste Zeile)

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

und (Spaltenoperationen: erstens: zweite Spalte minus die erste Spalte; zweitens: Vertauschung der ersten und zweiten Spalte; drittens: zweite Spalte minus 2-mal die erste Spalte; Spaltenoperationen werden von rechts multipliziert!)

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

dass

$$B := S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix};$$

man beachte dabei, dass 48 und -48 in $\mathbb{Z}$ assoziiert sind!

Alternativ kann man die Berechnung von S und T auch mithilfe eines dreigeteilten Schemas (analog zum zweigeteilten Schema zur Berechnung von inversen Matrizen über Körpern) in den obigen Algorithmus integrieren.

Der Elementarteilersatz liefert außerdem analog zum Gaußschen Eliminationsverfahren insbesondere ein Lösungsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme über Hauptidealringen. Zum Beispiel kann man auf diese Weise lineare Gleichungssysteme (sogenannte lineare diophantische Gleichungen) über den ganzen Zahlen lösen.

Beispiel 2.5.12 (Lösung linearer Gleichungssysteme über Ringen)**.** Die Bestimmung der Transformationsmatrizen ist zum Beispiel dann relevant, wenn man lineare Gleichungssysteme lösen möchte: In Beispiel 2.5.11 können wir so die Menge

$$V := \left\{x \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 42 \text{ und } -8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = 0\right\}$$

bestimmen: Es gilt (mit der Notation aus Beispiel 2.5.11)

$$\begin{aligned}
V &= \left\{x \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; A \cdot x = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; B \cdot T^{-1} \cdot x = S \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{T \cdot y \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; B \cdot y = S \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{T \cdot y \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 42 \\ -420 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{T \cdot y \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 2 \cdot y_1 = 42 \text{ und } -48 \cdot y_2 = -420\right\} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass -420 *nicht* durch -48 teilbar ist.

Analog zu den Gauß-Rezepten über Körpern können wir mithilfe des Elementarteilersatzes viele lineare Probleme in (freien) Moduln über Hauptidealringen lösen. Dies spielt zum Beispiel bei der algorithmischen Berechnung von Homologiegruppen in der Algebraischen Topologie eine Rolle [7].

2.5.3 Die Klassifikation endlich erzeugter Moduln

Indem wir endlich erzeugte Moduln durch Matrizen beschreiben und auf diese Matrizen den Elementarteilersatz für Matrizen anwenden, erhalten wir die gewünschte Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen. Insbesondere zeigen wir die Wohldefiniertheit des Rangs freier Moduln (Proposition 2.5.13), den Elementarteilersatz für Moduln (Satz 2.5.14) und den Klassifikationssatz für endlich erzeute Moduln (Satz 2.5.15).

Proposition 2.5.13 (Rang freier Moduln über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.*

1. *Gilt $n > m$ und ist $A \in M_{m\times n}(R)$, so ist $L(A)\colon R^n \longrightarrow R^m$* nicht *injektiv.*

2. *Insbesondere folgt*
$$R^m \cong_R R^n \iff m = n.$$

Beweis. Der erste Teil ist eine Folgerung aus dem Elementarteilersatz für Matrizen (Satz 2.5.6) (Übungsaufgabe); der zweite Teil ist eine direkte Konsequenz des ersten Teils. □

Satz 2.5.14 (Elementarteilersatz für Moduln)**.** *Sei R ein Hauptidealring, sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $U \subset R^m$ ein Untermodul.*

1. *Dann gibt es eine R-Basis $(v_1, \dots, v_m)$ von R^m sowie $r \in \{0, \dots, m\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R \setminus \{0\}$ mit*
$$U = \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\}$$
und $\alpha_j \mid \alpha_{j+1}$ für alle $j \in \{1, \dots, r-1\}$.

2. *Insbesondere ist U ein freier R-Modul.*

3. *Dabei sind r und $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (bis auf Assoziiertheit) im folgenden Sinne eindeutig durch U bestimmt: Ist $(v'_1, \dots, v'_m)$ eine R-Basis von R^m und gibt es $r' \in \{0, \dots, m\}$ sowie $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r \in R \setminus \{0\}$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{\alpha'_1 \cdot v'_1, \dots, \alpha'_r \cdot v'_{r'}\}$, so gilt bereits $r = r'$ und für jedes $j \in \{1, \dots, r = r'\}$ ist α_j zu α'_j assoziiert.*

Man bezeichnet dann $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ als Elementarteiler von U.

Beweis. Zu 1. Wir beschreiben U zunächst durch eine Matrix: Nach Korollar 2.5.2 gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m\times n}(R)$ mit $U = \operatorname{im} L(A)$.

Aus dem Elementarteilersatz für Matrizen (Satz 2.5.6) erhalten wir dann Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass
$$B := S \cdot A \cdot T$$
in Smith-Normalform ist; sei $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Folge der Elementarteiler von B (bzw. A). Dann ist
$$A = S^{-1} \cdot B \cdot T^{-1}$$
und die Spalten $v_1, \dots, v_m$ von S^{-1} bilden eine R-Basis von R^m. Nach Konstruktion gilt dabei

$$\begin{aligned}
U &= \operatorname{im} L(A) && \text{(Konstruktion von } A\text{)}\\
&= \operatorname{im}\big(L(S^{-1} \cdot B) \circ L(T^{-1})\big) && \text{(wegen } A = S^{-1} \cdot B \cdot T^{-1}\text{)}\\
&= \operatorname{im} L(S^{-1} \cdot B) && \text{(da } L(T^{-1}) \text{ surjektiv ist)}\\
&= \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\} && \text{(Gestalt von } B\text{).}
\end{aligned}$$

Zu 2. Die Familie $(\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r)$ aus dem ersten Teil ist linear unabhängig über R (da $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R \setminus \{0\}$, die Familie $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig ist und R nullteilerfrei ist). Außerdem ist $\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\}$ nach Konstruktion ein Erzeugendensystem von U. Also ist $(\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r)$ eine R-Basis von U; insbesondere ist U ein freier R-Modul.

Zu 3. Die Eindeutigkeitsaussage kann man wie folgt mithilfe der Elementarteiler bzw. Determinantenideale von Matrizen ableiten: Wir betrachten dazu die Matrizen

$$A := (\alpha_1 \cdot v_1 \mid \cdots \mid \alpha_r \cdot v_r \mid 0 \mid \cdots \mid 0) \in M_{m\times m}(R),$$
$$A' := (\alpha'_1 \cdot v'_1 \mid \cdots \mid \alpha'_{r'} \cdot v'_{r'} \mid 0 \mid \cdots \mid 0) \in M_{m\times m}(R).$$

Dann ist $\operatorname{im} L(A) = U = \operatorname{im} L(A')$. Zu $j \in \{1, \dots, r\}$ gibt es also $w_j \in R^m$ mit $A' \cdot w_j = \alpha_j \cdot v_j$. Für $j \in \{r+1, \dots, m\}$ setzen wir $w_j := 0$. Zusammengesetzt ergibt dies eine Matrix

$$T := (w_1 \mid \cdots \mid w_m) \in M_{m\times m}(R)$$

mit

$$\forall_{j\in\{1,\dots,m\}} \quad A' \cdot T = A$$

(die Spalten ...!). Also gilt (Lemma 2.5.9)

$$\forall_{j\in\{1,\dots,m\}} \quad D_j(A) = D_j(A' \cdot T) \subset D_j(A').$$

Indem wir die Rollen von A und A' vertauschen, erhalten wir auch die Inklusionen $D_j(A') \subset D_j(A)$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir übersetzen nun die Determinantenideale wieder zurück in Elementarteiler und erhalten so, dass $r = r'$ ist und dass α_j für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ zu α'_j assoziiert ist. □

Anmerkung zum Lernen. Was besagt der Elementarteilersatz für Moduln im Fall von Vektorräumen? Wie haben wir dies in der Linearen Algebra I bewiesen?

Mit dem Chinesischen Restsatz können wir den Elementarteilersatz für Moduln wie folgt umformulieren:

Satz 2.5.15 (Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring und sei V ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primelemente $p_1, \dots, p_k \in R$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit*

$$V \cong_R R^d \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k\}} R/(p_j^{n_j}).$$

Dabei sind d, k, die Primelemente $p_1, \dots, p_k$ (bis auf Assoziiertheit) und die zugehörigen Exponenten $n_1, \dots, n_k$ eindeutig durch V bestimmt.

Beweis. Existenz der Zerlegung. Wir gehen wie im Beweis des Elementarteilersatzes für Untermoduln vor (alternativ könnte man ihn auch geschickt

auf diese Situation anwenden): Da V endlich erzeugt ist, gibt es nach Korollar 2.5.2 Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ mit

$$V \cong_R R^m / \operatorname{im} L(A).$$

Nach dem Elementarteilersatz für Matrizen (Satz 2.5.6) gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass

$$B := S \cdot A \cdot T$$

in Smith-Normalform ist; seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R$ die Elementarteiler von A (bzw. B). Eine einfache Rechnung zeigt somit

$$V = R^m / \operatorname{im} L(A) \cong_R R^m / \operatorname{im} L(B) \cong_R R^{m-r} \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,r\}} R/(\alpha_j).$$

Wir verwenden nun den Chinesischen Restsatz (Satz 2.4.33), um dies zur gewünschten Primpotenzform zu reorganisieren: Dazu zerlegen wir die Elementarteiler $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ in ihre Primfaktoren: Seien $p_1, \ldots, p_k$ die in $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ auftretenden Primelemente; ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass $p_1, \ldots, p_k$ paarweise nicht assoziiert sind bzw. dass $\mathrm{ggT}(p_s, p_t) = 1$ für alle $s, t \in \{1, \ldots, k\}$ mit $s \neq k$ gilt. Ist $j \in \{1, \ldots, r\}$, so schreiben wir

$$\alpha_j = p_1^{n_{j,1}} \cdot \cdots \cdot p_k^{n_{j,k}}$$

mit $n_{j,1}, \ldots, n_{j,k} \in \mathbb{N}$. Induktiv erhalten wir mit dem Chinesischen Restsatz:

$$R/(\alpha_j) \cong_R \bigoplus_{s=1}^{k} R/(p_j^{n_{j,s}}) \cong_R \bigoplus_{s\in\{1,\ldots,k\} \text{ mit } n_{j,s}\neq 0} R/(p_j^{n_{j,s}}).$$

Dies liefert insgesamt die gewünschte Beschreibung von V.

Eindeutigkeit der Terme in einer solchen Zerlegung. Wir skizzieren einen Beweis, der nur auf der bisher entwickelten Matrizen- und Modultheorie beruht. Mithilfe von geeigneten Quotientenkörpern und Tensorprodukten kann man auch einen Beweis führen, der das Problem in ein Dimensionsproblem von Vektorräumen übersetzt [3, Kapitel 6.3].

Sei etwa $V \cong_R R^{d'} \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k'\}} R/(p_j'^{n_k'})$ eine weitere solche Zerlegung. Insbesondere erhalten wir einen R-Modulisomorphismus

$$f\colon R^d \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k\}} R/(p_j^{n_j}) \longrightarrow R^{d'} \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k'\}} R/(p_j'^{n_j'})$$

- Dann gilt $d = d'$, denn: Die Komposition $R^d \longrightarrow R^{d'}$, die man aus f und der kanonischen Inklusion/Projektion erhält, ist injektiv (nachrechnen). Also ist $d' \leq d$ (Proposition 2.5.13). Mit dem Inversen von f erhält man $d \leq d'$. Also ist $d = d'$.

- Es gibt $s_1, \dots, s_k \in R^\times$ mit $\{s_1 \cdot p_1, \dots, s_k \cdot p_k\} = \{p'_1, \dots, p'_{k'}\}$, denn: Ist $p \in R$ prim, so schreiben wir

$$\operatorname{Tor}_1^R\big(V, R/(p)\big) := \{x \in V \mid p \cdot x = 0\} \subset V$$

für den *p-Torsionsanteil von V*; dies ist ein Untermodul von V. Dann liefert f einen Isomorphismus (nachrechnen)

$$\bigoplus_{j \in N_p} R/(p_j^{n_j}) \cong_R \operatorname{Tor}_1^R\big(V, R/(p)\big) \cong_R \bigoplus_{j \in N'_p} R/(p_j'^{n'_j}),$$

wobei

$$N_p := \big\{j \in \{1, \dots, k\} \;\big|\; p_j \text{ und } p \text{ sind assoziiert}\big\}$$
$$N'_p := \big\{j \in \{1, \dots, k'\} \;\big|\; p'_j \text{ und } p \text{ sind assoziiert}\big\}.$$

Damit folgt, dass N_p genau dann leer ist, wenn N'_p leer ist. Also stimmen $\{p_1, \dots, p_k\}$ und $\{p'_1, \dots, p'_{k'}\}$ bis auf elementweise Assoziiertheit überein und wir können die p-Torsionsanteile einzeln untersuchen.

- Es gilt $k = k'$ und die Familien $((p_j, n_j))_{j \in \{1,\dots,k\}}$, $((p'_j, n'_j))_{j \in \{1,\dots,k'\}}$ von Paaren stimmen bis auf die Reihenfolge und Assoziiertheit der Primelemente überein, denn: Nach dem letzten Schritt können wir ohne Einschränkung annehmen, dass nur ein einziger Primfaktor p auftritt. Wir betrachten also den Fall, dass ein R-Modulisomorphismus

$$f\colon \bigoplus_{j \in \{1,\dots,k\}} R/(p^{n_j}) \longrightarrow \bigoplus_{j \in \{1,\dots,k'\}} R/(p^{n'_j})$$

vorliegt; dabei seien die Potenzen so sortiert, dass $n_1 \le \dots \le n_k$ und $n'_1 \le \dots \le n'_{k'}$ gilt.

Wir betrachten nun die Diagonalmatrizen

$$A := \begin{pmatrix} p^{n_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^{n_k} \end{pmatrix} \in M_{k\times k}(R) \quad \text{und} \quad A' := \begin{pmatrix} p^{n'_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^{n'_{k'}} \end{pmatrix} \in M_{k'\times k'}(R).$$

Da diese Matrizen in Smith-Normalform sind und p prim ist, genügt es also zu zeigen, dass diese beiden Matrizen dieselben Elementarteiler besitzen. Wir nutzen nun den Isomorphismus f, um diese Matrizen zu vergleichen:

Die kanonische Projektion $R^k \longrightarrow R^k/\operatorname{im} L(A)$ liefert einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $\pi\colon R^k \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{k} R/(p^{n_j})$. Analog erhalten wir einen Epimorphismus $\pi'\colon R^k \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{k'} R/(p^{n'_j})$. Da f ein Isomorphismus ist, erhalten wir mit der universellen Eigenschaft des freien

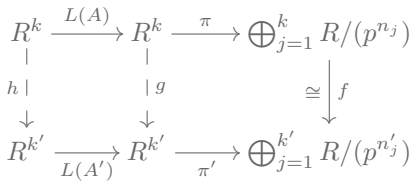


Abbildung 2.4.: Zerlegungen des p-Torsionsanteils eines Moduls

Moduls R^k Homomorphismen $g\colon R^k \longrightarrow R^{k'}$ und $h\colon R^k \longrightarrow R^{k'}$ mit

$$f \circ \pi = \pi' \circ g \quad \text{und} \quad g \circ L(A) = L(A') \circ h.$$

Betrachten wir den inversen Homomorphismus f' von f, so finden wir analog Homomorphismen $g', h'\colon R^{k'} \longrightarrow R^k$ mit

$$f' \circ \pi' = \pi \circ g' \quad \text{und} \quad g' \circ L(A') = L(A) \circ h'$$

(Abbildung 2.4).

Die Tatsache, dass f und f' invers zueinander sind, liefert zwar im allgemeinen *nicht*, dass g und g' invers zueinander sind, aber immerhin, dass sich die Kompositionen $g' \circ g$ und $g \circ g'$ nur um einen Homomorphismus mit Bild in $\operatorname{im} L(A)$ bzw. $\operatorname{im} L(A')$ von id_{R^k} bzw. $\mathrm{id}_{R^{k'}}$ unterscheiden. In anderen Worten: Schreiben wir

$$\begin{aligned} S &:= \big(g(e_1) \mid \cdots \mid g(e_k)\big) \in M_{k\times k'}(R) \\ S' &:= \big(g'(e_1) \mid \cdots \mid g'(e_{k'})\big) \in M_{k'\times k}(R) \\ T &:= \big(h(e_1) \mid \cdots \mid h(e_k)\big) \in M_{k\times k'}(R) \\ T' &:= \big(h'(e_1) \mid \cdots \mid h'(e_{k'})\big) \in M_{k'\times k}(R), \end{aligned}$$

so gibt es Matrizen $U \in M_{k\times k}(R)$ und $U' \in M_{k'\times k'}(R)$ mit

$$S' \cdot S = I_n + U \quad \text{und} \quad S \cdot S' = I_n + U'$$

und $\operatorname{im} L(U) \subset \operatorname{im} L(A)$, $\operatorname{im} L(U') \subset \operatorname{im} L(A')$. Nach Definition von A bzw. A' bedeutet dies insbesondere, dass alle Matrixeinträge von U bzw. U' durch p teilbar sind. Mit der Leibnizformel erhalten wir daher

$$\det(S' \cdot S) \in 1 + (p) \quad \text{und} \quad \det(S \cdot S') \in 1 + (p).$$

Dies hat zwei wichtige Konsequenzen: Erstens hat die Smith-Normalform von S bzw. S' keine Nullspalten; somit ist $k = k'$ und

$$\det S' \cdot \det S = \det(S' \cdot S) \in 1 + (p).$$

Zweitens ist daher also keiner der Elementarteiler von S bzw. S' durch p teilbar.

Mit Lemma 2.5.9 und der Konstruktion von S und T erhalten wir

$$\forall_{j\in\{1,\dots,k=k'\}} \quad D_j(A') \supset D_j(A' \cdot T) = D_j(S \cdot A).$$

Alle Elementarteiler von A' sind also Teiler der entsprechenden Elementarteiler von $S \cdot A$. Nach Konstruktion von A' sind die Elementarteiler von A' genau die p-Potenzen $p^{n_1'}, \dots, p^{n_k'}$. Andererseits kann man mithilfe von Lemma 2.5.9 und der Smith-Normalform von S nachrechnen, dass eine p-Potenz p^m mit $m \in \mathbb{N}_{>0}$ nur dann ein Teiler eines Elementarteilers von $S \cdot A$ sein kann, wenn p^m den entsprechenden Elementarteiler von A teilt (da ja keiner der Elementarteiler von S durch p teilbar ist). Insgesamt folgt daher

$$\forall_{j\in\{1,\dots,k\}} \quad n_j' \leq n_j.$$

Analog erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung; also gilt $n_j' = n_j$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$, wie gewünscht. □

Insbesondere erhalten wir aus Satz 2.5.15 auch die Klassifikation der endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln (bzw. endlich erzeugten abelschen Gruppen):

Korollar 2.5.16 (Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen)**.** *Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primzahlen $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit*

$$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k\}} \mathbb{Z}/p_j^{n_j}\mathbb{Z}.$$

Dabei sind d, k, $p_1, \dots, p_k$ und $n_1, \dots, n_k$ eindeutig durch A bestimmt.

Beweis. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, können wir den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz 2.5.15) anwenden; man beachte dabei, dass jede Primzahl in $\mathbb{Z}$ zu genau einer Primzahl in $\mathbb{N}$ assoziert ist. □

Dieser Klassifikationssatz kann unter anderem dafür genutzt werden, endliche abelsche Gruppen zu klassifizieren. Dazu muss man nach Korollar 2.5.16 nur die Anzahl der Elemente der Gruppe in Primfaktoren zerlegen und überlegen, welche Kombinationsmöglichkeiten von Prim*potenzen* es gibt, um dasselbe Produkt zu erhalten.

Beispiel 2.5.17.

- Ist p prim, so gibt es bis auf Isomorphie genau eine abelsche Gruppe mit genau p Elementen, nämlich $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Genauer argumentiert man wie folgt: Es ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe mit genau p Elementen. Warum ist das bis auf Isomorphie die einzige Möglichkeit? Sei A eine abelsche Gruppe mit genau p Elementen; insbesondere ist A endlich erzeugt. Nach der Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen gibt es dann $d, k \in \mathbb{N}$, Primzahlen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ und Zahlen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1,\ldots,k\}} \mathbb{Z}/p_j^{n_j}\mathbb{Z}.$$

Da A endlich ist, ist $d = 0$ und

$$p = |A| = \prod_{j=1}^{k} \left|\mathbb{Z}/p_j^{n_j}\mathbb{Z}\right| = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}.$$

Da p prim ist, erhalten wir somit $k = 1$ und $p_1 = p$, $n_1 = 1$. Also bleibt in der direkten Summenzerlegung nur der Summand $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ übrig, d.h. es ist $A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Es gibt bis auf Isomorphie genau eine abelsche Gruppe mit genau $10 = 2 \cdot 5$ Elementen, nämlich

$$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}.$$

- Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei abelsche Gruppen mit genau vier Elementen, nämlich (da $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$)

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Anmerkung zum Lernen. Der Elementarteilersatz und der Klassifikationssatz der endlich erzeugten abelschen Gruppen treten regelmäßig im schriftlichen Staatsexamen auf. Es ist also sicher nicht verkehrt, diese Sätze (und ihre Anwendungen) gut zu beherrschen.

Unsere Hauptanwendung des Klassifikationssatzes (Satz 2.5.15) ist jedoch der Beweis der Existenz bzw. Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform für quadratische Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ (Kapitel 3).

3

Normalformen III: Die Jordansche Normalform

Wir werden nun mithilfe der Modultheorie aus Kapitel 2, genauer mit der Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Polynomringen, den Satz über die Jordansche Normalform für Endomorphismen von endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen beweisen.

Dazu übersetzen wir die Begriffe über das Zerlegen von Endomorphismen zunächst in die Sprache der Moduln und erklären die Rolle des sogenannten Minimalpolynoms bzw. des charakteristischen Polynoms in diesem Kontext.

Im Anschluss geben wir einen kleinen Ausblick auf typische Anwendungen der Jordanschen Normalform.

Überblick über dieses Kapitel.

3.1	Moduln zu Endomorphismen	108
3.2	Das Minimalpolynom	112
3.3	Die Jordansche Normalform	118

Schlüsselbeispiel. Jordanblöcke, Begleitmatrizen

3.1 Moduln zu Endomorphismen

Wir wissen bereits, dass die Klassifikation von Endomorphismen von endlichdimensionalen Vektorräumen zur Klassifikation von quadratischen Matrizen bis auf Ähnlichkeit äquivalent ist (Kapitel I.6.4.1). Wir werden daher im folgenden quadratische Matrizen bis auf Ähnlichkeit klassifizieren. Genauer gesagt werden wir die Klassifikationsresultate für Matrizen formulieren, aber bei der Herleitung oft die Sprache der Endomorphismen verwenden – je nachdem, was in der gegebenen Situation bequemer ist.

Dazu werden wir zu einem Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$ von K-Vektorräumen den zugehörigen $K[T]$-Modul $V[f]$ (Proposition 2.3.6) mithilfe der Modultheorie über dem Hauptidealring $K[T]$ analysieren.

3.1.1 Zerlegung von Endomorphismen: Modulversion

Als ersten Schritt überlegen wir uns, dass diese Modultheorie tatsächlich dazu geeignet ist, das vorliegende Klassifikationsproblem zu lösen.

Proposition 3.1.1 (Matrizenkalkül und Moduln)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A \in M_{m\times m}(K)$, $B \in M_{n\times n}(K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gilt $m = n$ und die Matrizen A und B sind ähnlich, d.h. es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.*
2. *Die $K[T]$-Moduln $K^m[L(A)]$ und $K^n[L(B)]$ sind isomorph.*

Beweis. Wir schreiben $f := L(A)$ und $g := L(B)$.

Sei $m = n$ und die Matrizen seien A und B ähnlich; sei etwa $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$. Mit $F := L(S^{-1})\colon K^n \longrightarrow K^n$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} F \circ f &= L(S^{-1}) \circ L(A) = L(S^{-1} \cdot A) = L(B \cdot S^{-1}) = L(B) \circ L(S^{-1}) \\ &= g \circ F. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.3.9 sind dann die $K[T]$-Moduln $K^n[f]$ und $K^n[g]$ isomorph.

Seien umgekehrt $K^m[L(A)]$ und $K^n[L(B)]$ isomorphe $K[T]$-Moduln, etwa durch einen $K[T]$-Isomorphismus $F\colon K^m[L(A)] \longrightarrow K^n[L(g)]$. Dann sind insbesondere die unterliegenden K-Vektorräume isomorph, und damit $m = n$. Die Matrix $S := M(F)^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ hat die Eigenschaft $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ (nach Proposition 2.3.9). Also sind A und B ähnlich. □

Mit dem folgenden Wörterbuch können wir außerdem die Zerlegung von Endomorphismen in die Zerlegung von Moduln übersetzen und umgekehrt:

Proposition 3.1.2 (Endomorphismenmodulnwörterbuch)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

1. *Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist genau dann f-invariant, wenn U ein $K[T]$-Untermodul des $K[T]$-Moduls $V[f]$ ist.*
2. *Der K-Vektorraum V ist genau dann f-reduzibel, wenn der $K[T]$-Modul $V[f]$ zerlegbar ist.*
3. *Der K-Vektorraum V ist genau dann f-zyklisch, wenn der $K[T]$-Modul $V[f]$ zyklisch ist (d.h. als $K[T]$-Modul von einem Element erzeugt ist).*

Beweis. All diese Zusammenhänge kann man in wenigen Schritten aus den entsprechenden Definitionen ableiten (Übungsaufgabe). □

Aus dem Hauptsatz über endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen (in diesem Fall der Polynomring über dem Grundkörper) erhalten wir:

Proposition 3.1.3 (Primzerlegung von Endomorphismenmoduln)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

1. *Der Einsetzungshomomorphismus*

$$\begin{aligned} K[T] &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V,V) \\ p &\longmapsto p(f) \end{aligned}$$

   ist nicht *injektiv.*

   Mit anderen Worten: Es gibt ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $p(f) = 0$.

2. *Es gibt also $k \in \mathbb{N}$, Primpolynome $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit*

$$V[f] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k\}} K[T]/(p_j^{n_j})$$

   (und diese Daten sind bis auf Assoziiertheit der Primpolynome eindeutig).

3. *Insbesondere gilt: Ist V ein f-irreduzibler Vektorraum, so ist V bereits f-zyklisch (und im Fall $V \ncong \{0\}$ gilt $V[f] \cong_{K[T]} K[T]/(p^n)$ für ein geeignetes Primpolynom p und ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_{>0}$).*

Beweis. Zu 1. Der K-Vektorraum $K[T]$ ist unendlich-dimensional, der Einsetzungshomomorphismus φ ist K-linear und der Endomorphismenraum $\operatorname{Hom}_K(V,V)$ ist endlich-dimensional (da V endlich-dimensional ist). Somit ist φ *nicht* injektiv. (Übungsaufgabe).

Zu 2. Wir wenden den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen auf den $K[T]$-Modul $V[f]$ an (wegen $\dim_K V < \infty$ sieht

man leicht, dass $V[f]$ als $K[T]$-Modul endlich erzeugt ist). Also gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primpolynome $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$V[f] \cong_{K[T]} K[T]^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1,\ldots,k\}} K[T]/(p_j^{n_j})$$

(und diese Daten sind bis auf Assoziiertheit der Primpolynome eindeutig). Aus dem ersten Teil und der Konstruktion der $K[T]$-Modulstruktur auf $V[f]$ folgt, dass $d = 0$ ist. Somit erhalten wir die behauptete Beschreibung von $V[f]$.

Zu 3. Dies folgt aus der Beschreibung von $V[f]$ im zweiten Teil und dem Wörterbuch aus Proposition 3.1.2. □

3.1.2 Zerlegung von Endomorphismen: Matrizenversion

Bemerkung 3.1.4 (der allgemeine Klassifikationssatz für Matrizen)**.** Im Zusammenspiel von Proposition 3.1.3 mit Proposition 3.1.1 ergibt sich somit: Ist K ein Körper,

- ist $P \subset K[T]$ ein Repräsentantensystem der Primelemente in $K[T]$ modulo Assoziiertheit (ein solches existiert nach dem Auswahlaxiom) und
- ist $(A(p,n))_{p \in P, n \in \mathbb{N}_{>0}}$ eine Familie von Matrizen mit der Eigenschaft, dass der $K[T]$-Modul des Endomorphismus $L(A(p,n))$ zu $K[T]/(p^n)$ isomorph ist,

so ist jede quadratische Matrix über K zu einer Blockmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} A(p_1,n_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A(p_k,n_k) \end{pmatrix}$$

ähnlich, wobei $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in P$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$; diese Daten sind bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Eine Möglichkeit, Matrizen zu vorgegebenen zyklischen Moduln zu konstruieren, ist via der sogenannten Begleitmatrizen; zusammen mit Bemerkung 3.1.4 erhalten wir so eine Klassifikation von quadratischen Matrizen bis auf Ähnlichkeit über jedem gegebenen Grundkörper. Man beachte dabei jedoch, dass wir im Fall der komplexen Zahlen für Primpotenzen *nicht* die gewünschten Jordanblöcke als Matrizen erhalten, sondern andere Matrizen.

Proposition 3.1.5 (Begleitmatrizen)**.** *Sei K ein Körper und sei $p = T^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot T^j \in K[T]$ (mit $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_m \in K$) ein normiertes Polynom. Dann hat die Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(K)$$

(die sogenannte Begleitmatrix zu p*) die Eigenschaft, dass*

$$K^m\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} K[T]/(p).$$

Beweis. Man könnte den Beweis so führen, dass man zu A einfach den Modul $K^m[L(A)]$ bestimmt. Wir gehen jedoch umgekehrt vor, da dies auch erklärt, wie man überhaupt auf die Idee kommt, die obige Matrix A zu betrachten.

Allgemein gilt: Sei W ein $K[T]$-Modul und sei V der Vektorraum, den man aus W erhält, indem man nur Skalare aus K statt aus $K[T]$ operieren lässt. Dann ist

$$\begin{aligned} f\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto T\cdot x \end{aligned}$$

eine K-lineare Abbildung und $V[f] = W$ (nach Definition von $V[f]$).

Es genügt daher in unserem Fall von $W = K[T]/(p)$ zu zeigen, dass es eine K-Basis B des unterliegenden K-Vektorraums V mit $M_{B,B}(f) = A$ gibt (unter Verwendung von Proposition 2.3.9 bzw. 3.1.1). Dazu betrachten wir die Familie

$$B := \big([T^0], [T^1], \dots, [T^{m-1}]\big)$$

in V. Diese Familie ist eine K-Basis von V, denn:

- Es ist $\operatorname{Span}_K B = V$, denn: Sei $q \in K[T]$. Durch Division mit Rest durch p erhalten wir $r, s \in K[T]$ mit $q = s\cdot p + r$ und $\deg r < \deg p = m$. Also erhalten wir in $K[T]/(p)$, dass

  $$[q] = [s\cdot p + r] = [r].$$

  Wegen $\deg r \le m-1$ ist dabei $[r] \in \operatorname{Span}_K B$.

- Die Familie B ist über K linear unabhängig, denn: Seien $b_0, \dots, b_{m-1} \in K$ mit (in $K[T]/(p)$)

  $$0 = \sum_{j=0}^{m-1} b_j \cdot [T^j] = \Big[\sum_{j=0}^{m-1} b_j \cdot T^j\Big].$$

  Also ist $\sum_{j=0}^{m-1} b_j \cdot T^j \in (p) = K[T]\cdot p$. Wegen $\deg p = m$ ist daher $\sum_{j=0}^{m-1} b_j \cdot T^j = 0$, und damit $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0$.

Also ist B eine K-Basis von V.

An der Matrix A liest man leicht ab (die Spalten ...!), dass

$$M_{B,B}(f) = A$$

gilt; für die letzte Spalte verwendet man dabei, dass im Quotientenmodul $K[T]/(p)$ die Gleichung

$$\left[f(T^{m-1})\right] = [T \cdot T^{m-1}] = [T^m] = [T^m - p] = \left[-\sum_{j=1}^{m-1} a_j \cdot T^j\right]$$

gilt. □

Im Falle des Grundkörpers $\mathbb{C}$ müssen wir also

- alle Primpolynome in $\mathbb{C}[T]$ beschreiben und
- den Zusammenhang von Primpotenzen und Jordanblöcken verstehen.

Außerdem wollen wir untersuchen, wie man für eine gegebene Matrix diese Zerlegung in Blöcke berechnen kann.

3.2 Das Minimalpolynom

Um zu verstehen, welche Polynome bei den zyklischen Anteilen eines gegebenen Endomorphismus auftreten und wie man diese berechnen kann, bietet es sich an, das Minimalpolynom von Endomorphismen/Matrizen genauer zu betrachten:

Proposition 3.2.1 (das Minimalpolynom eines Endomorphismus)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es genau ein normiertes Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ minimalen Grades mit $p(f) = 0$. Das Polynom p wird als* Minimalpolynom μ_f von f *bezeichnet.*

Beweis. Der Einsetzungshomomorphismus $\varphi\colon K[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,V)$ zu f ist *nicht* injektiv (Proposition 3.1.3). Also ist das Ideal $\ker\varphi \subset K[T]$ *nicht* das Nullideal. Da $K[T]$ ein Hauptidealring ist, gibt es somit ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $(p) = \ker\varphi$; indem wir durch den höchsten Koeffizienten dividieren, können wir annehmen, dass p normiert ist. Wegen $(p) = \ker\varphi$ ist insbesondere $p(f) = 0$.

Ist $q \in K[T] \setminus \{0\}$ ein normiertes Polynom mit $q(f) = 0$, so ist $q \in \ker\varphi$. Also gibt es ein $s \in K[T]$ mit

$$q = s \cdot p.$$

Wegen $q \neq 0$ ist $s \neq 0$. Mit der Additivität des Grades folgt also

$$\deg q = \deg(s \cdot p) = \deg s + \deg p \geq \deg p;$$

Gleichheit liegt dabei genau dann vor, wenn $s = 1$ ist (Normiertheit von p und q). Dies zeigt die Minimalität des Grades von p und die Eindeutigkeit. □

Beispiel 3.2.2. Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, sei $\lambda \in K$ und sei $f := \lambda \cdot \mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$. Dann ist

$$\mu_f = T - \lambda,$$

denn: Es gilt $(T - \lambda)(f) = f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V = 0$, das Polynom $T - \lambda$ ist normiert und es gibt (wegen $\deg(T - \lambda) = 1$) kein normiertes Polynom p kleineren Grades mit $p(f) = 0$.

Bemerkung 3.2.3 (Minimalpolynom einer Matrix)**.** Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times m}(K)$. Dann nennt man

$$\mu_A := \mu_{L(A)} \in K[T]$$

das *Minimalpolynom von* A. Nach Konstruktion ist dabei klar, dass ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom besitzen (Konjugationstrick).

Bemerkung 3.2.4 (Bestimmung des Minimalpolynoms durch lineare Gleichungssysteme)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann liefert der Beweis von Proposition 3.2.1 das folgende Verfahren, um das Minimalpolynom $\mu_A \in K[T]$ zu bestimmen:

- Man berechnet induktiv die Potenzen $A^0, A^1, A^2, \ldots$ (so weit wie nötig).
- Man bestimmt die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die Familie $(A^0, A^1, \ldots, A^m)$ in $M_{n\times n}(K)$ über K linear abhängig ist (dies kann durch Lösen linearer Gleichungssysteme überprüft werden).
- Man bestimmt Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m \in K$ (die nicht alle 0 sind) mit

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot A^j = 0.$$

  Aufgrund der Minimalität von m ist $a_m \neq 0$; dann ist

$$\mu_f = T^m + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j}{a_m} \cdot T^j \in K[T].$$

In der Praxis verwendet man häufig auch die folgende Beschreibung des Minimalpolynoms (vor allem im Zusammenspiel mit dem Satz von Cayley-Hamilton (Satz 3.2.12)):

Proposition 3.2.5 (alternative Beschreibung des Minimalpolynoms)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist $p \in K[T]$ ein normiertes Polynom mit $p(f) = 0$ und gilt für alle Teiler $q \in K[T]$ von p mit $\deg q \in \{0, \ldots, \deg p - 1\}$, dass $q(f) \neq 0$ ist, so ist p das Minimalpolynom von f.*

Beweis. Wegen $p(f) = 0$ ist (Division mit Rest oder Idealargument) μ_f ein Teiler von p. Nach Voraussetzung ist somit $\deg \mu_f \geq \deg p$. Da p normiert ist, folgt aus den definierenden Eigenschaften des Minimalpolynoms $p = \mu_f$. □

Beispiel 3.2.6 (Jordanblöcke)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda \in K$. Der Jordanblock

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

hat das Minimalpolynom $(T-\lambda)^n$, denn: Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad \big((T-\lambda)^n\big)\big(J_n(\lambda)\big) = \big(J_n(\lambda) - \lambda \cdot I_n\big)^k = 0 \Longleftrightarrow k \geq n$$

gilt (die Matrix $J_n(\lambda) - \lambda \cdot I_n$ trägt auf der Nebendiagonalen Einsen und sonst nur Nullen; wächst der Exponent um 1, so wandert diese Einserreihe eine Stufe weiter nach oben). Mit Proposition 3.2.5 folgt daher

$$\mu_{J_n(\lambda)} = (T-\lambda)^n.$$

Beispiel 3.2.7 (Kombination zweier Blöcke)**.** Sei K ein Körper, seien $k, m \in \mathbb{N}$, seien $B \in M_{k\times k}(K)$, $C \in M_{m\times m}(K)$. Dann betrachten wir die Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

mit $n := k + m$. Mit Proposition 3.2.5 folgt, dass das Minimalpolynom μ_A das (normierte) kleinste gemeinsame Vielfache von μ_B und μ_C ist (Übungsaufgabe).

Beispiel 3.2.8 (Rotationsmatrix)**.** Sei

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

die Rotationsmatrix zur Rotation um $\pi/2$. Dann ist

$$(T^2+1)(R) = R^2 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0.$$

Da das Polynom T^2+1 normiert und in $\mathbb{R}[T]$ irreduzibel ist, gilt $\mu_R = T^2+1$ (Proposition 3.2.5; alternativ kann man auch über die Minimalität des Grades argumentieren).

Im zyklischen Fall weiß das Minimalpolynom alles über den zu einem Endomorphismus gehörenden Modul über dem Polynomring:

Proposition 3.2.9 (Minimalpolynome zyklischer Endomorphismen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist V ein f-zyklischer K-Vektorraum, so gilt*

$$V[f] \cong_{K[T]} K[T]/(\mu_f).$$

Beweis. Da V als f-zyklisch vorausgesetzt ist, gibt es ein $v \in V$, für das der $K[T]$-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\colon K[T] &\longrightarrow V[f] \\ p &\longmapsto p \cdot v = \big(p(f)\big)(v) \end{aligned}$$

surjektiv ist. Wegen $\mu_f(f) = 0$ induziert dieser nach dem Homomorphiesatz einen wohldefinierten, surjektiven $K[T]$-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\colon K[T]/(\mu_f) &\longrightarrow V[f] \\ [p] &\longmapsto p \cdot v. \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\overline{\varphi}$ auch injektiv bzw., dass $\ker\varphi \subset (\mu_f)$, ist.

Sei $p \in \ker\varphi$. Also ist $p \cdot v = 0$. Daher gilt auch

$$\forall_{q\in K[T]} \quad 0 = q \cdot p \cdot v = p \cdot q \cdot v = p \cdot \varphi(q).$$

Da φ surjektiv ist, liefert dies

$$\forall_{x\in V} \quad 0 = p \cdot x = \big(p(f)\big)(x),$$

und damit $p(f) = 0$. Daher ist μ_f ein Teiler von p (Division mit Rest; s. Beweis von Proposition 3.2.5) bzw. $p \in (\mu_f)$. Somit ist $\ker\varphi \subset (\mu_f)$, wie gewünscht. □

Beispiel 3.2.10 (Moduln zu Jordanblöcken)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$K^n\big[J_n(\lambda)\big] \cong_{K[T]} K[T]/\big((T-\lambda)^n\big),$$

denn: Sei $f := L(J_n(\lambda))\colon K^n \longrightarrow K^n$. Der K-Vektorraum K^n ist f-zyklisch, denn

$$K^n = \mathrm{Span}_K\{e_1, \ldots, e_n\} = \mathrm{Span}_K\big\{e_n, f(e_n), \ldots, f^{n-1}(e_n)\big\}.$$

Wegen $\mu_f = (T-\lambda)^n$ (Beispiel 3.2.6) folgt dann die Behauptung mithilfe von Proposition 3.2.9.

Beispiel 3.2.11 (Minmalpolynom der Begleitmatrix)**.** Sei K ein Körper, sei $p \in K[T] \setminus K$ ein normiertes Polynom vom Grad m und sei $A \in M_{m\times m}(K)$ die Begleitmatrix zu p. Dann ist $\mu_A = p$, denn: Sei $f := L(A)\colon K^m \longrightarrow K^m$. Nach Proposition 3.1.5 ist $K^m[f] \cong_{K[T]} K[T]/(p)$; somit ist K^m insbesondere f-zyklisch (Proposition 3.1.2) und mit Proposition 3.2.9 erhalten wir

$$K[T]/(p) \cong_{K[T]} K^m[f] \cong_{K[T]} K[T]/(\mu_A).$$

Wir faktorisieren nun p bzw. μ_A in Primpotenzen und wenden den chinesischen Restsatz sowie den Klassifikationssatz für endlich erzeugte Moduln über dem Hauptidealring $K[T]$ an. Dann liefert die Eindeutigkeitssausage, dass p und μ_A assoziiert sind; da beide Polynome normiert sind, folgt bereits $p = \mu_A$.

Alternativ kann man auch einfach nachrechnen, dass $p(A) = 0$ ist und es kein Polynom $q \in K[T] \setminus K$ mit $\deg q < m$ und $q(A) = 0$ gibt.

Mithilfe der Begleitmatrizen und dem allgemeinen Klassifikationssatz für Matrizen (Bemerkung 3.1.4) erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom; wir formulieren den Satz nur für Matrizen; er gilt aber auch für Endomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen.

Satz 3.2.12 (der Satz von Cayley-Hamilton)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt:*

1. *Das Minimalpolynom μ_A ist ein Teiler (in $K[T]$) des charakteristischen Polynoms χ_A.*
2. *Jeder Primfaktor von χ_A tritt auch in μ_A auf.*
3. *Insbesondere haben χ_A und μ_A dieselben Nullstellen.*

Beweis. Nach dem allgemeinen Klassifikationssatz (Bemerkung 3.1.4) und Proposition 3.1.5 gibt es $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und Primpotenzen $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$, so dass A zu der Blockmatrix

$$B := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

ähnlich ist, wobei $A_1, \ldots, A_k$ die Begleitmatrizen zu $p_1, \ldots, p_k$ sind. Mit der Konjugationsinvarianz des Minimalpolynoms und des charakteristischen Polynoms folgt somit: Es gilt

$$\chi_A = \chi_B = \prod_{j=1}^{k} \chi_{A_j} = \prod_{j=1}^{k} p_j$$

(für den letzten Schritt haben wir eine Übungsaufgabe aus der Linearen Algebra I verwendet). Andererseits ist

$$\mu_A = \mu_B = \mathrm{kgV}(\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_k}) = \mathrm{kgV}(p_1, \ldots, p_k)$$

(dabei bezeichnet kgV hier das normierte kleinste Vielfache der angegebenen Polynome; im letzten Schritt haben wir Beispiel 3.2.11 verwendet).

Insbesondere ist μ_A ein Teiler von χ_A und alle Primfaktoren von χ_A treten auch in μ_A auf. Die Aussage über die Nullstellen folgt daraus mit Proposition 2.4.14 und der Tatsache, dass Polynome vom Grad 1 in $K[T]$ prim sind. □

Bemerkung 3.2.13 (Bestimmung des Minimalpolynoms über das charakteristische Polynom)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann liefert der Satz von Cayley-Hamilton zusammen mit Proposition 3.2.5 das folgende Verfahren, um das Minimalpolynom $\mu_A \in K[T]$ zu bestimmen (das vor allem für „kleine“ Matrizen von Hand oft gut angewendet werden kann):

- Man berechnet $\chi_A = \det(T \cdot I_n - A) \in K[T]$.
- Man bestimmt die (normierte) Primfaktorzerlegung von χ_A in $K[T]$ (das ist im allgemeinen ein algorithmisch schwieriger Schritt!).
- Man sucht den (normierten) Teiler p kleinsten Grades von χ_A, der $p(A) = 0$ erfüllt, indem man entsprechende Potenzen der Primfaktoren von χ_A multipliziert. Nach Satz 3.2.12 gibt es einen solchen Teiler und nach Proposition 3.2.5 gilt $p = \mu_A$. Man beachte dabei, dass jeder Primfaktor von χ_A auch mindestens einmal in μ_A auftreten muss!

Proposition 3.2.14 (Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist diagonalisierbar.*
2. *Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und (paarweise) verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ mit*

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j).$$

Beweis. Ist A diagonalisierbar, so kann man μ_A mithilfe der Konjugationsinvarianz berechnen.

Hat umgekehrt μ_A die angegebene Gestalt, so kann man wie beim Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton vorgehen, um auf Diagonalisierbarkeit zu schließen (Übungsaufgabe). □

3.3 Die Jordansche Normalform

Als Spezialfall der allgemeinen Klassifikationstheorie, die wir bereits entwickelt haben, erhalten wir die Jordansche Normalform. Dabei werden wir die Jordansche Normalform in der folgenden Formulierung behandeln; den Begriff des algebraisch abgeschlossenen Körpers führen wir in Kapitel 3.3.1 genauer ein.

Satz 3.3.1 (Jordansche Normalform)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper (z.B. $\mathbb{C}$). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die Eigenwerte von A und seien*

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,r\}} \quad n_j := \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}_{\lambda_j}(A)$$

die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A. Dann gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, r\}$ eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen

$$m_{j,1} \leq \cdots \leq m_{j,n_j}$$

mit der Eigenschaft, dass A zu der Blockmatrix in Abbildung 3.1, bestehend aus den Jordanblöcken

$$J_{m_{1,1}}(\lambda_1), \ldots, J_{m_{1,n_1}}(\lambda_1), J_{m_{2,1}}(\lambda_2), \ldots, J_{m_{r,n_r}}(\lambda_r),$$

ähnlich ist (in $M_{n\times n}(K)$). Diese Jordan-Normalform von A ist bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig durch A bestimmt. Dabei gilt

$$\chi_A = \prod_{j=1}^{r} (T-\lambda_j)^{\sum_{k=1}^{n_j} m_{j,k}},$$

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{r} (T-\lambda_j)^{\max\{m_{j,k} \mid k\in\{1,\ldots,n_j\}\}},$$

$$K^n[L(A)] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,r\}} \bigoplus_{k\in\{1,\ldots,n_j\}} K[T]/\big((T-\lambda_j)^{m_{j,k}}\big).$$

Insbesondere ist das Minimalpolynom μ_f ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_f und die Polynome μ_f und χ_f haben dieselben Nullstellen (in K).

Bevor wir den Beweis von Satz 3.3.1 in Kapitel 3.3.2 geben, betrachten wir zunächst die Aussage des Satzes etwas genauer:

Nach Satz 3.3.1 bilden die Eigenwerte, geometrischen Vielfachheiten und die Größen der Jordanblöcke zu den entsprechenden Eigenwerten zusammen eine vollständige Invariante für $M_{n\times n}(\mathbb{C})/\text{Ähnlichkeit}$.

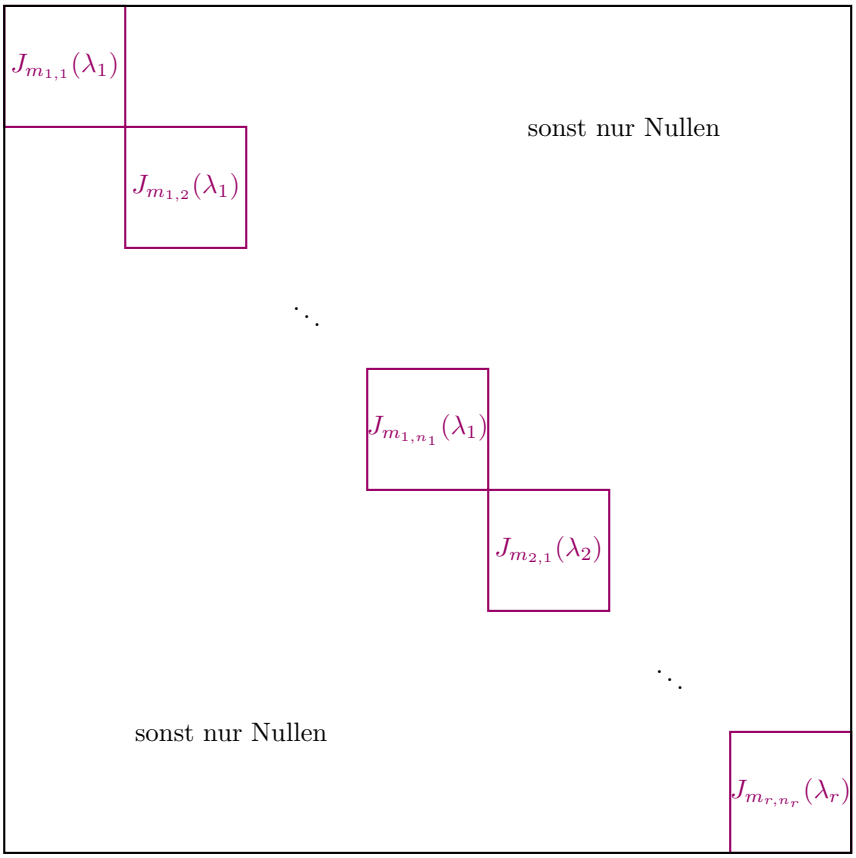


Abbildung 3.1.: Jordansche Normalform

Bei einer diagonalisierbaren Matrix haben alle Jordanblöcke das Format 1×1. Umgekehrt zeigt der obige Satz, in welchem Sinne jede Matrix in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ „fast“ diagonalisierbar ist.

Der letzte Absatz des Satzes 3.3.1 ist ein Spezialfall des Satzes von Cayley-Hamilton.

Bemerkung 3.3.2 (Was wissen charakteristisches Polynom und Minimalpolynom über die Jordansche Normalform?)**.** Was kann man aus dem charakteristischen Polynom bzw. Minimalpolynom über die Jordansche Normalform ablesen? Nach Satz 3.3.1 gilt folgendes:

- Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (und damit auch des Minimalpolynoms) sind die Eigenwerte der Matrix.

- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts gibt die Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert an.
- Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts (also die Vielfachheit dieser Nullstelle im charakteristischen Polynom) gibt die Summe der Größen der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert an.
- Die Vielfachheit einer Nullstelle im Minimalpolynom gibt an, wie groß der größte Jordanblock zu diesem Eigenwert ist.

Caveat 3.3.3. Die Jordansche Normalform lässt sich im allgemeinen *nicht* allein aus dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom ablesen! Zum Beispiel haben die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in $M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ dasselbe charakteristische Polynom (nämlich $(T-2)^4$) und dasselbe Minimalpolynom (nämlich $(T-2)^2$), aber verschiedene Jordansche Normalformen.

3.3.1 Vorbereitung: Algebraisch abgeschlossene Körper

Wir erklären nun zunächst den Begriff des algebraisch abgeschlossenen Körpers etwas genauer und bestimmen insbesondere alle Primpolynome über algebraisch abgeschlossenen Körpern. Grob gesagt sind algebraisch abgeschlossene Körper der geeignete Rahmen um über Lösungen polynomialer Gleichungen zu sprechen:

Definition 3.3.4 (algebraisch abgeschlossen)**.** Ein Körper K ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes Polynom in $K[T]$ vom Grad mindestens 1 mindestens eine Nullstelle in K besitzt.

Beispiel 3.3.5.

1. Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen (nach dem Fundamentalsatz der Algebra, Satz I.6.3.8).
2. Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind *nicht* algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom T^2+1 in $\mathbb{R}[T]$ (bzw. $\mathbb{Q}[T]$) hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{Q}$).
3. Der Körper $\mathbb{F}_2$ ist *nicht* algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom $T^2+T+1 \in \mathbb{F}_2[T]$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$.

   Allgemeiner gilt: Ist K ein endlicher Körper, so ist K *nicht* algebraische abgeschlossen, denn: Das Polynom

$$p := \prod_{\lambda \in K} (T - \lambda) + 1 \in K[T]$$

hat Grad mindestens 1 und wegen

$$\forall_{x \in K} \quad p(x) = \prod_{\lambda \in K} (x - \lambda) + 1 = (x - x) \cdot \prod_{\lambda \in K \setminus \{x\}} (x - \lambda) + 1 = 0 + 1$$

keine Nullstelle in K.

Ausblick 3.3.6 (algebraischer Abschluss)**.** Sei K ein Körper. Im Rahmen der Algebra-Vorlesung werden wir sehen, dass es dann einen „kleinsten" algebraisch abgeschlossenen Körper L gibt, der K enthält; dies ist der sogenannte *algebraische Abschluss von* K. Zum Beispiel ist $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3.7 (Primpolynome in algebraisch abgeschlossenen Körpern)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $p \in K[T]$ prim und normiert, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $p = T - \lambda$.*

Beweis. Sei $p \in K[T]$ prim und normiert; insbesondere ist $\deg p \geq 1$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $\lambda \in K$ mit $p(\lambda) = 0$. Daher ist $T - \lambda$ ein Teiler von p in $K[T]$ (Proposition 2.4.14). Da p als Primelement irreduzibel ist und $T - \lambda$ (aus Gradgründen) keine Einheit ist, gibt es eine Einheit $s \in K[T]$ mit $p = s \cdot (T - \lambda)$. Wegen $K[T]^\times = K^\times$ (aus Gradgründen) und der Normiertheit von p folgt $s = 1$ bzw. $p = T - \lambda$. □

3.3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform

Mit den bereits geleisteten Vorarbeiten ist es nun nicht schwer, den Satz über die Jordansche Normalform zu beweisen. Wir verwenden dazu die folgende Strategie (die wir auch bereits in Bemerkung 3.1.4 und Satz 3.2.12 erfolgreich eingesetzt haben):

- Wir zerlegen den $K[T]$-Modul $K^n[L(A)]$ in zyklische Summanden zu Primpotenzen und sortieren diese Zerlegung geeignet.
- Wir zeigen, dass eine entsprechende Matrix J in Jordan-Normalform einen dazu isomorphen $K[T]$-Modul liefert und wenden dann Proposition 2.3.9 an, um zu schließen, dass A und J ähnlich sind.
- An J kann man ohne Schwierigkeiten das charakteristische und das Minimalpolynom ablesen.

Beweis von Satz 3.3.1. Existenz der Jordanschen Normalform: Nach der Primzerlegung von Endomorphismenmoduln (Proposition 3.1.3) gibt es (im wesentlichen eindeutige) $k \in \mathbb{N}$, Primpolynome $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$ und Zahlen $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k\}} K[T]/(p_j^{m_j}).$$

Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass $p_1, \dots, p_k$ normiert sind. Da der Körper K als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt ist, gibt es zu jedem $j \in \{1, \dots, k\}$ ein $\nu_j \in K$ mit $p_j = T - \nu_j$ (Proposition 3.3.7).

Indem wir die obige direkte Summe nach gleichen Primfaktoren umsortieren, erhalten wir also: Es gibt (eindeutige) $r \in \mathbb{N}$, verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, Zahlen $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_{>0}$ und zu jedem $j \in \{1, \dots, r\}$ eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen

$$m_{j,1} \le \cdots \le m_{j,n_j}$$

mit

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\dots,r\}} \bigoplus_{k\in\{1,\dots,n_j\}} K[T]/\big((T-\lambda_j)^{m_{j,k}}\big).$$

Sei J die Jordanblock-Matrix aus Abbildung 3.1. Mit dem Wörterbuch und den Moduln zu Jordanblöcken (Beispiel 3.2.10) folgt, dass auch

$$K^n\big[L(J)\big] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\dots,r\}} \bigoplus_{k\in\{1,\dots,n_j\}} K[T]/\big((T-\lambda_j)^{m_{j,k}}\big)$$

gilt; insbesondere ist

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} K^n\big[L(J)\big].$$

Also ist die Matrix A zu J ähnlich in $M_{n\times n}(K)$ (Proposition 2.3.9).

Wir lesen nun die Kenndaten von J ab:

- Die Matrix J hat genau die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und die geometrische Vielfachheit von λ_j ist n_j.
- Es gilt (nachrechnen)

$$\chi_J = \prod_{j=1}^{r} (T-\lambda_j)^{\sum_{k=1}^{n_j} m_{j,k}}$$

- Mit Beispiel 3.2.7 und Beispiel 3.2.6 erhalten wir außerdem

$$\mu_J = \prod_{j=1}^{r} (T-\lambda_j)^{\max\{m_{j,k} \mid k\in\{1,\dots,n_j\}\}}.$$

Da A und J ähnlich sind, hat A dieselben Eigenwerte und geometrischen Vielfachheiten wie J und es gilt $\chi_A = \chi_J$ bzw. $\mu_A = \mu_J$.

Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform: Ist $J' \in M_{n\times n}(K)$ in Jordan-Normalform und ähnlich zu A, so folgt

$$K^n[L(J')] \cong_{K[T]} K^n[L(A)] \cong_{K[T]} K^n[L(J')].$$

Dabei korrespondieren die Jordanblöcke von J' zur Primzerlegung des $K[T]$-Moduls $K^n[L(J')]$ (und damit zu der von $K^n[L(J)]$). Mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte $K[T]$-Moduln (Satz 2.5.15) folgt daher, dass J' und J genau aus denselben Jordanblöcken (bis auf die Reihenfolge) bestehen. Damit ist Satz 3.3.1 vollständig bewiesen. □

Bemerkung 3.3.8 (allgemeinere Grundkörper)**.** Die Voraussetzung, dass der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist, ging nur bei der Beschreibung der Primpolynome ein. Mit ähnlichen Methoden kann man die folgende Verallgemeinerung zeigen: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und ist $A \in M_{n\times n}(K)$ mit der Eigenschaft, dass alle Primfaktoren von χ_A in $K[T]$ vom Grad 1 sind, so ist A in $M_{n\times n}(K)$ zu einer Matrix in Jordan-Normalform ähnlich.

Die Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform beruht im obigen Satz auf der Eindeutigkeit im Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen. Bei der Beschreibung der Berechnung der Jordanschen Normalform werden wir noch einen alternativen Beweis für die Eindeutigkeit kennenlernen (Bemerkung 3.3.12).

3.3.3 Berechnung der Jordanschen Normalform

Wir erklären nun, wie man die Jordansche Normalform einer gegebenen Matrix bestimmen kann. Dabei geht wesentlich die folgende Beobachtung über verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten ein:

Definition 3.3.9 (verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Für $s \in \mathbb{N}$ definieren wir dann

$$a_{\lambda,s}(A) := \dim_K V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big) \in \mathbb{N}.$$

Die gewöhnliche geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ einer Matrix A ist in dieser Notation also $a_{\lambda,1}(A)$.

Proposition 3.3.10 (verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten und Jordansche Normalform)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.*

1. *Sind $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich, so gilt für alle $\lambda \in \sigma_K(A) = \sigma_K(B)$ und alle $s \in \mathbb{N}$, dass*
$$a_{\lambda,s}(A) = a_{\lambda,s}(B).$$
2. *Ist $J \in M_{n\times n}(K)$ in Jordan-Normalform, ist $\lambda \in \sigma_K(J)$ und $s \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist*
$$2 \cdot a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J) - a_{\lambda,s+1}(J).$$
die Anzahl der Jordanblöcke von J der Größe s zum Eigenwert λ.

3. Ist K algebraisch abgeschlossen und $A \in M_{n\times n}(K)$, so gilt für alle $\lambda \in \sigma_K(A)$ und alle $s \in \mathbb{N}_{>0}$, dass

$$2 \cdot a_{\lambda,s}(A) - a_{\lambda,s-1}(A) - a_{\lambda,s+1}(A).$$

die Anzahl der Jordanblöcke von A der Größe s zum Eigenwert λ ist.

Beweis. Zu 1. Sei $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$. Dann ist (Konjugationstrick)

$$\begin{aligned}
a_{\lambda,s}(B) &= \dim_K V\big((B - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big) \\
&= \dim_K V\big((S^{-1} \cdot A \cdot S - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big) \\
&= \dim_K V\big((S^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot I_n) \cdot S)^s, 0\big) \\
&= \dim_K V\big((S^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot I_n)^s \cdot S, 0\big) \\
&= \dim_K S^{-1} \cdot V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big) \\
&= \dim_K V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big) \\
&= a_{\lambda,s}(A).
\end{aligned}$$

Zu 2. Die Familie aller Spalten von J, die jeweils zu den ersten s Spalten der λ-Jordanblöcke von J gehören, bildet eine Basis von $V((J - \lambda \cdot I_n)^s, 0)$. (Dies kann man direkt nachrechnen und ist ähnlich zu Beispiel 3.2.6).

Die Anzahl der Jordanblöcke von J der Größe mindestens s ist daher $a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J)$. Somit ergibt sich für die Anzahl der Jordanblöcke von J der Größe genau s (Abbildung 3.2):

$$\begin{aligned}
&\big(a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J)\big) - \big(a_{\lambda,s+1}(J) - a_{\lambda,s}(J)\big) \\
&= 2 \cdot a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J) - a_{\lambda,s+1}(J).
\end{aligned}$$

Zu 3. Nach Satz 3.3.1 wissen wir, dass es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Matrix $J \in M_{n\times n}(K)$ in Jordan-Normalform mit

$$J = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

gibt. Da das charakteristische Polynom und die verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten von A und der dazu ähnlichen Matrix J übereinstimmen nach dem ersten Teil übereinstimmen, genügt es sich zu überlegen, dass das obige Verfahren, angewendet auf J, das richtige Ergebnis liefert. Dies liefert der zweite Teil. □

Rezept 3.3.11 (Berechnung der Jordanschen Normalform)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$.
- *Gesucht* sei die Jordansche Normalform von A (d.h. eine Matrix in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu A ist).

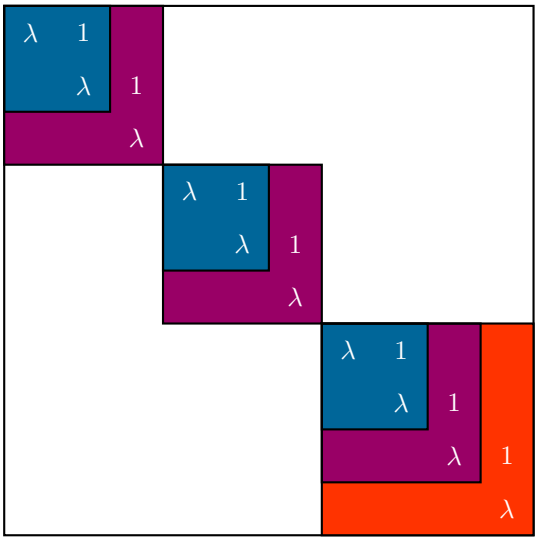


Abbildung 3.2.: Verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten und Größe von Jordanblöcken von Matrizen in Jordan-Normalform: Sei $s = 3$. Der blaue Bereich trägt zu $a_{\lambda,s-1}(J)$ bei, der violette Bereich trägt zu $a_{\lambda,s}(J)$ aber nicht zu $a_{\lambda,s-1}(J)$ bei, der rote Bereich trägt zu $a_{\lambda,s+1}(J)$ aber nicht zu $a_{\lambda,s}(J)$ bei.

- *Rezept:* Man bestimmt zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[T]$ von A. Als nächstes bestimmt man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (dies ist im allgemeinen algorithmisch nur näherungsweise möglich!); diese Menge stimmt mit der Menge $\sigma_K(A)$ der Eigenwerte von A überein. Außerdem ist es hilfreich, an dieser Stelle auch die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A zu bestimmen; dies liefert eine Faktorisierung

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \sigma_K(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda},$$

was bereits eine erste Orientierung über das Aussehen der Jordanschen Normalform von A liefert (Bemerkung 3.3.2).

Man betrachtet im folgenden die Eigenwerte einzeln und führt jeweils das folgende Verfahren durch: Sei $\lambda \in \sigma_K(A)$. Für alle $s \in \{1, \ldots, m_\lambda\}$ bestimmt man

$$a_{\lambda,s}(A) = \dim_K V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big)$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren; nach Definition ist dabei $a_{\lambda,0}(A) = 0$. Dann ist

$$2 \cdot a_{\lambda,s}(A) - a_{\lambda,s-1}(A) - a_{\lambda,s+1}(A)$$

die Anzahl der Jordanblöcke der Größe s zum Eigenwert λ in der Jordanschen Normalform für A.

- *Begründung:* Dass dieses Verfahren funktioniert, ist Inhalt von Proposition 3.3.10.

Bemerkung 3.3.12 (Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform)**.** Die Beschreibung der Anzahl der Jordanblöcke aus Proposition 3.3.10 liefert außerdem einen alternativen Beweis der *Eindeutigkeit* der Jordanschen Normalform einer Matrix: die Anzahlen/Größen der Jordanblöcke können nämlich direkt aus dem verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten bestimmt werden.

Beispiel 3.3.13 (Berechnung der Jordanschen Normalform einer Matrix)**.** Wir bestimmen im folgenden die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

mit dem Verfahren aus Rezept 3.3.11:

- *Besimmung des charakteristischen Polynoms:* Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A = \det(T \cdot I_3 - A) = (T-2)^3.$$

Also ist 2 der einzige Eigenwert von A.

- *Bestimmung der verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten:* Wegen

$$A - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$(A - 2 \cdot I_3)^2 = 0$$

erhalten wir (mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren oder aus dem Rang von $A - 2 \cdot I_3$)

$$\begin{aligned} a_{2,1}(A) &= \dim_{\mathbb{C}} V(A - 2 \cdot I_3, 0) = 2 \\ a_{2,2}(A) &= \dim_{\mathbb{C}} V\big((A - 2 \cdot I_3)^2, 0\big) = \dim_{\mathbb{C}} V(0,0) = 3 \\ a_{2,3}(A) &= \dim_{\mathbb{C}} V\big((A - 2 \cdot I_3)^2, 0\big) = \dim_{\mathbb{C}} V(0,0) = 3. \end{aligned}$$

- *Bestimmung der Größe der Jordan-Blöcke:* Es gibt also
  - wegen $2 \cdot 2 - 3 - 0 = 1$ genau einen Jordanblock der Größe 1 zum Eigenwert 2,
  - wegen $2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$ genau einen Jordanblock der Größe 2 zum Eigenwert 2,
  - wegen $2 \cdot 3 - 3 - 3 = 1$ keinen Jordanblock der Größe 3 zum Eigenwert 2 (das ist auch schon aus den vorherigen Größen klar, da gar kein Platz mehr für einen weiteren Block ist).

  Also ist
  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
  die Jordansche Normalform von A.

In diesem, kleinen, Beispiel hätte es auch genügt, nur das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und ihre geometrischen Vielfachheiten zu bestimmen, um auf die gesamte Jordansche Normalform zu schließen. Das obige Verfahren funktioniert jedoch ganz allgemein und wir haben nur deshalb ein kleines Beispiel gewählt, um die Berechnungen nicht unnötig ausufern zu lassen.

Alternativ kann man auch den Elementarteilersatz für Matrizen verwenden, um die Jordansche Normalform zu bestimmen; aber auch bei diesem Verfahren muss der schwierige Schritt der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms (getarnt als Primfaktorzerlegungen gewisser Elementarteiler) durchgeführt werden.

Rezept 3.3.14 (Berechnung der Jordanschen Normalform über den Elementarteilersatz)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$.
- *Gesucht* sei die Jordansche Normalform von A (d.h. die Matrix in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu A ist).
- *Rezept:* Man betrachtet die Matrix
  $$B := T \cdot I_n - A \in M_{n\times n}\big(K[T]\big)$$
  und bringt diese auf Smith-Normalform C (mit dem Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.5.6). Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K[T]$ diejenigen Elementarteiler von C, die *keine* Einheiten sind.

  Man zerlegt nun jeden der Elementarteiler $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ in Primfaktoren. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, r\}$ eine Faktorisierung der Form

$$\alpha_j = s_j \cdot \prod_{k=1}^{n_j} (T - \lambda_{j,k})^{m_{j,k}}$$

mit $s_j \in K^\times$, $n_j \in \mathbb{N}_{>0}$, $m_{j,1}, \ldots, m_{j,n_j} \in \mathbb{N}_{>0}$ und verschiedenen $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n_j} \in K$. Dann besteht die Jordansche Normalform von A genau aus der Familie

$$\big(J_{m_{j,k}}(\lambda_{j,k})\big)_{j \in \{1,\ldots,r\}, k \in \{1,\ldots,n_j\}}$$

von Jordanblöcken (diese sind nun aber anders sortiert als in Abbildung 3.1!).

- *Begründung:* Wir betrachten die $K[T]$-Modulhomomorphismen

$$\begin{aligned} \pi \colon K[T]^n &\longrightarrow K^n\big[L(A)\big] \\ p &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot e_j \end{aligned}$$
$$\varphi := L(T \cdot I_n - A) \colon K[T]^n \longrightarrow K[T]^n.$$

Dann ist π offenbar surjektiv und es gilt außerdem $\operatorname{im} \varphi = \ker \pi$ [3, Lemma 6.3/17]. Mit dem Homomorphiesatz erhalten wir daher

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} K[T]^n / \operatorname{im} L(T \cdot I_n - A) \cong K[T]^n / \operatorname{im} L(B).$$

Da B in Smith-Normalform ist, ist $K[T]^n / \operatorname{im} L(B)$ in kanonischer Weise eine direkte Summe von zyklischen $K[T]$-Moduln. Wie im Beweis von Satz 2.5.15 liefern die Primfaktorzerlegungen der Elementarteiler und der chinesische Restsatz dann eine direkte Summenzerlegung in zyklische $K[T]$-Moduln zu Primpotenzen. Wie wir im Beweis von Satz 3.3.1 gesehen haben, entsprechen diese direkten Summanden genau den Jordanblöcken der Jordanschen Normalform von A.

Rezept 3.3.15 (Berechnung einer Jordan-Basis)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in M_{n \times n}(K)$.
- *Gesucht* sei die Jordansche Normalform von A und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordanscher Normalform ist.
- *Rezept:* Man beginnt wie bei der Berechnung der Jordanschen Normalform von A (Rezept 3.3.11): Man bestimmt zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[T]$ von A. Als nächstes bestimmt man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (dies ist im allgemeinen algorithmisch nur näherungsweise möglich!); diese Menge stimmt mit der Menge $\sigma_K(A)$ der Eigenwerte von A überein. Außerdem ist es hilfreich,

an dieser Stelle auch die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A zu bestimmen; dies liefert eine Faktorisierung

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \sigma_K(A)} (T - \lambda)^{m_\lambda},$$

was bereits eine erste Orientierung über das Aussehen der Jordanschen Normalform von A liefert (Bemerkung 3.3.2).

Man betrachtet im folgenden die Eigenwerte einzeln und führt jeweils das folgende Verfahren durch: Sei $\lambda \in \sigma_K(A)$. Für alle $s \in \{1, \ldots, m_\lambda\}$ bestimmt man

$$a_{\lambda,s}(A) = V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big)$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Sei $d_\lambda \in \{1, \ldots, m_\lambda\}$ das minimale $s \in \mathbb{N}$ mit $a_{\lambda,s}(A) = a_{\lambda,s+1}(A)$ (dann ist d_λ nichts anderes als die Vielfachheit der Nullstelle λ des Minimalpolynoms μ_A).

Man geht nun induktiv über $s \in \{1, \ldots, d_\lambda\}$ vor, wobei man bei d_λ beginnt und dann *absteigend* fortfährt: Sei $M_{\lambda,s}$ die Menge aller bereits erzeugten Basisvektoren der *Stufe* s (d.h. bereits bestimmte Basisvektoren, die in $V((A-\lambda \cdot I_n)^s, 0)$ liegen); wir beginnen dabei mit $M_{\lambda,d_\lambda} = \emptyset$.

Zur Blockgröße s bestimmt man folgendermaßen Basisvektoren:

- Man bestimmt eine Basis $B_{\lambda,s}$ eines komplementären Untervektorraums von $V((A-\lambda \cdot I_n)^{s-1}, 0) \cup \mathrm{Span}_K M_{\lambda,s}$ in $V((A-\lambda \cdot I_n)^s, 0)$. Dafür bestimmt man zunächst eine Basis von $V((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0)$ bzw. $V((A-\lambda \cdot I_n)^{s-1}, 0)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und wendet dann Rezept I.5.2.19 an.
- Für jeden Vektor v in $B_{\lambda,s}$ bildet man dann (von rechts beginnend) die Kette

$$B_{\lambda,s,v} := \big(\underbrace{(A - \lambda \cdot I_n)^{s-1} \cdot v}_{\text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda} , \ldots, (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v, v \big).$$

- Man setzt dann $M_{\lambda,s-1} := \{(A-\lambda \cdot I_n) \cdot v \mid v \in M_{\lambda,s} \cup B_{\lambda,s}\}$ (falls $s > 1$ ist).

Dann bilden die Familien

$$\big(B_{\lambda,s,v}\big)_{\lambda \in \sigma_K(A), s \in \{1,\ldots,d_\lambda\}, v \in B_{\lambda,s}}$$

zusammen eine Basis B von K^n. Sei $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix, deren Spalten die Elemente von B (in der richtigen Reihenfolge) sind. Dann ist $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform.

- *Begründung:* Es ist zu zeigen,
  1. dass B eine Basis von K^n ist und

2. dass $M_{B,B}(L(A)) = S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

Zu 2. Nach dem ersten Teil ist B eine Basis von K^n. Wir betrachten dazu jeden Eigenwert einzeln. Dass dann jede Teilfamilie der Form $B_{\lambda,s,v}$ einen Jordanblock (der Größe s) liefert, folgt aus der folgenden Berechnung: Für alle $v \in V((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0)$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} A \cdot \big((A - \lambda \cdot I_n)^k \cdot v\big) &= \lambda \cdot \big((A - \lambda \cdot I_n)^k \cdot v\big) \\ &\quad + 1 \cdot \big((A - \lambda \cdot I_n)^{k+1} \cdot v\big); \end{aligned}$$

insbesondere ist

$$A \cdot \big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-1} \cdot v\big) = \lambda \cdot \big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-1} \cdot v\big).$$

Zu 1. Da die Matrix A zu einer Matrix in Jordan-Normalform ähnlich ist (Satz 3.3.1), folgt (Konjugationstrick und eine kleine Rechnung für Matrizen in Jordan-Normalform)

$$\operatorname{Span}_K \bigcup_{\lambda \in \sigma_K(A)} V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{d_\lambda}, 0\big) = K^n.$$

Nach Konstruktion von B ist B ein Erzeugendensystem der linken Seite, also auch von K^n.

Warum ist die Familie B linear unabhängig? Auch hier kann man aufgrund der Ähnlichkeit von A zu einer Matrix in Jordan-Normalform jeden Eigenwert einzeln behandeln. Man zeigt dann induktiv über die Stufen, dass die entsprechende Teilfamilie von B linear unabhängig ist (wobei man bei der höchsten Stufe beginnt und dann absteigt). Der wesentliche Schritt ist dann, dass für jedes $\lambda \in \sigma_K(A)$ und jedes $s \in \{2, \dots, d_\lambda\}$ die von $A - \lambda \cdot I_n$ induzierte lineare Abbildung

$$\frac{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big)}{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-1}, 0\big)} \longrightarrow \frac{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-1}, 0\big)}{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-2}, 0\big)}$$

wohldefiniert und injektiv ist (und daher insbesondere linear unabhängige Familien auf linear unabhängige Familien abbildet) (nachrechnen).

Beispiel 3.3.16 (Berechnung einer Jordan-Basis einer Matrix)**.** Wir betrachten wieder die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

aus Beispiel 3.3.13 und bestimmen mit dem Verfahren aus Rezept 3.3.15 eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist:

- *Bestimmung des charakteristischen Polynoms:* Es ist (Beispiel 3.3.13) $\chi_A = (T-2)^3$ und somit $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{2\}$.

- *Bestimmung der verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten:* Es gilt (Beispiel 3.3.13)

$$\begin{aligned} a_{2,1}(A) &= 2 \\ a_{2,2}(A) &= 3 \\ a_{2,3}(A) &= 3. \end{aligned}$$

  Insbesondere ist $d_2 = 2$.

- *Bestimmung der Basisblöcke:* Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (oder in diesem Fall durch scharfes Hinsehen) erhalten wir

$$\begin{aligned} &V\big((A-2\cdot I_3)^0, 0\big) = V(I_3, 0) = \{0\} \\ &V\big((A-2\cdot I_3)^1, 0\big) = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &V\big((A-2\cdot I_3)^2, 0\big) = V\big(0 \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}), 0\big) = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, e_3\} \end{aligned}$$

  Wir beginnen nun die rekursive Wahl der Basisvektoren bei der Stufe „$s = d_2 = 2$“: Es ist $M_{2,2} = \emptyset$.

  – Eine Basis eines zu

$$V\big((A-2\cdot I_3)^1, 0\big) \cup \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} M_{2,2} = V\big((A-2\cdot I_3)^1, 0\big)$$

    komplementären Untervektorraums in $V((A-2\cdot I_3)^2, 0)$ ist zum Beispiel

$$B_{2,2} = (e_3).$$

  – Der Vektor e_3 liefert dann die Familie

$$B_{2,2,e_3} = \big((A-2\cdot I_3)\cdot e_3, e_3\big) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

  – Dies liefert

$$M_{2,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Wir kommen nun zur Stufe „$s = 1$“:

  – Eine Basis eines zu

$$V\big((A - 2 \cdot I_3)^0, 0\big) \cup \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} M_{2,1} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

komplementären Untervektorraums in $V((A - 2 \cdot I_3)^1, 0)$ ist zum Beispiel

$$B_{2,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

– Der Vektor $v := (2, -1, 0)^\mathsf{T}$ liefert dann die Familie

$$B_{2,2,v} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- *Bestimmung einer Jordan-Basis bzw. der zugehörigen Transformation:* Insgesamt erhalten wir so die kombinierte Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Diese Basis liefert die invertierbare Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Nach Konstruktion ist dabei

$$S^{-1} \cdot A = S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Caveat 3.3.17. Ein beliebter Fehler ist, bei der Bestimmung einer Jordan-Basis in der falschen Reihenfolge vorzugehen, indem zuerst zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums bestimmt wird und dann zu solchen Basisvektoren v zum Eigenwert λ versucht wird, rekursiv $v_1, \ldots$ mit

$$\begin{aligned} (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v_1 &= v \\ (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v_2 &= v_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

zu bestimmen. Dieses Verfahren funktioniert im allgemeinen *nicht*, denn *nicht* jede Basis des Eigenraums lässt sich zu einer Jordanbasis für die Jordanblöcke

zu diesem Eigenwert fortsetzen! Wir verdeutlichen dies an einem konkreten Beispiel: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Dann ist 2 ein Eigenwert von A und (e_1, e_1+e_2) ist eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 2 von A. Aber es gibt keinen Vektor $v \in \mathbb{C}^3$ mit

$$(A - 2 \cdot I_3) \cdot v = e_1 \quad \text{oder} \quad (A - 3 \cdot I_3) \cdot v = e_1 + e_2.$$

Die Basis $(e_1, e_1 + e_2)$ des Eigenraums lässt sich somit *nicht* zu einer Jordan-Basis von A fortsetzen.

Es ist also essentiell, bei den Basisvektorketten auf der höchstmöglichen Stufe zu beginnen und sich dann Schritt für Schritt in Richtung Eigenvektoren vorzuhangeln.

Rezept 3.3.18 (Jordansche Normalform von Endomorphismen)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V und ein Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$.
- *Gesucht* sei eine Basis B von V mit der Eigenschaft, dass die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f in Jordan-Normalform ist.
- *Rezept:* Sei $n := \dim_K V$. Man wähle eine Basis C von V und bestimme die darstellende Matrix

  $$A := M_{B,B}(f) \in M_{n\times n}(K).$$

  Dann bestimme man mithilfe von Rezept 3.3.15 eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit der Eigenschaft, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

  Sei

  $$B := \big(T_{E_n,C} \circ L(S^{-1})(e_1), \ldots, T_{E_n,C} \circ L(S^{-1})(e_n)\big).$$

  Dann ist B eine Basis von V und $M_{B,B}(f)$ ist in Jordan-Normalform.
- *Begründung:* Nach Konstruktion ist J in Jordan-Normalform und

  $$M_{B,B}(f) = S^{-1} \cdot M_{B,B}(f) \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = J.$$

  Man beachte dabei, dass B eine Basis von V ist, da $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von K^n ist und die Abbildungen $L(S^{-1})$ und $T_{E_n,C}$ Isomorphismen von K-Vektorräumen sind.

Anmerkung zum Lernen. Falls Ihnen entfallen sein sollte, wie man Matrizen zu linearen Abbildungen erstellen kann und wie die Basiswechselberechnungen funktionieren, sollten Sie diese Techniken dringend wiederholen!

3.3.4 Anwendungen der Jordanschen Normalform

Zum Abschluss gehen wir noch auf ausgewählte Anwendungen der Jordanschen Normalform ein:

Wir beginnen mit einer Variante des Konjugationstricks zur Berechnung von Potenzen von Matrizen:

Beispiel 3.3.19 (Konjugationstrick für Potenzen)**.** Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Wie kann man die Potenzen A^k für $k \in \mathbb{N}$ geschickt (möglichst in geschlossener Form) berechnen? Nach dem Satz über die Jordansche Normalform (Satz 3.3.1) gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft, dass

$$J := S^{-1} \cdot A \cdot S$$

in Jordan-Normalform ist. Sei $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Matrix, die nur die Diagonaleinträge von J (und sonst Nullen) enthält und sei $N \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Matrix, die nur die ersten Nebendiagonaleinträge von J (und sonst Nullen) enthält. Dann gilt (nachrechnen)

$$D \cdot N = N \cdot D \quad \text{und} \quad N^n = 0.$$

Also erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} A^k &= (S \cdot J \cdot S^{-1})^k \\ &= S \cdot J^k \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot (D+N)^k \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot D^{k-j} \cdot N^j \right) \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \left(\sum_{j=0}^{\min(n-1,k)} D^{k-j} \cdot N^j \right) \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

Die binomische Formel zur Berechnung von $(D+N)^k$ ist dabei anwendbar, da $D \cdot N = N \cdot D$ gilt. Man beachte außerdem, dass die Potenzen D^{k-j} und N^j einfach zu berechnen sind (da es sich jeweils um (Neben)-Diagonalmatrizen handelt).

Beispiel 3.3.20 (Kombinatorik)**.** Analog zur Herleitung der expliziten Formel für Fibonacci-Zahlen über den Konjugationstrick (Beispiel I.6.2.12) kann man auch viele andere Zählprobleme in der Kombinatorik, die auf (wechselseitigen) linearen Rekursionen beruhen, über den allgemeineren Konjugationstrick aus Beispiel 3.3.19 mit der Jordanschen Normalform behandeln.

Beispiel 3.3.21 (die Exponentialfunktion für Matrizen)**.** In Analogie zur gewöhnlichen Exponentialfunktion definiert man

$$\begin{aligned} \exp\colon M_{n\times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k; \end{aligned}$$

die Exponentialreihe für komplexe Matrizen konvergiert dabei für jede Matrix (bezüglich der Maximumsnorm der Koeffizienten) – dies lässt sich analog zur Konvergenz der gewöhnlichen Exponentialreihen beweisen (Analysis II).

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Wie in Beispiel 3.3.19 können wir dann $S^{-1} \cdot A \cdot S = D + N$ schreiben, wobei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist, D eine Diagonalmatrix ist und N nilpotent ist mit $D \cdot N = N \cdot D$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp\bigl(S \cdot (D+N) \cdot S^{-1}\bigr) = S \cdot \exp(D+N) \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \exp D \cdot \exp N \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist es essentiell, dass $D \cdot N = N \cdot D$ ist! Die Matrizen $\exp D$ und $\exp N$ lassen sich ohne Schwierigkeiten direkt berechnen.

Beispiel 3.3.22 (lineare Differentialgleichungssysteme)**.** Die Exponentialfunktion für Matrizen (Beispiel 3.3.21) liefert eine Möglichkeit, lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten explizit zu lösen (Analysis II).

Beispiel 3.3.23 (gruppentheoretische Eigenschaften von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von Elementen $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$A^{2017} = I_n,$$

denn: Konjugiertheit in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist dasselbe wie Ähnlichkeit von Matrizen in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Es genügt daher, die analoge Aussage für Ähnlichkeit zu beweisen. Nach dem Satz über die Jordansche Normalform (Satz 3.3.1) genügt es dafür zu zeigen, dass nur endlich viele Jordan-Normalformen für solche Matrizen auftreten können.

Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A^{2017} = I_n$. Insbesondere ist das Minimalpolynom daher ein Teiler von $p := T^{2017} - 1 \in \mathbb{C}[T]$. Da

$$\forall_{j\in\{0,\dots,2016\}} \quad p\bigl(e^{\frac{2\cdot\pi\cdot j}{2017}}\bigr) = 1 - 1 = 0$$

ist, ist

$$\prod_{j=0}^{2016} \bigl(T - e^{\frac{2\cdot\pi\cdot j}{2017}}\bigr)$$

ein normiertes Polynom vom Grad 2017, was das normierte Polynom p vom Grad 2017 teilt. Also ist

$$p = \prod_{j=0}^{2016} (T - e^{\frac{2\cdot\pi\cdot j}{2017}}).$$

Da μ_A ein Teiler von p ist, zerfällt somit auch μ_A in verschiedene Linearfaktoren. Daher ist A diagonalisierbar (Proposition 3.2.14 oder Satz 3.3.1) und die Eigenwerte von A liegen in der endlichen Menge $\{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot j}{2017}} \mid j \in \{0, \ldots, 2016\}\}$. Aus diesen Eigenwerten lassen sich aber nur endlich viele verschiedene Jordan-Normalformen der Größe $n \times n$ zusammensetzen.

Beispiel 3.3.24 (Lie-Gruppen und Lie-Algebren)**.** Lie-Gruppen sind Gruppen, die eine glatte Struktur besitzen (d.h. die unterliegende Menge ist eine glatte Mannigfaltigkeit), und deren Gruppenverknüpfung und Gruppeninversion glatte Abbildungen sind. Ein wichtiges Beispiel ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Die Jordansche Normalform erlaubt es, Gruppenelemente in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ in einfachere Gruppenelemente zu zerlegen (genauer gesagt verwendet man dafür eine multiplikative Variante der Jordanschen Normalform). Diese Zerlegung ist die Grundlage für ähnliche Zerlegungen in komplizierteren Lie-Gruppen. Die Linearisierung von Lie-Gruppen führt zu sogenannten Lie-Algebren. Die Jordansche Normalform ist dann einer der Grundsteine für Zerlegungen von Lie-Algebren in einfachere Bausteine.

4

Multilineare Algebra

Die multilineare Algebra befasst sich systematisch mit multilinearen Abbildungen, also insbesondere mit Bilinearformen und Determinanten.

Die grundlegende Idee ist dabei, durch einen Trick diese multilinearen Abbildungen wieder in lineare Abbildungen zu übersetzen; der Preis dieser Übersetzung ist, dass die Starträume, auf denen diese linearen Abbildungen definiert sind, etwas komplizierter sind. So lassen sich zum Beispiel bilineare Abbildungen als lineare Abbildungen auf geeigneten Tensorprodukten beschreiben und Determinanten als lineare Abbildungen auf geeigneten äußeren Produkten.

Diese Vektorräume bilden außerdem wichtige Bausteine in der Differentialgeometrie, nämlich zum Beispiel bei der Definition so grundlegender Begriffe wie riemannscher Metriken auf glatten Mannigfaltigkeiten.

Die multilineare Algebra kann auch in der größeren Allgemeinheit der Modul- statt der Vektorraumtheorie formuliert werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns aber auf den Vektorraumfall.

Überblick über dieses Kapitel.

4.1	Das Tensorprodukt	138
4.2	Das äußere Produkt	153

Schlüsselbeispiel. Tensorprodukte für bilineare Abbildungen, äußere Produkte für Determinanten

4.1 Das Tensorprodukt

Das Tensorprodukt ist eine Maschine, die multilineare Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt (Abbildung 4.1). Wie bei vielen Maschinen ist es in den meisten Situationen nur wichtig zu wissen *welche Funktionalität* diese Maschine bereitstellt und nicht *wie* sie von innen aussieht. Diese Funktionalität lässt sich kurz und knapp durch eine universelle Eigenschaft beschreiben.

4.1.1 Wozu das Tensorprodukt?

Bevor wir erklären, in welchem Sinne das Tensorprodukt multilineare Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt, führen wir den Begriff der multilinearen Abbildung allgemein ein.

Definition 4.1.1 (bilineare Abbildung, multilineare Abbildung)**.** Sei K ein Körper.

- Seien U, V, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f\colon V \times W \longrightarrow U$ ist *bilinear*, wenn folgendes gilt: Für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} f(v, \cdot)\colon W &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto f(v,x) \\ f(\cdot, w)\colon V &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto f(x,w) \end{aligned}$$

  K-linear.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien $V_1, \dots, V_n$ und U Vektorräume über K. Eine Abbildung $f\colon \prod_{j=1}^{n} V_j \longrightarrow U$ ist *n-linear*, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $v_1 \in V_1, \dots, v_{j-1} \in V_{j-1}, v_{j+1} \in v_{j+1}, \dots, v_n \in V_n$ ist

$$\begin{aligned} \prod_{k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{j\}} V_k &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto f(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

  eine K-lineare Abbildung.

Bilineare Abbildungen sind in dieser Terminologie dasselbe wie 2-lineare Abbildungen (was ja sprachlich auch Sinn ergibt!).

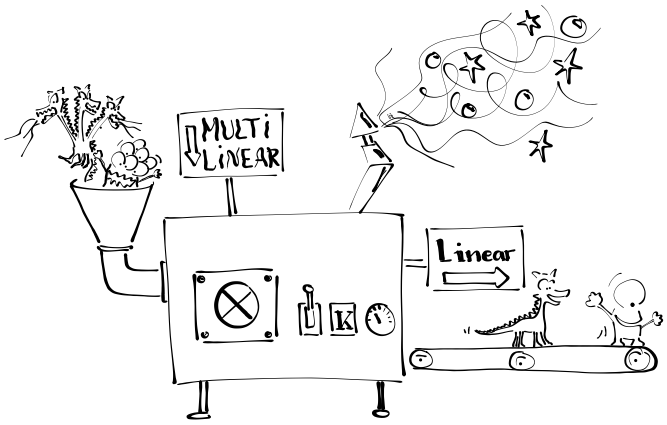


Abbildung 4.1.: Das Tensorprodukt als Maschine

Beispiel 4.1.2. Wir kennen bereits wichtige Beispiele für multilineare Abbildungen: Sei K ein Körper.

- Ist V ein K-Vektorraum, so sind Bilinearformen $V \times V \longrightarrow K$ nichts anderes als bilineare Abbildungen $V \times V \longrightarrow K$. Insbesondere passen Skalarprodukte bzw. hermitesche Skalarprodukte in diesen Kontext.
- Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so kann man die Determinante $\det\colon M_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ als n-lineare Abbildung $K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ auffassen (wobei die Argumente jeweils den Zeilen der Matrizen entsprechen).
- Ist V ein K-Vektorraum, so ist die Skalarmultiplikation

  $$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$

  bilinear; aber die Abbildung $+\colon V \times V \longrightarrow V$ ist im allgemeinen *nicht* bilinear.
- Ist A eine kommutative K-Algebra, so ist die Multiplikationsabbildung

  $$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$

  bilinear.
- Ist V ein K-Vektorraum, so ist die Auswertungsabbildung

  $$\begin{aligned} V^* \times V &\longrightarrow K \\ (f, v) &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

  bilinear.

- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

  bilinear (über $\mathbb{R}$).

Bemerkung 4.1.3. Sei K ein Körper und seien V, W, X, Y Vektorräume über K. Ist $f\colon V \times W \longrightarrow X$ bilinear und ist $g\colon X \longrightarrow Y$ linear, so ist die Komposition $g \circ f\colon V \times W \longrightarrow Y$ bilinear.

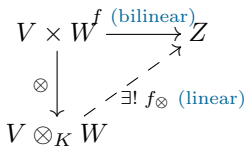
Caveat 4.1.4. Multilineare Abbildungen sind im allgemeinen *nicht* linear und lineare Abbildungen von Produkten sind im allgemeinen *nicht* multilinear!

Da wir bereits eine ausgefeilte Theorie für lineare Abbildungen entwickelt haben, ist es wünschenswert diese Theorie auch für multilineare Abbildungen zu nutzen. Das Tensorprodukt ermöglicht genau das:

Satz 4.1.5 (Tensorprodukt)**.** *Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K. Dann gibt es einen K-Vektorraum $V \otimes_K W$ und eine bilineare Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\otimes\colon V \otimes_K W \longrightarrow Z$ mit

$$f_\otimes \circ \otimes = f.$$



Der K-Vektorraum $V \otimes_K W$ und die Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet $V \otimes_K W$ als Tensorprodukt von V und W über K.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt mit dem Standardargument für universelle Eigenschaften (Beweis von Satz 2.3.24).

Die *Existenz* reichen wir in Kapitel 4.1.4 durch eine konkrete (aber recht unförmige) Konstruktion nach. □

Caveat 4.1.6 (Elementartensoren)**.** Sei K ein Körper, seien V, W Vektorräume über K. Elemente der Form

$$v \otimes w := \otimes(v, w) \in V \otimes_K W$$

mit $v \in V$ und $w \in W$ bezeichnet man als *Elementartensoren*.

Da die Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ im allgemeinen *nicht* surjektiv ist, sind *nicht* alle Elemente von $V \otimes_K W$ Elementartensoren, sondern Linearkombinationen von Lineartensoren.

Ist $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ eine bilineare Abbildung von K-Vektorräumen, so schreibt man normalerweise

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\longrightarrow Z \\ v \otimes w &\longmapsto f(v,w) \end{aligned}$$

für die induzierte lineare Abbildung $f_\otimes$ (obwohl ja nicht alle Elemente auf der linken Seite Elementartensoren sind ... aber wegen der Eindeutigkeit von $f_\otimes$ ist $f_\otimes$ durch diese Beschreibung bereits eindeutig bestimmt).

Beispiel 4.1.7 (Rechnen mit Tensoren)**.** Die Skalarmultiplikationsabbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ induziert also eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel gilt in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(da die Abbildung $\otimes\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ bilinear ist).

4.1.2 Rechnen mit Tensorprodukten

Es empfiehlt sich im Normalfall, mit dem Tensorprodukt nur mithilfe der universellen Eigenschaft zu arbeiten. Daraus leiten sich zum Beispiel die folgenden Eigenschaften und Konstruktionsprinzipien ab, die für die meisten Anwendungen völlig ausreichen.

Satz 4.1.8 (der Tensorproduktbaukasten)**.** *Sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Dann gilt:*

1. Neutralität des Grundkörpers. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} K \otimes_K V &\longrightarrow V \\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v \\ V &\longrightarrow K \otimes_K V \\ v &\longmapsto 1 \otimes v \end{aligned}$$

2. Kommutativität. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\longrightarrow W \otimes_K V \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v \\ W \otimes_K V &\longrightarrow V \otimes_K W \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v \end{aligned}$$

3. Assoziativität. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} U \otimes_K (V \otimes_K W) &\longrightarrow (U \otimes_K V) \otimes_K W \\ u \otimes (v \otimes w) &\longmapsto u \otimes (v \otimes w) \\ (U \otimes_K V) \otimes_K W &\longrightarrow U \otimes_K (V \otimes_K W) \\ (u \otimes v) \otimes w &\longmapsto u \otimes (v \otimes w) \end{aligned}$$

4. Verträglichkeit mit direkten Summen. *Sei $(W_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-Vektorräumen. Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} V \otimes_K \bigoplus_{i\in I} W_i &\longrightarrow \bigoplus_{i\in I} (V \otimes_K W_i) \\ v \otimes (w_i)_{i\in I} &\longmapsto (v \otimes w_i)_{i\in I} \\ \bigoplus_{i\in I} (V \otimes_K W_i) &\longrightarrow V \otimes_K \bigoplus_{i\in I} W_i \\ (v \otimes w_i)_{i\in I} &\longmapsto v \otimes (w_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

5. Exponentialgesetz. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_K(V \otimes_K W, U) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K\big(W, \operatorname{Hom}_K(V, U)\big) \\ f &\longmapsto \big(w \mapsto (v \mapsto f(v \otimes w))\big) \\ \operatorname{Hom}_K\big(W, \operatorname{Hom}_K(V, U)\big) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V \otimes_K W, U) \\ f &\longmapsto \big(v \otimes w \mapsto (f(w))(v)\big) \end{aligned}$$

6. Funktorialität. *Sind $f\colon V \longrightarrow V'$ und $g\colon W \longrightarrow W'$ lineare Abbildungen, so liefert*

$$\begin{aligned} f \otimes_K g\colon V \otimes_K W &\longrightarrow V' \otimes_K W' \\ v \otimes w &\longmapsto f(v) \otimes g(w) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung. Dabei gilt $\mathrm{id}_V \otimes_K \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V\otimes_K W}$ *und diese Konstruktion ist mit der Komposition von Abbildungen kompatibel.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, mithilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts (die anderen Teile lassen sich analog behandeln): Die Abbildung

$$\begin{aligned} K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

ist bilinear und induziert somit eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon K \otimes_K V &\longrightarrow V \\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \psi\colon V &\longrightarrow K \otimes_K V \\ v &\longmapsto 1 \otimes v = \otimes(1, v) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung (da $\otimes\colon K \times V \longrightarrow K \otimes_K V$ bilinear ist).

Es gilt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$, denn: Für alle $v \in V$ ist

$$\varphi \circ \psi(v) = \varphi(1 \otimes v) = 1 \cdot v = v.$$

Umgekehrt gilt auch $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K \otimes_K V}$, denn: Die Abbildung $\psi \circ \varphi\colon K \otimes_K V \longrightarrow K \otimes_K V$ ist linear und erfüllt wegen

$$\forall_{(\lambda,v) \in K \times V} \quad \psi \circ \varphi(\lambda \otimes v) = \psi(\lambda \cdot v) = 1 \otimes (\lambda \cdot v) = \lambda \otimes v$$

die Gleichung

$$(\psi \circ \varphi) \circ \otimes = \otimes = \mathrm{id}_{K \otimes_K V} \circ \otimes\,.$$

Mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $K \otimes_K V$ folgt daher die behauptete Gleichheit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K \otimes_K V}$. □

Insbesondere erhalten wir daraus eine Berechnung der Dimension von Tensorprodukten bzw. genauer eine gute Möglichkeit, um Elemente von Tensorprodukten auf Trivialität zu testen:

Korollar 4.1.9 (Dimension von Tensorprodukten)**.** *Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und ist $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W, so ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $V \otimes_K W$. Insbesondere gilt:*

$$\dim_K V \otimes_K W = |I \times J| = |I| \cdot |J| = \dim_K V \cdot \dim_K W.$$

Beweis. Die Basen $(v_i)_{i \in I}$ von V bzw. $(w_j)_{j \in J}$ von W liefern kanonische Isomorphismen

$$V \cong_K \bigoplus_{i \in I} K \quad \text{und} \quad W \cong_K \bigoplus_{j \in J} K.$$

Mit Satz 4.1.8 erhalten wir daher einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\cong_K \left(\bigoplus_I K\right) \otimes_K \left(\bigoplus_J K\right) \\ &\cong_K \bigoplus_I \bigoplus_J (K \otimes_K K) \\ &\cong_K \bigoplus_{I \times J} K \end{aligned}$$

von K-Vektorräumen, der die Familie $(v_i \otimes v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ auf die Standardbasis von $\bigoplus_{I\times J} K$ abbildet. Also ist $(v_i \otimes v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von $V \otimes_K W$.

Die Dimensionsberechnung ist eine direkte Konsequenz daraus. Man beachte dabei, dass in dem Fall, dass $|I|$ oder $|J|$ unendlich ist, die Gleichheit $|I \times J| = |I| \cdot |J|$ nach Definition der Multiplikation von Kardinalzahlen gilt. □

Beispiel 4.1.10. Zum Beispiel gilt in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \neq 0,$$

denn $(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$ bildet eine Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ (Korollar 4.1.9) und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= 2 \cdot e_1 \otimes e_1 + 2 \cdot e_1 \otimes e_2 - 2 \cdot e_1 \otimes e_2 \\ &= 2 \cdot e_1 \otimes e_1. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.11 (Darstellung von Tensoren durch Matrizen)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(e_j \otimes e_k)_{j\in\{1,\dots,m\},k\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis von $K^m \otimes_K K^n$. Daher kann man Elemente von $K^m \otimes_K K^n$ auch bequem als Matrizen in $M_{m\times n}(K)$ darstellen. Darstellungen dieser Art sind vor allem in der Physik populär (z.B. Trägheitstensoren).

Sei nun $m = n$. Unter dem zur Basis $(e_j \otimes e_k)_{j,k\in\{1,\dots,n\}}$ assoziierten Isomorphismus sowie dem von der Abbildung $\otimes\colon K^n \times K^n \longrightarrow K^n \otimes_K K^n$ induzierten Isomorphismus

$$K^n \otimes_K K^n \cong_K (K^n \otimes_K K^n)^* = \mathrm{Hom}_K(K^n \otimes_K K^n, K) \cong_K \mathrm{Bil}_K(K^n)$$

entspricht diese Darstellung von Tensoren in $K^n \otimes_K K^n$ der Darstellung von Bilinearformen auf K^n durch quadratische Matrizen (Kapitel 1.1.4).

Anmerkung zum Lernen (der Schrecken des Tensorprodukts)**.** Warum wird das Tensorprodukt oft als so schwierig und unzugänglich empfunden? Der Hauptgrund liegt vermutlich darin, dass wir mit den meisten bisher behandelten Vektorräumen eine konkrete geometrische Anschauung (zum Beispiel

angelehnt an die euklidische Geometrie) verbinden. Das Tensorprodukt hingegen stammt nicht aus der Quelle der Anschauung, sondern aus abstrakten strukturellen Überlegungen, und besitzt keine wirklich gute anschauliche Interpretation. Positiver formuliert: Man muss sich gar nichts dafür vorstellen können und es ist völlig ausreichend, die universelle Eigenschaft, den Tensorproduktbaukasten und die Konstruktion expliziter Basen aus Korollar 4.1.9 zu beherrschen.

4.1.3 Anwendungen des Tensorprodukts

Nach Definition verwandelt das Tensorprodukt bilineare Abbildungen in lineare Abbildungen, was in vielen Situationen nützlich ist. Darüberhinaus gibt es noch viele spezifischere Anwendungen des Tensorprodukts in der Mathematik:

Beispiel 4.1.12 (Änderung der Skalare)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei A eine kommutative K-Algebra (zum Beispiel die Polynomalgebra $K[T]$ oder ein Körper, der K als Teilkörper enthält). Dann bildet $A \otimes_K V$ bezüglich der durch

$$\begin{aligned} A \times (A \otimes_K V) &\longrightarrow A \otimes_K V \\ \big(a, (b \otimes v)\big) &\longmapsto (a \cdot b) \otimes v \end{aligned}$$

gegebenen Skalarmultiplikation einen A-Modul (nachrechnen).

Ist $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung von K-Vektorräumen, so ist $\mathrm{id}_A \otimes_K f\colon A \otimes_K V \longrightarrow A \otimes_K W$ eine A-lineare Abbildung (nachrechnen).

Man kann auf diese Weise das Tensorprodukt $A \otimes_K \cdot$ als Funktor von der Kategorie der K-Vektorräume in die Kategorie der A-Moduln auffassen.

Zum Beispiel erhält man so aus jedem R-Vektorraum V den induzierten $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ und es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V) = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Jeder $\mathbb{R}$-lineare Endomorphismus f von V induziert einen $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} f$ von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$. Dies kann manchmal nützlich sein, wenn man die Normalformentheorie über $\mathbb{C}$ auf Endomorphismen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen anwenden möchte.

Ausblick 4.1.13 (Dimensionen statt Ränge)**.** Betrachtet man allgemeiner das Tensorprodukt über Ringen, so kann man sich in vielen Situationen von Rängen von Moduln auf Dimensionen von Vektorräumen zurückziehen. Ist zum Beispiel V ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, so ist der durch Änderung der Skalare gebildete $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ endlich-dimensional und dabei stimmt $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V)$ mit dem Rang (des freien Anteils) von V überein.

Argumente dieser Art können verwendet werden, um die Eindeutigkeitsaussage im Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz 2.5.15) auf Dimensionsgleichheiten von Vektorräumen zu reduzieren.

Beispiel 4.1.14 (koordinatenfreie Beschreibung der Spur)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von f. Dann ist

$$\operatorname{tr} f = E \circ \psi(f),$$

wobei $\psi\colon \operatorname{Hom}_K(V,V) \longrightarrow V^* \otimes_K V$ das Inverse des Isomorphismus (siehe unten)

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^* \otimes_K V &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V,V) \\ g \otimes v &\longmapsto \big(x \mapsto g(x) \cdot v\big) \end{aligned}$$

ist und

$$\begin{aligned} E\colon V^* \otimes_K V &\longrightarrow K \\ g \otimes v &\longmapsto g(v) \end{aligned}$$

die Auswertungsabbildung ist.

Warum ist φ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen? Da V endlich-dimensional ist, ist $\dim_K V^* = \dim_K V$, und damit

$$\begin{aligned} \dim_K(V^* \otimes_K V) &= \dim_K V^* \cdot \dim_K V = \dim_K V \cdot \dim_K V \\ &= \dim_K \operatorname{Hom}_K(V,V). \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass φ injektiv ist. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^* (Beweis von Satz I.4.5.4). Dann ist $(v_j^* \otimes v_k)_{(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2}$ eine Basis von $V^* \otimes_K V$ (Korollar 4.1.9). Sei außerdem $A \in M_{n\times n}(K)$ mit

$$0 = \varphi\Bigg(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{j,k} \cdot v_j^* \otimes v_k\Bigg) = \Bigg(x \mapsto \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{j,k} \cdot v_j^*(x) \cdot v_k\Bigg).$$

Insbesondere erhalten wir für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ (durch Einsetzen von v_j), dass

$$0 = \sum_{k=1}^n A_{j,k} \cdot 1 \cdot v_k.$$

Da die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, folgt daraus $A_{j,1} = \dots = A_{j,k} = 0$. Insgesamt liefert dies $A = 0$, was die Injektivität von φ beweist.

Wir erklären nun, warum tatsächlich die behauptete Gleichheit $\operatorname{tr} f = E \circ \psi(f)$ gilt: Sei $B := (v_1, \dots, v_n)$ und $A := M_{B,B}(f) \in M_{n\times n}(K)$. Dann ist

$$f = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\cdot v_j^* \otimes v_k\Big)$$

(nachrechnen, dass beide Seiten auf der Basis B übereinstimmen). Also erhalten wir

$$\begin{aligned} E\circ\psi(f) &= E\circ\psi\circ\varphi\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\cdot v_j^*\otimes v_k\Big)\\ &= E\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\cdot v_j^*\otimes v_k\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\cdot v_j^*(v_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\cdot\delta_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,j}\\ &= \operatorname{tr} M_{B,B}(f)\\ &= \operatorname{tr} f, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Damit erhält man also eine Beschreibung von $\operatorname{tr} f$, die keine Wahl von Basen mehr enthält; da die Wahl einer Basis der Wahl eines Koordinatensystems entspricht, bezeichnet man dies als *koordinatenfreie Beschreibung von* $\operatorname{tr} f$. Für konkrete Berechnungen ist diese Beschreibung im Normalfall nicht nützlich. Möchte man aber die Spur auf allgemeinere Situationen verallgemeinern, so ist diese Beschreibung hilfreich.

Beispiel 4.1.15 (die Tensoralgebra)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum. Wir schreiben $V^{\otimes 0} := K$, $V^{\otimes 1} := V$ und definieren induktiv für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$V^{\otimes(n+1)} := V \otimes_K V^{\otimes n}.$$

Dann bildet der K-Vektorraum

$$T(V) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\oplus n}$$

zusammen mit der folgenden Multiplikation $m\colon T(V)\times T(V) \longrightarrow T(V)$ eine K-Algebra (nachrechnen). Die Abbildung m ist dabei die bilineare Fortsetzung der Bausteine

$$\begin{aligned} V^{\otimes 0}\times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n}\\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda\cdot v\\ V^{\otimes n}\times V^{\otimes 0} &\longrightarrow V^{\otimes n}\\ (v,\lambda) &\longmapsto \lambda\cdot v \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ bzw.

$$V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes(n+m)}$$
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

Ist $V = K$, so ist $T(V) = T(K)$ isomorph zur K-Algebra $K[T]$ (wobei $1 \in V^{\otimes 1} = K \subset T(K)$ dem Element $T \in K[T]$ entspricht).

Man beachte jedoch, dass die K-Algebra $T(V)$ im Falle $\dim_K V > 1$ *nicht* kommutativ ist!

Beispiel 4.1.16 (kategorielle Definition von Algebren)**.** Sei K ein Körper, sei A ein K-Vektorraum und seien

$$\varepsilon\colon K \longrightarrow A$$
$$\mu\colon A \otimes_K A \longrightarrow A$$

K-lineare Abbildungen. Dann bildet A genau dann eine (kommutative) K-Algebra bezüglich der Multiplikation

$$A \times A \longrightarrow A$$
$$(x, y) \longmapsto \mu(x \otimes y)$$

und der Skalarmultiplikation

$$K \times A \longrightarrow A$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \mu\big(\varepsilon(\lambda), x\big)$$

wenn die Diagramme in Abbildung 4.2 alle kommutativ sind (nachrechnen). Dabei bezeichnet

$$\mathrm{flip}\colon A \otimes_K A \longrightarrow A \otimes_K A$$
$$x \otimes y \longmapsto y \otimes x$$

die Vertauschungsabbildung.

Das Tensorprodukt erlaubt es also, den Algebrenbegriff nur mithilfe von linearen Abbildungen und der Gleichheit der Komposition von gewissen linearen Abbildugnen zu definieren. Dies kann genutzt werden, um Algebren in allgemeineren Kategorien einzuführen und um den Begriff der Algebra (durch Umdrehen der „Pfeile“) zum Begriff der Koalgebra zu dualisieren.

Beispiel 4.1.17 (Dualität zwischen Tensorprodukten und Hom-Funktoren)**.** Sei K ein Körper. Der Tensorproduktbaukasten (Satz 4.1.8) beinhaltet insbesondere den kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, U) \cong_K \mathrm{Hom}_K\big(W, \mathrm{Hom}_K(V, U)\big)$$

Neutralität von $1 \in K$ bezüglich Multiplikation (von links):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A \\ {\scriptstyle a \mapsto 1 \otimes a}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mu} \\ K \otimes_K A & \xrightarrow[\varepsilon \otimes_K \mathrm{id}_A]{} & A \otimes_K A \end{array}$$

Kommutativität der Multiplikation:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_K A & \xrightarrow{\mathrm{flip}} & A \otimes_K A \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A & \xrightarrow[\mathrm{id}_A]{} & A \end{array}$$

Assoziativität der Multiplikation:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_K (A \otimes_K A) & & \xrightarrow{a \otimes (b \otimes c) \mapsto (a \otimes b) \otimes c} & & (A \otimes_K A) \otimes_K A \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A \otimes_K \mu}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu \otimes_K \mathrm{id}_A} \\ A \otimes_K A & & & & A \otimes_K A \\ & {\scriptstyle \mu}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \mu} & \\ & & A & & \end{array}$$

Abbildung 4.2.: Algebrenaxiome durch Tensorprodukte

für alle K-Vektorräume U, V, W. Diese „Dualität“ zwischen den Funktoren $V \otimes_K \cdot$ und $\mathrm{Hom}_K(V, \cdot)$ ist ein Beispiel für eine sogenannte *Adjunktion* von Funktoren und spielt in der homologischen Algebra eine wichtige Rolle.

Beispiel 4.1.18 (stetige Funktionen auf Produkten)**.** Seien X und Y endliche Mengen. Dann zeigt der Tensorproduktbaukasten (Satz 4.1.8), dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Abb}(Y, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Abb}(X \times Y, \mathbb{R}) \\ f \otimes g &\longmapsto \big((x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)\big) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist.

Allgemeiner: Ist X ein topologischer Raum, so bildet die Menge $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf X eine $\mathbb{R}$-Algebra (bezüglich der punktweisen Verknüpfungen). Ist Y ein weiterer topologischer Raum, so kann man sich fragen, wie man die $\mathbb{R}$-Algebra $C(X \times Y, \mathbb{R})$ aus $C(X, \mathbb{R})$ und $C(Y, \mathbb{R})$

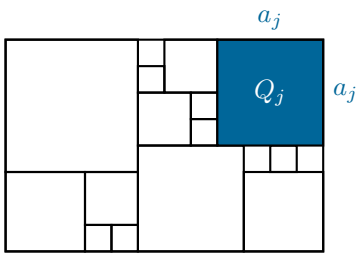


Abbildung 4.3.: Pflasterung eines Rechtecks durch Quadrate

berechnen kann. Es stellt sich heraus, dass (für gutartige topologische Räume) die $\mathbb{R}$-Algebra $C(X \times Y, \mathbb{R})$ eine geeignete Vervollständigung des Tensorprodukts $C(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} C(Y, \mathbb{R})$ ist.

Beispiel 4.1.19 (Rechtecke [10, Miniature 12])**.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ eine irrationale Zahl und sei

$$R := [0,1] \times [0,\alpha] \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann kann R *nicht* durch endlich viele Quadrate gepflastert werden, denn:

Angenommen, es gäbe eine Pflasterung von R durch endlich viele Quadrate $Q_1, \ldots, Q_N$ der Seitenlänge $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}_{>0}$ (Abbildung 4.3). Genauer: Für jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ gibt es einen Punkt $x_j \in \mathbb{R}^2$ mit

$$Q_j = x_j + [0, a_j] \times [0, a_j] \subset R$$

und es gilt

$$\bigcup_{j=1}^{N} Q_j = R \quad \text{und} \quad \forall_{j,k \in \{1,\ldots,N\}} \quad j \neq k \Longrightarrow Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \emptyset.$$

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum(!) und darin den $\mathbb{Q}$-Untervektorraum

$$V := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}.$$

Da die Zahl α irrational ist, ist die Familie $(1, \alpha)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear unabhängig (Übungsaufgabe). Daher gibt es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit

$$f(1) = 1 \quad \text{und} \quad f(\alpha) = -1$$

(man ergänzt $(1, \alpha)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}$ und gibt dann f auf den Basisvektoren geeignet vor).

Andererseits folgt aus der Tatsache, dass die Quadrate $Q_1, \ldots, Q_N$ das Rechteck R pflastern, die Gleichung

$$1 \otimes \alpha = \sum_{j=1}^{N} a_j \otimes a_j$$

in $V \otimes_{\mathbb{Q}} V$ (nachrechnen; man kann dies zum Beispiel induktiv für Pflasterungen von Rechtecken durch Rechtecke durch geeignete weitere Zerlegungen zeigen; geometrisch ist dies eine Verfeinerung der Flächeninhaltsgleichung, die man aus der Pflasterung erhält). Durch Anwendung der (wohldefinierten!) $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon V \otimes_{\mathbb{Q}} V &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ v \otimes w &\longmapsto f(v) \cdot f(w) \end{aligned}$$

erhalten wir daher

$$\begin{aligned} -1 = 1 \cdot (-1) = f(1) \cdot f(\alpha) &= F(1 \otimes \alpha) \\ &= F\left(\sum_{j=1}^{N} a_j \otimes a_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} F(a_j \otimes a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} f(a_j) \cdot f(a_j) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

was nicht sein kann.

4.1.4 Konstruktion des Tensorprodukts

Man beachte, dass wir für alle bisherigen Anwendungen des Tensorprodukts nur die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts verwendet haben, nicht aber *wie* man das Tensorprodukt konstruieren kann. Um aber überhaupt über das Tensorprodukt sprechen zu können, müssen wir natürlich wissen, *dass* es existiert. Dies zeigen wir nun: Die Idee ist es, zunächst den im allgemeinen irrsinnig großen Vektorraum $\bigoplus_{V \times W} K$ zu betrachten (in dem sehr viel Platz für V und W ist) und dann durch Ausdividieren eines geeigneten Untervektorraums die gewünschte bilineare Interaktion von Elementen aus V bzw. W zu erzwingen.

Beweis der Existenzaussage von Satz 4.1.5. Wir betrachten den Vektorraum

$$V \otimes_K W := \left(\bigoplus_{V \times W} K\right) / N,$$

wobei (zur Erzwingung der bilinearen Interaktion!)

$$\begin{aligned} N := \mathrm{Span}_K\Big(& \big\{ e_{(v+v',w)} - e_{v,w} - e_{v',w} \;\big|\; v, v' \in V,\ w \in W \big\} \\ & \big\{ e_{(\lambda\cdot v,w)} - \lambda \cdot e_{(v,w)} \;\big|\; v \in V,\ w \in W, \lambda \in K \big\} \\ & \big\{ e_{(v,w+w')} - e_{(v,w)} - e_{(v,w')} \;\big|\; v \in V,\ w, w' \in W \big\} \\ & \big\{ e_{(v,\lambda\cdot w)} - \lambda \cdot e_{(v,w)} \;\big|\; v \in V,\ w \in W, \lambda \in K \big\} \Big). \end{aligned}$$

Zusätzlich definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes \colon V \times W &\longrightarrow V \otimes_K W \\ (v, w) &\longmapsto [e_{(v,w)}]. \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass diese Abbildung $\otimes$ bilinear ist und dass $V \otimes_K W$ zusammen mit $\otimes$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts erfüllt:

- Die Abbildung $\otimes \colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ ist bilinear, denn: Seien $v \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in K$. Dann gilt (nach Konstruktion von N)

$$\begin{aligned} \otimes(\lambda \cdot v, w) &= [e_{(\lambda\cdot v,w)}] && \text{(Definition von } \otimes) \\ &= \big[e_{(\lambda\cdot v,w)} - (e_{(\lambda\cdot v,w)} - \lambda \cdot e_{(v,w)})\big] && \text{(Definition von } N) \\ &= [\lambda \cdot e_{(v,w)}] \\ &= \lambda \cdot [e_{(v,w)}] \\ &= \lambda \cdot \otimes(v, w) && \text{(Definition von } \otimes). \end{aligned}$$

  Analog zeigt man, dass $\otimes$ im ersten Argument additiv und auch im zweiten Argument linear ist. Also ist $\otimes$ bilinear.

- Sei $f \colon V \times W \longrightarrow Z$ eine lineare Abbildung in einen K-Vektorraum Z.

  Existenz von $f_\otimes$. Die durch

$$\begin{aligned} F \colon \bigoplus_{V\times W} K &\longrightarrow U \\ e_{(v,w)} &\longmapsto f(v, w) \end{aligned}$$

  definierte lineare Abbildung erfüllt $N \subset \ker F$, da f bilinear ist (nachrechnen). Daher induziert F eine wohldefinerte lineare(!) Abbildung

$$f_\otimes \colon V \otimes_K W = \bigoplus_{V\times W} K/N \longrightarrow Z.$$

  Nach Konstruktion gilt dabei für alle $(v, w) \in V \times W$, dass

$$f_\otimes \circ \otimes(v, w) = F(e_{(v,w)}) = f(v, w).$$

- *Eindeutigkeit von $f_\otimes$.* Sei $g\colon V \otimes_K W \longrightarrow Z$ eine lineare Abbildung mit $g \circ \otimes = f$. Dann gilt $g = f_\otimes$, denn: Wegen $g \circ \otimes = f = f_\otimes \circ \otimes$ stimmen g und $f_\otimes$ auf der Bildmenge von $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ überein. Diese Bildmenge ist nach Konstruktion ein Erzeugendensystem des K-Vektorraums $V \otimes_K W$. Da g und $f_\otimes$ linear sind, folgt $g = f_\otimes$.

Damit ist die Existenz des Tensorprodukts gezeigt. □

4.2 Das äußere Produkt

Analog zum Tensorprodukt ist das äußere Produkt eine Maschine, die multilineare alternierende Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt. Auch in diesem Fall ist es wichtiger zu wissen, *welche Funktionalität* diese Maschine bereitstellt als zu wissen *wie* sie von innen aussieht. Diese Funktionalität werden wir durch eine universelle Eigenschaft beschreiben.

4.2.1 Wozu das äußere Produkt?

Als erstes führen wir den Begriff der alternierenden Abbildung allgemein ein.

Definition 4.2.1 (alternierende Abbildung)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien V und W Vektorräume über K.

- Eine Abbildung $f\colon V^n \longrightarrow W$ ist *alternierend*, wenn folgendes gilt: Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $|\{v_1, \ldots, v_n\}| < n$ gilt

  $$f(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

  In anderen Worten: Stimmen mindestens zwei der Argumente überein, so ist das Ergebnis 0.

- Eine Abbildung $f\colon V^n \longrightarrow W$ ist *antisymmetrisch*, wenn folgendes gilt: Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ und alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j < k$ ist

  $$f(v_1, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_k, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_j, v_{k+1}, \ldots, v_n).$$

  In anderen Worten: Vertauscht man zwei Argumente, so ändert sich das Vorzeichen.

Beispiel 4.2.2. Wir kennen bereits wichtige Beispiele für multilineare Abbildungen: Sei K ein Körper.

- Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist die Determinante $\det\colon M_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ eine n-lineare alternierende Abbildugn $K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ (eine sogenannte *alternierende n-Form auf K^n*), wobei die Argumente jeweils den Zeilen der Matrizen entsprechen.

- Das *Kreuzprodukt*

$$\begin{aligned} \times\colon K^3 \times K^3 &\longrightarrow K^3 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  ist bilinear und alternierend. Auf die geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts werden wir in Beispiel 4.2.12 genauer eingehen.

- Die Abbildung $+\colon K \times K \longrightarrow K$ ist im allgemeinen *nicht* alternierend. Aber zum Beispiel ist $+\colon \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ alternierend.

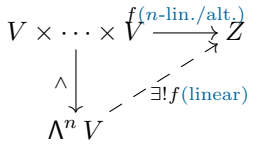
- Das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bilinear, aber *nicht* alternierend.

Bemerkung 4.2.3 (alternierend vs. antisymmetrisch)**.** Wie in Bemerkung I.5.3.2 gilt allgemein: Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien V und W Vektorräume über K und sei $f\colon V^n \longrightarrow W$ eine n-lineare Abbildung. Ist f alternierend, so ist f auch antisymmetrisch. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nur, wenn die Charakteristik von K *nicht* 2 ist.

Satz 4.2.4 (äußeres Produkt)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gibt es einen K-Vektorraum $\bigwedge^n V$ und eine n-lineare und alternierende Abbildung $\wedge\colon V^n \longrightarrow \bigwedge^n V$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum Z und jede n-lineare und alternierende Abbildung $f\colon V^n \longrightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\wedge\colon \bigwedge^n V \longrightarrow Z$ mit

$$f_\wedge \circ \wedge = f.$$



Der K-Vektorraum $\bigwedge^n V$ und die Abbildung $\wedge\colon V^n \longrightarrow \bigwedge^n V$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet $\bigwedge^n V$ als n-faches äußeres Produkt von V über K. *Außerdem verwendet man die Konvention $\bigwedge^0 V := K$.*

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt mit dem Standardargument für universelle Eigenschaften (Beweis von Satz 2.3.24).

Die *Existenz* reichen wir in Kapitel 4.2.4 durch eine konkrete (aber recht unförmige, analog zum Tensorprodukt) Konstruktion nach. □

In der Notation des äußeren Produkt verzichtet man auf die Angabe des Grundkörpers, da bei der Verwendung des äußeren Produkts (im Gegensatz

zum Tensorprodukt) im Normalfall keine Änderung der Skalare vorgenommen wird.

Caveat 4.2.5. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei V ein K-Vektorraum. Ist $\wedge\colon V^n \longrightarrow \bigwedge^n V$ die Strukturabbildung in das n-fache äußere Produkt von V und sind $v_1, \ldots, v_n \in V$, so schreiben wir

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := \wedge(v_1, \ldots, v_n) \in \bigwedge^n V.$$

Im allgemeinen ist *nicht* jedes Element von $\bigwedge^n V$ von dieser Form (im allgemeinen benötigt man Linearkombinationen solcher elementaren Produkte). Ist $f\colon V^n \longrightarrow Z$ eine n-lineare und alternierende Abbildung von K-Vektorräumen, so schreibt man normalerweise

$$\begin{aligned} \bigwedge^n V &\longrightarrow Z \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &\longmapsto f(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

für die induzierte lineare Abbildung $f_\wedge$ (obwohl ja nicht alle Elemente auf der linken Seite elementare Produkte sind ... aber wegen der Eindeutigkeit von $f_\wedge$ ist $f_\wedge$ durch diese Beschreibung bereits eindeutig bestimmt).

Beispiel 4.2.6 (Rechnen mit äußeren Produkten)**.**

- Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Determinante $\det\colon M_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ induziert eine K-lineare Abbildung $\bigwedge^n(K^n) \longrightarrow K$.
- Das Kreuzprodukt $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ induziert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
- Zum Beispiel gilt in $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  (da die Abbildung $\wedge\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ bilinear und alternierend ist).

4.2.2 Rechnen mit äußeren Produkten

Aus der universellen Eigenschaft des äußeren Produkts lassen sich die folgenden Eigenschaften und Konstruktionsprinzipien ableiten. Diese sind für die meisten Anwendungen völlig ausreichend.

Satz 4.2.7 (der Äußere-Produkt-Baukasten)**.** *Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K.*

1. Funktorialität. *Ist $f\colon V \longrightarrow W$ linear und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist*

$$\begin{aligned} \Lambda^n f\colon \Lambda^n V &\longrightarrow \Lambda^n W \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &\longmapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_n) \end{aligned}$$

   eine wohldefinierte K-lineare Abbildung. Dabei gilt $\Lambda^n \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\Lambda^n V}$ und diese Konstruktion ist mit Abbildungskomposition verträglich.

2. Niedrige äußere Produkte. *Der K-Vektorraum V erfüllt zusammen mit $\mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ die universelle Eigenschaft des einfachen äußeren Produkts $\Lambda^1 V$. Insbesondere ist $\Lambda^1 V \cong_K V$.*

3. Determinante und äußere Produkte. *Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so erfüllt K zusammen mit der Abbildung $\det\colon (K^n)^n \longrightarrow K$ die universelle Eigenschaft des n-fachen äußeren Produkts von K^n über K. Insbesondere ist*

$$\begin{aligned} \Lambda^n K^n &\longrightarrow K \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &\longmapsto \det \begin{pmatrix} v_1^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ v_d^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

4. Das äußere Produkt zur Dimension. *Ist $n := \dim_K V \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\Lambda^n V \cong_K K$.*

5. Hohe äußere Produkte. *Ist $\dim_K V < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \dim_K V$, so folgt*

$$\Lambda^n V \cong_K \{0\}.$$

6. Äußere Produkte des Grundkörpers. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\Lambda^n K \cong_K \begin{cases} K & \text{falls } n \in \{0,1\} \\ \{0\} & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

7. Verträglichkeit mit direkten Summen. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\begin{aligned} \Lambda^n V \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} \left(\Lambda^k V \otimes_K \Lambda^{n-k} W\right) \oplus \Lambda^n W &\longrightarrow \Lambda^n(V \oplus W) \\ (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \otimes (w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n) &\longmapsto (v_1, 0) \wedge \cdots \wedge (v_k, 0) \\ &\qquad \wedge (0, w_{k+1}) \wedge \cdots \wedge (0, w_n) \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Zu 1. Diese Aussagen erhält man durch direktes Nachrechnen.

Zu 2. Da 1-lineare Abbildungen dasselbe sind wie lineare Abbildungen, lässt sich leicht überprüfen, dass V zusammen mit id_V die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^1 V$ besitzt.

Zu 3. Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass der Zielraum der Grundkörper K ist: Sei $f\colon (K^n)^n \longrightarrow K$ eine n-lineare und alternierende Abbildung. Dann ist (Satz I.5.3.3)

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det\colon (K^n)^n \longrightarrow K.$$

Also gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon K \longrightarrow K$ mit $\overline{f} \circ \det = f$, nämlich $\overline{f} = f(e_1, \dots, e_n) \cdot \mathrm{id}_K$.

Für allgemeine Zielräume kann man entweder den Beweis von Satz I.5.3.3 entsprechend anpassen oder wie folgt vorgehen: Sei Z ein K-Vektorraum und sei $f\colon (K^n)^n \longrightarrow Z$ eine n-lineare und alternierende Abbildung. Durch Wahl einer Basis von Z erhalten wir einen Isomorphismus $Z \cong_K \bigoplus_I K$. Für jedes $i \in I$ wenden wir den Spezialfall, dass der Zielraum K ist, auf die Komposition $\pi_i \circ f$ an, wobei $\pi_i\colon Z \longrightarrow K$ die Projektion auf den i-ten Summanden bezeichnet. Also ist

$$\pi_i \circ f = \big(\pi_i \circ f(e_1, \dots, e_n)\big) \cdot \det.$$

Setzen wir dies nun zusammen, so erhalten wir für alle $(v_1, \dots, v_n) \in (K^n)^n$, dass

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \\ &= \big(\lambda \mapsto \lambda \cdot f(e_1, \dots, e_n)\big) \circ \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \end{aligned}$$

(und offenbar gibt es keine weitere lineare Abbildung $K \longrightarrow Z$ mit dieser Eigenschaft).

Daher erfüllt K zusammen mit der n-linearen und alternierenden Abbildung $\det\colon (K^n)^n \longrightarrow K$ die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^n(K^n)$.

Zu 4. Wegen $V \cong_K K^n$ folgt dies aus dem ersten und dem dritten Teil.

Zu 5. Es genügt zu zeigen, dass $\{0\}$ (zusammen mit der Nullabbildung $V^n \longrightarrow \{0\}$) die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^n V$ erfüllt. Dafür brauchen wir nur nachzuweisen, dass es aus V^n als einzige n-lineare und alternierende Abbildung nur die Nullabbildung gibt.

Sei also Z ein K-Vektorraum und sei $f\colon V^n \longrightarrow Z$ eine n-lineare und alternierende Abbildung. Seien nun $v_1, \dots, v_n \in V$. Wegen $n > \dim_K V$ ist die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ in V linear abhängig. Daher kann einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen dargestellt werden; ohne Einschränkung sei dies v_1. Es gibt somit $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \cdot v_j.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} f(v_1,\dots,v_n) &= f\Big(\sum_{j=2}^{n}\lambda_j\cdot v_j, v_2,\dots,v_n\Big) \\ &= \sum_{j=2}^{n}\lambda_j\cdot f(v_j,v_2,\dots,v_n) && (f \text{ ist } n\text{-linear}) \\ &= \sum_{j=2}^{n}\lambda_j\cdot 0 && (f \text{ ist alternierend}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $f = 0$, wie behauptet.

Zu 6. Dies ist eine Zusammenfassung der vorigen Teile im Spezialfall, dass der betrachtete Vektorraum der Grundkörper K ist.

Zu 7. Dass die angegebene Abbildung wohldefiniert und linear ist, kann man leicht ablesen (nachrechnen). Um zu zeigen, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt, geben wir das Inverse explizit an:

$$\begin{aligned} \Lambda^n(V\oplus W) &\longrightarrow \Lambda^n V \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1}(\Lambda^k V\otimes_K \Lambda^{n-k}V)\oplus \Lambda^n W \\ (v_1,w_1)\wedge\cdots\wedge(v_n,w_n) &\longmapsto \sum_{S\in P(\{1,\dots,n\})} \operatorname{sgn}(\pi_S)\cdot(v_{j_{S,1}}\wedge\cdots\wedge v_{j_{S,|S|}}) \\ &\qquad\qquad \otimes(w_{j_{S,|S|+1}}\wedge\cdots\wedge w_{j_{S,n}}); \end{aligned}$$

dabei haben wir die folgende Notation verwendet: Ist $S\in P(\{1,\dots,n\})$, so schreiben wir

$$S=\{j_{S,1},\dots,j_{S,|S|}\} \quad\text{und}\quad \{1,\dots,n\}\setminus S=\{j_{S,|S|+1},\dots,j_{S,n}\}$$

mit $j_{S,1}<\cdots<j_{S,|S|}$ und $j_{S,|S|+1}<\cdots<j_{S,n}$. Außerdem sei π_S die durch $k\mapsto j_{S,k}$ gegebene Permutation von $\{1,\dots,n\}$. Der obige Kandidat für das Inverse liefert dann eine wohldefinierte lineare Abbildung (nachrechnen).

Nach Konstruktion ist diese Abbildung offensichtlich ein einseitiges Inverses der in der Behauptung des siebten Teils angegebenen Abbildung. Für die umgekehrte Komposition ist eine mühsame Induktion notwendig (dies wollen wir hier aber nicht im Detail ausführen). □

Korollar 4.2.8 (Dimension äußerer Produkte)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $d := \dim_K V > 0$ und sei $n\in\{1,\dots,d\}$. Dann gilt: Ist $(v_1,\dots,v_d)$ eine Basis von V, so ist die Familie*

$$(v_{j_1}\wedge\cdots\wedge v_{j_n})_{j_1<\cdots<j_n\in\{1,\dots,d\}}$$

eine Basis von $\bigwedge^n V$. Insbesondere folgt

$$\dim_K \bigwedge^n V = \binom{d}{n}.$$

Beweis. Wegen der Funktorialität der äußeren Produkte genügt es, diese Aussage für den K-Vektorraum K^d zu beweisen. In diesem Fall kann man zum Beispiel induktiv (über d) mithilfe der Verträglichkeit mit direkten Summen (Satz 4.2.7, angewendet auf $\bigwedge^n(K^{d-1} \oplus K)$) argumentieren. Alternativ kann man auch von Hand über die universelle Eigenschaft nachrechnen, dass die gegebene Familie eine Basis von $\bigwedge^n V$ ist.

Die Behauptung über die Dimension folgt aus der Behauptung über die Basen, da es genau $\binom{d}{n}$ verschiedene streng monoton wachsende Folgen der Länge n in $\{1, \dots, d\}$ gibt. □

In der Differentialgeometrie (Beispiel 4.2.14) treten Dualräume $(\bigwedge^n V)^*$ von äußeren Produkten in natürlicher Weise auf. In diesem Kontext ist es nützlich zu wissen, dass man solche Dualräume alternativ auch als äußeres Produkt der Dualräume auffassen kann:

Korollar 4.2.9 (äußere Produkte und Dualräume)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $n \in \{0, \dots, \dim_K V\}$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \bigwedge^n(V^*) &\longrightarrow \left(\bigwedge^n V\right)^* \\ f_1 \wedge \dots \wedge f_n &\longmapsto \left(v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} f_j(v_{\sigma(j)})}_{=\det\left(f_j(v_k)\right)_{j,k \in \{1,\dots,n\}}}\right) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Dass die angegebene Abbildung wohldefiniert und linear ist, kann man wieder leicht ablesen (nachrechnen).

Warum handelt es sich dabei um einen Isomorphismus? Wir bezeichnen die angegebene Abbildung mit φ. Sei $d := \dim_K V$, sei $(v_1, \dots, v_d)$ eine Basis von V und sei $(v_1^*, \dots, v_d^*)$ die zugehörige duale Basis von V. Aus dem vorigen Korollar 4.2.8 erhalten wir daraus durch geeignete äußere Produkte bzw. Dualisieren Basen von $\bigwedge^n(V^*)$ bzw. $(\bigwedge^n V)^*$. Für alle $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, d\}$ und alle $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, d\}$ mit $j_1 < \dots < j_n$ und $k_1 < \dots < k_n$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\varphi(v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_n}^*)\right)(v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{r=1}^{n} v_{j_r}^*(v_{k_{\sigma(r)}}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } (j_1, \dots, j_n) \neq (k_1, \dots, k_n) \\ 1 & \text{falls } (j_1, \dots, j_n) = (k_1, \dots, k_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt, dass $\varphi(v_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{j_n}^*)$ das duale Basiselement zu $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_n}$ ist. Also bildet φ eine Basis von $\Lambda^n(V^*)$ auf eine Basis von $(\Lambda^n V)^*$ ab und ist somit insbesondere ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. □

4.2.3 Anwendungen des äußeren Produkts

Nach Definition verwandeln äußere Produkte multilineare alternierende Abbildungen in lineare Abbildungen, was in vielen Situationen nützlich ist. Darüberhinaus gibt es noch viele spezifischere Anwendungen der äußeren Produkte in der Mathematik:

Beispiel 4.2.10 (koordinatenfreie Beschreibung der Determinante)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist $\Lambda^n V \cong_K K$ und daher gibt es genau ein $\Delta(f) \in K$ mit

$$\Lambda^n f = \Delta(f) \cdot \mathrm{id}_{\Lambda^n V}\colon\ \Lambda^n V \longrightarrow \Lambda^n V.$$

Dabei ist $\Delta(f) = \det f$, denn: Sei B eine Basis von V und sei $A := M_{B,B}(f) \in M_{n\times n}(K)$ die zugehörige darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B. Aufgrund der Funktorialität von Λ^n gilt

$$\Lambda^n(T_{B,E_n}) \circ \Lambda^n f = \Lambda^n(L(A)) \circ \Lambda^n(T_{B,E_n}),$$

und damit (nachrechnen; die Abbildung T_{B,E_n} ist ein Isomorphismus!)

$$\Delta(f) = \Delta\big(L(A)\big).$$

Nach Definition der Determinante von Endomorphismen gilt $\det f = \det A$; es genügt daher $\Delta(L(A)) = \det A$ zu zeigen: Da die Abbildung

$$\begin{aligned}\Delta'\colon (K^n)^n &\longrightarrow K\\ (v_1,\ldots,v_n) &\longmapsto \Delta\big(L(v_1 \mid \cdots \mid v_n)\big)\end{aligned}$$

n-linear und alterierend ist und $\Delta'(e_1,\ldots,e_n) = 1$ erfüllt (nachrechnen), folgt aus der Eindeutigkeit der Determinantenfunktion, dass

$$\forall_{v_1,\ldots,v_n\in K^n}\quad \Delta'(v_1,\ldots,v_n) = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n)^{\mathsf{T}} = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n)$$

gilt. Insbesondere ist $\Delta\big(L(A)\big) = \Delta'(A_{*,1},\ldots,A_{*,n}) = \det A$, wie gewünscht.

Beispiel 4.2.11 (Orientierungen)**.** Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $n := \dim_{\mathbb{R}} V \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir definieren wie folgt eine Relation „$\sim$“ auf der Menge der Basen von V: Sind B und C Basen von V, so gelte genau dann $B \sim C$, wenn $\det T_{B,C} > 0$ ist.

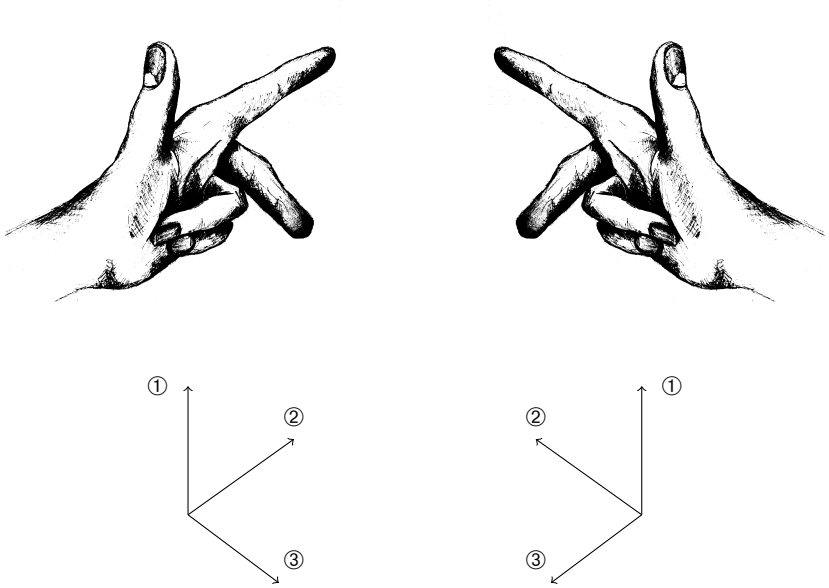


Abbildung 4.4.: Orientierungen und Hände

Dann ist „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V (Übungsaufgabe). Die Äquivalenzklassen von Basen von V bezüglich „$\sim$“ bezeichnet man als *Orientierungen von V*. Man kann zeigen, dass V genau zwei Orientierungen besitzt (Übungsaufgabe).

Zum Beispiel liefern die Basen (e_1, e_2, e_3) und (e_2, e_1, e_3) verschiedene Orientierungen von $\mathbb{R}^3$; identifiziert man den Daumen mit e_1, den Zeigefinger mit e_2 und den Mittelfinger mit e_3, so entspricht der Orientierungsunterschied zwischen den zugehörigen Orientierungen dieser Basen dem Orientierungsunterschied zwischen der linken und der rechten Hand (Abbildung 4.4).

Wir gehen nun auf den Zusammenhang zu äußeren Produkten ein: Da $\mathbb{R}$ zusammen mit $\det\colon V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^n V$ erfüllt (Satz 4.2.7; alternativ kann man auch die koordinatenfreie Beschreibung der Determinanten aus Beispiel 4.2.10 nutzen), kann man dies auch wie folgt umformulieren: Sind $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $C = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V, so liefern B und C genau dann dieselbe Orientierung von V, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \lambda \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$$

(in $\bigwedge^n V \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$) gibt. Die Wahl einer Orientierung von V entspricht also gerade der Wahl eines Isomorphismus $\bigwedge^n V \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. eines nicht-trivialen Elements von $(\bigwedge^n V)^*$.

Beispiel 4.2.12 (Kreuzprodukt)**.** Das *Kreuzprodukt*

$$\begin{aligned} \times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist bilinear und alternierend und induziert somit die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \times_\wedge\colon \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \wedge y &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) = \binom{3}{2} = 3$ und

$$e_1 \times_\wedge e_2 = e_3, \quad e_1 \times_\wedge e_3 = -e_2, \quad e_2 \times_\wedge e_3 = e_1$$

ist $\times_\wedge\colon \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sogar ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Wir gehen nun kurz auf geometrische Aspekte des Kreuzprodukts ein: Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann zeigt eine Rechnung, dass der Vektor $x \times y \in \mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ orthogonal zu x und y ist. Ist (x, y) eine linear unabhängige Familie in $\mathbb{R}^3$, so ist $(x, y, x \times y)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und diese Basis liefert dieselbe Orientierung wie (e_1, e_2, e_3). Die euklidische Länge des Vektors $x \times y$ entspricht dabei dem Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms (Übungsaufgabe).

Beispiel 4.2.13 (die Volumenform)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und es sei eine Orientierung auf V gegeben. Dann gibt es genau ein $\omega \in (\bigwedge^n V)^*$ mit folgender Eigenschaft: Für jede positiv orientierte Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gilt

$$\omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sqrt{\det\big((\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k \in \{1,\ldots,n\}}\big)}.$$

Dabei bedeutet „postiv orientiert“, dass die von der entsprechenden Basis induzierte Orientierung mit der gegebenen Orientierung von V übereinstimmt. Diese Form ω bezeichnet man als *Volumenform von* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Der Name kommt daher, dass der Wurzelausdruck auf der rechten Seite das euklidische Volumen des von $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Parallelogramms/-epipeds/-otops ist.

Eindeutigkeit von ω. Der euklidische Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis (Korollar 1.2.10). Durch Vorzeichenänderung oder Änderung der Reihenfolge der Basisvektoren erhält man so auch eine positiv orientierte Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Dann ist die einelementige Familie $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ eine Basis von $\bigwedge^n V$ (Korollar 4.2.8). Also kann es höchstens eine solche Form ω geben.

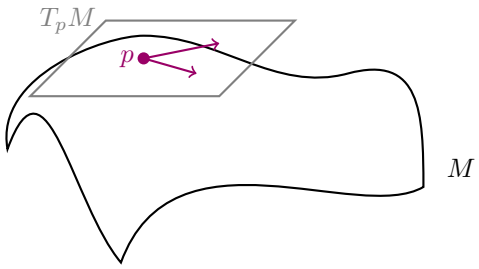


Abbildung 4.5.: Tangentialräume, schematisch

Existenz von ω. Sei wieder $B := (v_1, \dots, v_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Wir definieren dann $\omega\colon \Lambda^n V \longrightarrow \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$\omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) := 1.$$

Ist $C := (w_1, \dots, w_n)$ eine positiv orientierte Basis von V, so gilt wegen der koordinatenfreien Beschreibung der Determinante, dass

$$\begin{aligned}\omega(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) &= \omega \circ \Lambda^n(T_{B,C})(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)\\ &= \det(T_{B,C}) \cdot \omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)\\ &= \det T_{B,C}.\end{aligned}$$

Indem man zunächst den Spezialfall $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ betrachtet (und sich dann mit Korollar 1.2.11 wieder in den allgemeinen Fall begibt), sieht man, dass

$$\det T_{B,C}^2 = \det\big((\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k \in \{1,\dots,n\}}\big)$$

gilt (Übungsaufgabe). Dies zeigt die Existenz von ω.

Beispiel 4.2.14 (Differentialformen)**.** In der Differentialgeometrie untersucht man die geometrischen und analytischen Eigenschaften „gekrümmter Räume“, sogenannter (glatter) Mannigfaltigkeiten. Grob gesagt ist eine *glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit* ein gutartiger topologischer Raum, der lokal (glatt) wie $\mathbb{R}^n$ aussieht.

Den Grundgedanken der linearen Approximation kann man auch auf diese Situation erweitern: Zu jedem Punkt p in einer solchen Mannigfaltigkeit M gibt es eine „beste lineare Approximation“ an die Mannigfaltigkeit M, den *Tangentialraum* T_pM (Abbildung 4.5). Dabei handelt es sich um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} T_pM = n$. Die Familie $(T_pM)_{p \in M}$ der Tangentialräume kann wieder zu einem mathematischen Objekt zusammengefasst werden, zum sogenannten *Tangentialbündel TM von M*.

Um zum Beispiel das Volumen von Mannigfaltigkeiten zu definieren/berechnen oder Flüsse etc. auf Mannigfaltigkeiten zu beschreiben, ist es nötig, die reelle Analysis von Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen.

Dabei stellt es sich heraus, dass äußere Produkte von Tangentialräumen (genauer gesagt die Vektorraumbündel $(\Lambda^k TM)^*$ über M und ihre Schnitte) genau das richtige Orientierungs- und Transformationsverhalten liefern, das man von der entsprechenden Differentiations- und Integrationstheorie geometrisch erwarten würde. Dies führt zu den sogenannten *Differentialformen* auf Mannigfaltigkeiten (Anhang A.5).

Literaturaufgabe (Vorbereitung auf die Analysis auf Mannigfaltigkeiten)**.** Überfliegen Sie die linear-algebraischen Abschnitte des Buchs *Vektoranalysis* von K. Jänich [6].

Anmerkung für Lehramtsstudenten. Die Berechnung von Oberflächen, Volumina etc. und das Untersuchen von Krümmungseigenschaften (warum gibt es keine „vernünftigen“ ebenen Landkarten?!) gehören zu den klassischen Fragestellungen der Geometrie und sind somit ein Teil der mathematischen Allgemeinbildung. Auch wenn nicht zu erwarten ist, dass der Lehrplan an Gymnasien plötzlich die Behandlung von Differentialformen vorsehen wird, ist es doch ausgesprochen nützlich zu wissen, wie man geometrische Kenndaten von komplizierteren geometrischen Objekten präzise definieren und ausrechnen kann.

Beispiel 4.2.15 (die äußere Algebra)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Dann bildet der K-Vektorraum

$$\Lambda V := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n V$$

zusammen mit der (bilinearen) Fortsetzung des kovarianten Dachprodukts (das auch mit dem Symbol $\wedge$ bezeichnet wird ...)

$$\begin{aligned}
\Lambda^0 V \times \Lambda^n V &\longrightarrow \Lambda^n V \\
(\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v, \\
\Lambda^n V \times \Lambda^0 V &\longrightarrow \Lambda^n V \\
(v, \lambda) &\longmapsto \lambda \cdot v, \\
\Lambda^n V \times \Lambda^m V &\longrightarrow \Lambda^{n+m} V \\
(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, w_1 \wedge \cdots \wedge w_m) &\longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_m
\end{aligned}$$

eine K-Algebra. Man beachte jedoch, dass die K-Algebra Λ^V im allgemeinen *nicht* kommutativ ist. Sie ist jedoch im folgenden Sinne graduiert kommutativ: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und alle $v \in \Lambda^n V$, $w \in \Lambda^m V$ gilt

$$v \wedge w = (-1)^{n\cdot m} \cdot v \wedge w.$$

Zum Beispiel ist für $V = K$ die äußere Algebra $\bigwedge V = \bigwedge K$ isomorph zu $K[T]/(T^2)$ (mit repräsentantenweiser Multiplikation).

4.2.4 Konstruktion des äußeren Produkts

Zum Abschluss müssen wir noch nachweisen, dass die äußeren Produkte tatsächlich existieren. Wir gehen dabei wie bei der Konstruktion des Tensorprodukts vor: Wir konstruieren einen viel zu großen Vektorraum und erzwingen dann durch eine geeignete Quotientenbildung die gewünschten Multilinearitäts- und Alternierungseigenschaften.

Beweis der Existenzaussage aus Satz 4.2.4. Wir betrachten den Vektorraum

$$\bigwedge^n V := \left(\bigoplus_{V^n} K\right) \Big/ N,$$

wobei (zur Erzwingung der n-linearen und alternierenden Interaktion)

$$\begin{aligned} N := \operatorname{Span}_K\Big(& \big\{ e_{(v_1,\dots,v_j+v'_j,\dots,v_n)} - e_{(v_1,\dots,v_j,\dots,v_n)} - e_{(v_1,\dots,v'_j,\dots,v_n)} \\ & \quad \big| \; j \in \{1,\dots,n\}, v_1,\dots,v_n \in V, v'_j \in V \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(v_1,\dots,\lambda\cdot v_j,\dots,v_n)} - \lambda \cdot e_{(v_1,\dots,v_n)} \\ & \quad \big| \; j \in \{1,\dots,n\}, v_1,\dots,v_n \in V, \lambda \in K \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(v_1,\dots,v_n)} \;\big|\; v_1,\dots,v_n \in V, |\{v_1,\dots,v_n\}| < n \big\}\Big). \end{aligned}$$

Zusätzlich definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge\colon V^n &\longrightarrow \bigwedge^n V \\ (v_1,\dots,v_n) &\longmapsto [e_{(v_1,\dots,v_n)}]. \end{aligned}$$

Wie im Fall der Konstruktion des Tensorprodukts rechnet man nun nach, dass $\bigwedge^n V$ zusammen mit dieser Abbildung $\wedge$ die universelle Eigenschaft des n-fachen äußeren Produkts von V erfüllt. Damit ist die Existenz des n-fachen äußeren Produkts gezeigt. □

Hat man die Theorie der Algebren in einem größeren Umfang zur Verfügung als wir sie bisher entwickelt haben, so kann man die äußere Algebra auch kurz und bündig als Quotientenalgebra der Tensoralgebra konstruieren und daraus dann die einzelnen äußeren Produkte extrahieren.

A
Anhang

Überblick über dieses Kapitel.

A.1	Elementare Analysis von Sinus und Kosinus	A 3
A.2	Kategorien	A 5
A.3	(Ko)Produkte	A 9
A.4	Funktoren	A 11
A.5	Differentialformen	A 15
A.6	Die LA-Matrix	A 19

A.1 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus

Im folgenden ist der analytische Zugang zu Sinus, Kosinus und π kurz zusammengefasst. Der Zusammenhang mit der Anschauung zu Winkeln am Kreisbogen ergibt sich daraus erst durch Berechnung der Länge geeigneter Kreisbögen (s. Analysis I/II).

Definition A.1.1 (Sinus, Kosinus)**.** Die Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind durch die folgenden (überall absolut konvergenten!) Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Graphische Darstellung. Auswertung der obigen Ausdrücke an vielen Punkten ergibt die graphische Darstellung von cos bzw. sin in Abbildung A.1.

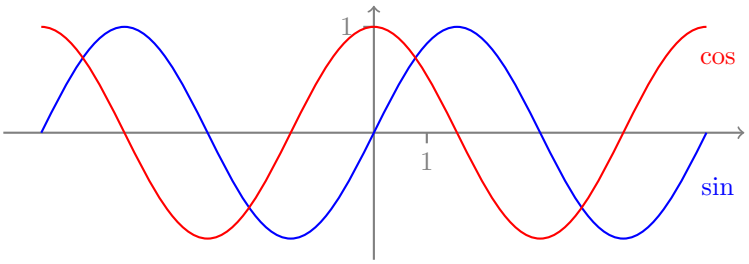


Abbildung A.1.: Graphische Darstellung von cos und sin

Symmetrie. Nach Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Differenzierbarkeit/Ableitungen. Aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen erhalten wir: Die Funktionen cos und sin sind glatt und für die Ableitungen gilt (gliedweises Differenzieren!)

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Quadratsumme. Es gilt

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

denn $(\cos^2 + \sin^2)' = 0$ und $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$.

Die Zahl π und ihre Hälfte. Eine sorgfältige Abschätzung von Hand der Potenzreihe zeigt, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ gilt; also ist cos wegen $\cos' = -\sin$ auf $[0, 2]$ streng monoton fallend. Außerdem zeigt eine Abschätzung von Hand, dass $\cos(2) < 0$ ist. Also hat cos in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0. Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Nach Definition ist $\cos(\pi/2) = 0$. Aus der Quadratsumme und der Positivität von sin auf $[0, 2]$ folgt $\sin(\pi/2) = 1$.

Additionstheoreme. Mithilfe des Cauchyprodukts von Potenzreihen kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,\\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere erhält man daraus aus den bereits bekannten Werten, dass

$$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0, \qquad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \qquad \sin(2 \cdot \pi) = 0.$$

Periodizität. Aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten speziellen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos(x + 2 \cdot \pi) &= \cos(x)\\ \sin(x + 2 \cdot \pi) &= \sin(x)\\ \cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) &= \sin(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Invertierbarkeit. Aus den bereits gezeigten Positivitäts- und Symmetrieeigenschaften sowie den bereits berechneten Werten folgt, dass

$$\begin{aligned}\cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1]\\ \sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1]\end{aligned}$$

Homöomorphismen sind; die inversen Funktionen bezeichnet man mit arccos bzw. arcsin.

A.2 Kategorien

Mathematische Theorien bestehen aus Objekten (z.B. Gruppen, reelle Vektorräume, topologische Räume, messbare Räume, ...) und strukturerhaltenden Abbildungen (z.B. Gruppenhomomorphismen, $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, stetige Abbildungen, messbare Abbildungen, ...) dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie [9, 4]:

Definition A.2.1 (Kategorie)**.** Eine *Kategorie* C besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eine Klasse $\mathrm{Ob}(C)$; die Elemente von $\mathrm{Ob}(C)$ heißen *Objekte von* C.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Menge $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$; die Elemente von $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ heißen *Morphismen von* X *nach* Y *in* C. (Dabei wird implizit angenommen, dass die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objektpaaren disjunkt sind.)
- Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Mor}_C(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X,Z) \\ (g,f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  von Morphismen.

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für jedes Objekt X in C gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_C(X, X)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ bzw. $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

  (Dadurch ist id_X eindeutig bestimmt und heißt *Identitätsmorphismus von* X *in* C.)
- Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ: Für alle Objekte W, X, Y, Z in C und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(W, X)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}_C(Y, Z)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Caveat A.2.2. Das Konzept der Morphismen und Verknüpfungen ist nach dem Beispiel der Abbildungen zwischen Mengen und der gewöhnlichen Abbildungskomposition modelliert. Im allgemeinen muss es sich bei Morphismen

aber nicht um Abbildungen zwischen Mengen und bei der Verknüpfung nicht um Abbildungskomposition handeln!

Beispiel A.2.3 (leere Kategorie)**.** Die *leere Kategorie* ist die (eindeutig bestimmte) Kategorie, deren Objektklasse die leere Menge ist.

Beispiel A.2.4 (Gruppen als Kategorien)**.** Sei G eine Gruppe. Dann erhalten wir wie folgt eine Kategorie C_G:

- Objekte: Die Kategorie C_G besitze genau ein Objekt, etwa 0.
- Morphismen: Es sei $\mathrm{Mor}_C(0,0) := G$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(0,0) \times \mathrm{Mor}_C(0,0) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(0,0) \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Beispiel A.2.5 (Mengenlehre)**.** Die Kategorie Set der Mengen besteht aus:

- Objekte: Es sei Ob(Set) die Klasse(!) aller Mengen.
- Morphismen: Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
- Verknüpfungen: Sind X, Y und Z Mengen, so sei die Verknüpfung $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Z)$ die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Es ist klar, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Ist X eine Menge, so ist die gewöhnliche Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Identitätsmorphismus id_X von X in Set.

Beispiel A.2.6 (lineare Algebra)**.** Sei K ein Körper. Die Kategorie Vect_K der K-Vektorräume besteht aus:

- Objekte: Es sei Ob(Vect_K) die Klasse aller K-Vektorräume.
- Morphismen: Sind V und W Vektorräume über K, so sei $\mathrm{Mor}_K(V,W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen $V \longrightarrow W$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog erhält man auch die Kategorie Group der Gruppen, die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, ...

Beispiel A.2.7 (Ringtheorie)**.** Die Kategorie Ring der Ringe besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Ring})$ die Klasse aller Ringe.
- Morphismen: Sind R und S Ringe, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Ring}}(R,S)$ die Menge aller Ringhomomorphismen $R \longrightarrow S$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Beispiel A.2.8 (Algebren)**.** Sei K ein Körper. Die Kategorie Alg_K der K-Algebren besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Alg}_K)$ die Klasse aller K-Algebren.
- Morphismen: Sind A und B Algebren über K, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Alg}_K}(A,B)$ die Menge aller K-Algebrenhomomorphismen $A \longrightarrow B$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Beispiel A.2.9 (Modultheorie)**.** Sei R ein Ring. Die Kategorie Mod_R der (Links-)R-Moduln besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ die Klasse aller R-Moduln.
- Morphismen: Sind V und W Moduln über R, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(V,W)$ die Menge aller R-Modulhomomorphismen $V \longrightarrow W$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Beispiel A.2.10 (Topologie)**.** Die Kategorie Top der topologischen Räume besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top})$ die Klasse aller topologischen Räume.
- Morphismen: Sind X und Y topologische Räume, so sei

  $$\mathrm{map}(X,Y) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$$

  die Menge aller stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Alle Begriffe, die sich durch Objekte und (Komposition von) Morphismen ausdrücken lassen, lassen sich zu entsprechenden Begriffen in allgemeinen Kategorien verallgemeinern. Ein erstes Beispiel ist der Isomorphiebegriff:

Definition A.2.11 (Isomorphismus)**.** Sei C eine Kategorie. Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sind *isomorph in* C, wenn es Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. In diesem Fall sind f und g *Isomorphismen in* C und wir schreiben $X \cong_C Y$ (oder wenn die Kategorie aus dem Kontext klar ist: $X \cong Y$).

Beispiel A.2.12 (Isomorphismenbegriffe)**.**

- Objekte in Set sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.
- Sei K ein Körper und sei R ein Ring. Objekte in Group, Ab, Vect_K, Ring, Alg_K, Mod_R, ... sind genau dann im obigen Sinne isomorph, wenn sie im gewöhnlichen algebraischen Sinne isomorph sind.
- Objekte in Top sind genau dann isomorph, wenn sie homöomorph sind.

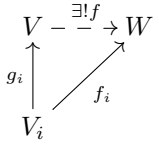
Definition A.2.13 (Automorphismengruppe)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann bildet die Menge $\mathrm{Aut}(X)$ aller Isomorphismen $X \longrightarrow X$ in C bezüglich der Komposition von Morphismen in C eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von* X *in* C.

A.3 (Ko)Produkte

Die Formulierung der universellen Eigenschaft der direkten Summe von Moduln beruht nur auf Homomorphismen und deren Verknüpfung. Diese universelle Eigenschaft kann also in jeder Kategorie formuliert werden:

Definition A.3.1 (Koprodukt)**.** Sei C eine Kategorie und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in C. Wir sagen, dass ein Objekt V in C zusammen mit Morphismen $(g_i \in \mathrm{Mor}_C(V_i, V))_{i\in I}$ die *universelle Eigenschaft des Koprodukts* $\coprod_{i\in I} V_i$ besitzt, wenn folgendens gilt: Für jedes Objekt W in C und jede Familie $(f_i \in \mathrm{Mor}_C(V_i, W))_{i\in I}$ von Morphismen in C gibt es genau einen Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_C(V, W)$ mit

$$\forall_{i\in I} \quad f \circ g_i = f_i.$$



Proposition A.3.2 (Eindeutigkeit von Koprodukten)**.** *Sei C eine Kategorie und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in C. Erfüllen V mit $(g_i \in \mathrm{Mor}_C(V_i, V))_{i\in I}$ und V' mit $(g'_i \in \mathrm{Mor}_C(V_i, V'))_{i\in I}$ die universelle Eigenschaft des Koprodukts $\coprod_{i\in I} V_i$, so gibt es genau einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Mor}_C(V, V')$ in C mit*

$$\forall_{i\in I} \quad f \circ g_i = g'_i.$$

Beweis. Einmal hin, einmal her, rundherum das ist nicht schwer ... □

Beispiel A.3.3.

- Sei R ein Ring. Das Koprodukt in der Kategorie Mod_R der R-Moduln ist die direkte Summe von R-Moduln (zusammen mit den Inklusionen der Summanden).

- Das Koprodukt in der Kategorie Set der Mengen ist durch die disjunkte Vereinigung von Mengen (zusammen mit den zugehörigen Inklusionen) gegeben.

- Das Koprodukt in der Kategorie Top der topologischen Räume ist durch die disjunkte Vereigung der unterliegenden Räume mit einer geeigneten Topologie (zusammen mit den zugehörigen Inklusionen) gegeben.

- Das Koprodukt in der Kategorie Group der Gruppen ist das sogenannte freie Produkt (zusammen mit den zugehörigen Inklusionshomomorphismen). Dieses stimmt für nicht-abelsche Gruppen *nicht* mit der Konstruktion „fast überall triviale Familien im kartesischen Produkt“ überein. Zum Beispiel ist das freie Produkt zweier endlicher Gruppen im allgemeinen *nicht* endlich.

Caveat A.3.4 (Existenz von Koprodukten)**.** Nicht in jeder Kategorie existieren alle Koprodukte! Zum Beispiel existieren in der Kategorie der endlichen Mengen (und gewöhnlichen Abbildungen) nur die Koprodukte über endliche Familien, nicht aber die Koprodukte über unendliche Familien (nicht-leerer) Mengen.

Analog kann man auch die universelle Eigenschaft des Produkts in allgemeinen Kategorien formulieren und die entsprechende Eindeutigkeitsaussage formulieren.

Anmerkung zum Lernen. Wichtig ist nur, sich zu merken, dass

- Koprodukte durch Morphismen heraus,
- Produkte durch Morphismen hinein

charakterisiert werden. Alles andere ergibt sich dann (fast) von selbst.

Auf ähnliche Weise kann man auch allgemeinere Kolimiten und Limiten einführen, wobei

- Kolimiten durch Morphismen heraus,
- Limiten durch Morphismen hinein

charakterisiert werden.

A.4 Funktoren

Die Übersetzung zwischen mathematischen Theorien (d.h. zwischen Kategorien) erfolgt durch sogenannte Funktoren. Grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“.

Definition A.4.1 (Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:

- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C\big(F(X), F(Y)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Beispiel A.4.2 (Identitätsfunktor)**.** Sei C eine Kategorie. Dann ist der *Identitätsfunktor* $\mathrm{Id}_C\colon C \longrightarrow C$ wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(C) \\ X &\longmapsto X. \end{aligned}$$
- Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ betrachten wir
$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Beispiel A.4.3 (Vergissfunktor)**.** Der Vergissfunktor $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$, die einem $\mathbb{R}$-Vektorraum die unterliegende Menge zuordnet.
- Auf Morphismen: Für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume X, Y betrachten wir
$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Analog erhält man Vergissfunktoren $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, ...

Beispiel A.4.4 (basierte Vektorräume)**.** Man kann die Mengenlehre über den folgenden Funktor $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ in die lineare Algebra übersetzen:

- Auf Objekten definieren wir

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) \\ X &\longmapsto \bigoplus_X \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  (Dabei ist $\bigoplus_X \mathbb{R}$ eine Verallgemeinerung der direkten Summe zweier Vektorräume (s. Lineare Algebra II). Wir betrachten eine Menge X in kanonischer Weise als Teilmenge, bzw. sogar Basis, von $\bigoplus_X \mathbb{R}$.)

- Auf Morphismen definieren wir F wie folgt: Sind X, Y Mengen und ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so definieren wir $F(f)\colon \bigoplus_X \mathbb{R} \longrightarrow \bigoplus_Y \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die f von der Basis X auf ganz $\bigoplus_X \mathbb{R}$ fortsetzt.

Dies liefert tatsächlich einen Funktor. Dabei gilt für alle Mengen X und alle $\mathbb{R}$-Vektorräume V, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}\big(F(X), V\big) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, V) \\ f &\longrightarrow f|_X \end{aligned}$$

eine Bijektion ist (universelle Eigenschaft von Basen).

Beispiel A.4.5 (Tensorprodukte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Dann ist $V \otimes_K \cdot : \mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}_K$ ein Funktor (Satz 4.1.8):

- Auf Objekten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_K) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_K) \\ W &\longmapsto V \otimes_K W. \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume V, W betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(W, W') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, V \otimes_K W') \\ f &\longmapsto \mathrm{id}_V \otimes_K f. \end{aligned}$$

Beispiel A.4.6 (Tensorprodukte und Basiswechsel)**.** Sei K ein Körper und sei A eine kommutative K-Algebra. Dann ist $A \otimes_K \cdot : \mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Mod}_A$ ein Funktor (Beispiel 4.1.12).

Beispiel A.4.7 (äußere Produkte)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist das n-fache äußere Produkt $\bigwedge^n\colon \mathsf{Vect}_K \longrightarrow \mathsf{Vect}_K$ ein Funktor (Satz 4.2.7):

- Auf Objekten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_K) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_K) \\ V &\longmapsto \bigwedge^n V. \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume V, W betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(V,W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K\left(\bigwedge^n V, \bigwedge^n W\right) \\ f &\longmapsto \bigwedge^n f. \end{aligned}$$

In vielen Situationen benötigt man Funktoren, die „die Richtung der Pfeile umdrehen“, also sogenannte kontravariante Funktoren:

Definition A.4.8 (kontravarianter Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:

- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C\big(F(Y), F(X)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Beispiel A.4.9 (Dualraum)**.** Man kann die Konstruktion des Dualraums als kontravarianten Funktor $\cdot^*\colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ auffassen:

- Auf Objekten verwenden wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}) \\ X &\longmapsto X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $\mathbb{R}$-Vektorräume X, Y betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(Y^*, X^*) \\ f &\longmapsto f^*. \end{aligned}$$

Allgemeiner liefern Objekte in Kategorien Funktoren, die beschreiben wie die entsprechende Kategorie aus dem Blickwinkel dieses Objekts aussieht:

Beispiel A.4.10 (darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann erhalten wir einen kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set},$$

den *von X dargestellten kontravarianten Funktor*. Dieser Funktor ist wie folgt definiert:

- Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon\ \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})\\ Y &\longmapsto \mathrm{Mor}_C(Y, X).\end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Sind $Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$, so definieren wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon\ \mathrm{Mor}_C(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}\big(\mathrm{Mor}_C(Z, X), \mathrm{Mor}_C(Y, X)\big)\\ f &\longmapsto (g \mapsto g \circ f).\end{aligned}$$

Analog erhält man einen kovarianten Funktor $\mathrm{Mor}_C(X,\,\cdot\,)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Eine wesentliche Eigenschaft von (kovarianten wie kontravarianten) Funktoren ist, dass sie – da sie mit Verknüpfungen und Identitätsmorphismen verträglich sind – Isomorphie erhalten und somit ein geeignetes Konzept für Invarianten liefern:

Proposition A.4.11 (Funktoren erhalten Isomorphie)**.** *Seien C, D Kategorien, sei $F\colon C \longrightarrow D$ ein Funktor und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$.*

1. *Ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ ein Isomorphismus in C, so ist der übersetzte Morphismus $F(f) \in \mathrm{Mor}_D(F(X), F(Y))$ ein Isomorphismus in D.*
2. *Insbesondere: Ist $X \cong_C Y$, so folgt $F(X) \cong_D F(Y)$. Bzw.: Ist $F(X) \ncong_D F(Y)$, so ist $X \ncong_C Y$.*

Beweis. Der erste Teil folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften von Funktoren. Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil. □

Geeignete Funktoren können also helfen zu zeigen, dass gewisse Objekte *nicht* isomorph sind.

Caveat A.4.12. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. Objekte, die unter einem Funktor auf isomorphe Objekte abgebildet werden, sind im allgemeinen *nicht* isomorph.

A.5 Differentialformen

In der Differentialgeometrie untersucht man die geometrischen und analytischen Eigenschaften „gekrümmter Räume“, sogenannter (glatter) Mannigfaltigkeiten. Die Differential- und Integralrechnung auf glatten Mannigfaltigkeiten lässt sich gut mithilfe von Differentialformen formalisieren. Wir skizzieren nun, was es mit dieser Mischung von Analysis und Linearer Algebra auf sich hat (im Detail wird dies in der *Analysis auf Mannigfaltigkeiten* bzw. bis zu einem gewissen Grad auch in der *Geometrie für Lehramtskandidaten (Gymnasium)* durchgeführt).

Zum Einstieg erinnern wir kurz an ein paar Grundlagen der mehrdimensionale Analysis:

Bemerkung A.5.1 (Erinnerung an die mehrdimensionale Analysis)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so ist für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung $f'(p)$ an der Stelle p eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (also ein Element in $(\bigwedge^1(\mathbb{R}^n))^*$). Die zweite Ableitung $f''(p)$ ist eine *bi*lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Ableiten erhöht also in natürlicher Weise die Multilinearität. Durch Berücksichtigung der Reihenfolge der Koordinaten und Einführung passender Vorzeichen erhält man daraus alternierende Abbildungen.

Außerdem wissen wir, dass in der Transformationsformel für Integrale von Funktionen in mehreren Variablen die Determinante (ein Objekt aus der multilinearen Algebra!) als Korrekturfaktor auftritt.

Es ist daher naheliegend, Funktionen mit Werten in (Dualräumen von) äußeren Produkten zu betrachten.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und sei TM das zugehörige Tangentialbündel über M (Beispiel 4.2.14). Ist $k \in \mathbb{N}$, so kann man daraus das Bündel $(\bigwedge^k TM)^*$ der k-linearen alternierenden Formen auf den Tangentialräumen konstruieren.

Funktionen als Differentialformen. Ist $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so können wir wegen $\bigwedge^0 T_pM = \mathbb{R}$ diese Abbildung auch als eine Abbildung

$$M \longrightarrow (\bigwedge^0 TM)^*$$

mit $f(p) \in (\bigwedge^0 T_pM)^*$ für alle $p \in M$ auffassen. Dies mag zunächst unnötig kompliziert erscheinen, gibt aber den Hinweis auf die richtige höherdimensionale Verallgemeinerung und ist somit der Ausgangspunkt für die moderne Beschreibung der Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten.

Differentialformen. Eine *Differentialform vom Grad k* ist eine glatte Abbildung $f\colon M \longrightarrow (\bigwedge^k TM)^*$ mit

$$\forall_{p\in M} \quad f(p) \in (\Lambda^k T_pM)^*.$$

Eine Differentialform ordnet also auf glatte Weise jedem Punkt von M eine multilineare alternierende Form auf dem zugehörigen Tangentialraum zu.

Lokale Koordinaten. Lokale Koordinaten auf M liefern (durch Differentiation und Korollar 4.2.8) explizite lokale Basen von $\Lambda^k(TM^*)$. Mithilfe von Korollar 4.2.9 erhält man daraus explizite lokale Basen von $(\Lambda^k TM)^*$. Dies ermöglicht es, bei Bedarf, in sogenannten lokalen Koordinaten zu rechnen. Der Vorzug des Differentialformenkalküls ist aber eigentlich, dass er es ermöglicht, über Differentiation und Integration auf Mannigfaltigkeiten zu sprechen, *ohne* Koordinaten wählen zu müssen und somit die damit verbundene Indexschlacht zu umschiffen.

Cartan-Ableitung von Differentialformen. Ist $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so erhält man durch Differentiation eine Abbildung

$$df\colon M \longrightarrow (TM)^* \cong (\Lambda^1 TM)^*$$

mit $df(p) \in (T_pM)^*$ für alle $p \in M$ (also eine Differentialform vom Grad 1). Allgemeiner liefert die sogenannte *Cartan-Ableitung* für jede Differentialform auf M vom Grad k eine Differentialform auf M vom Grad $k+1$.

Dachprodukt von Differentialformen. Seien $k, m \in \mathbb{N}$. Dann ist das *Dachprodukt von Multilinearformen* definiert durch

$$\begin{aligned}(\Lambda^k T_pM)^* \otimes_{\mathbb{R}} (\Lambda^m T_pM)^* &\longrightarrow (\Lambda^{k+m} T_pM)^* \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \Bigg(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+m} \mapsto \sum_{\sigma\in S_{k,m}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)}) \\ &\qquad\qquad \cdot \beta(v_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k+m)})\Bigg),\end{aligned}$$

wobei $S_{k,m} \subset S_{k+m}$ die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, k+m\}$ mit

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \quad \text{und} \quad \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+m)$$

ist. Woher kommt diese Abbildung? Nach Korollar 4.2.9 wissen wir, dass der Dualraum $(\Lambda^k T_pM)^*$ kanonisch isomorph zu $\Lambda^k(T_pM^*)$ ist (und analog für m). Übersetzt man mit diesem Isomorphismus die äußere Produktabbildung

$$\begin{aligned}\Lambda^k(T_pM^*) \otimes_K \Lambda^m(T_pM^*) &\longrightarrow \Lambda^{k+m}(T_pM^*) \\ (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \otimes (v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_{k+m}) &\longmapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k+m},\end{aligned}$$

so erhält man die obige Formel. Diese Konstruktion führt zum *Dachprodukt von Differentialformen*. Die Cartan-Ableitung erfüllt eine „Produktregel“ bezüglich diesem Dachprodukt.

Integration von Differentialformen. Der Zusammenhang zwischen Determinanten und $(\Lambda^n TM)^*$ (wie in der koordinatenfreien Beschreibung der Determinante in Beispiel 4.2.10) zeigt in Kombination mit der Transformationsformel für Integration (in der Determinanten auch eine wichtige Rolle spielen!), dass Differentialformen vom Grad n auf n-dimensionalen (kompakten) Mannigfaltigkeiten sinnvoll *integriert* werden können.

Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten. Eine Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn es eine glatte Funktion $\omega_M \colon M \longrightarrow (\Lambda^n TM)^*$ mit $\omega_M(p) \in (\Lambda^n T_pM)^* \setminus \{0\}$ gibt (also eine nirgends-verschwindende Differentialform vom Grad n). Anschaulich bedeutet dies, dass es möglich ist, zu jedem Punkt $p \in M$ so eine Orientierung auf T_pM zu wählen (im Sinne von Beispiel 4.2.11), dass all diese Wahlen kompatibel sind.

Riemannsche Metriken auf Manngifaltigkeiten und das Volumen. Eine *riemannsche Metrik auf M* ist eine glatte Wahl von Skalarprodukten auf den Tangentialräumen auf M (dies kann auch durch geeignete Abbildungen in das Bündel $(TM \otimes_{\mathbb{R}} TM)^*$ beschrieben werden). Ist eine riemannsche Metrik auf M gegeben und ist M orientierbar, so kann man wie in Beispiel 4.2.13 eine *Volumenform auf M* als Differentialform auf M vom Grad n definieren. Nach Definition ist das *Volumen von M* dann nichts anderes als das Integral über diese Volumenform. Riemannschen Metriken erlauben es außerdem auf Mannigfaltigkeiten Abstände und Winkel zu messen.

Hodge-$*$-Operator und Dualität. Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Aus Korollar 4.2.8 erhalten wir für alle $p \in M$, dass

$$\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda^k T_pM)^* = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim_{\mathbb{R}}(\Lambda^{n-k} T_pM)^*,$$

und damit $(\Lambda^k T_pM)^* \cong_{\mathbb{R}} (\Lambda^{n-k} T_pM)^*$. Ist eine riemannsche Metrik auf M gegeben, so kann man die dadurch gegebenen lokalen Skalarprodukte nutzen, um einen natürlichen expliziten Isomorphismus

$$* \colon (\Lambda^k T_pM)^* \longrightarrow (\Lambda^{n-k} T_pM)^*$$

(und entsprechend für Differentialformen) zu konstruieren, den sogenannten *Hodge-$*$-Operator*. Geometrisch führt diese Abbildung letztendlich zur Poincaré-Dualität der De-Rham-Kohomologie [6].

Funktorialität. All diese Konstruktionen sind im folgenden Sinne funktoriell: Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten und ist $f \colon M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung, so liefert die induzierte Abbildung $Tf \colon TM \longrightarrow TN$ zwischen den Tangentialbündeln auch Abbildungen

$$(\Lambda^k f)^* \colon (\Lambda^k TN)^* \longrightarrow (\Lambda^k TM)^*$$

auf den entsprechenden Bündeln der multilinearen Formen. Dies führt zum *Pullback von Differentialformen*. Differentialformen erfüllen also (im Gegensatz zu Vektorfeldern) eine sehr allgemeine Form der Funktorialität.

Aufbauend auf dieser Theorie lassen sich dann auch zum Beispiel Krümmungsphänomene etc. auf Mannigfaltigkeiten untersuchen. Dies ist Gegenstand der *Differentialgeometrie*.

Grundlegende Beispiele für Mannigfaltigkeiten, auf die diese Theorie anwendbar ist, sind Sphären, Tori und die hyperbolischen Räume. Die Theorie ist aber mächtig genug, um noch viele weitere gekrümmten Räume zu beschreiben und verstehen.

A.6 Die LA-Matrix

In den Vorlesungen *Lineare Algebra I/II* haben wir uns mit diversen Aspekten linearer Strukturen und ihrer Anwendungen beschäftigt. Im wesentlichen lässt sich das Material mithilfe der untenstehenden LA-Matrix organisieren. Es ist eine gute Übung, diese Matrix selbständig auszufüllen (bis auf die wenigen Einträge, die offensichtlich keinen Sinn ergeben). Matrixeinträge, die Ihnen im Moment noch Kummer bereiten, sollten Sie bei der Prüfungsvorbereitung natürlich besonders berücksichtigen.

	Logik und Mengenlehre	Zählen, Zahlen, Körper	Vektorräume	Lineare Abbildungen	Matrizenkalkül	Eigenwerte/Diagonalisierbarkeit	Euklidische/Unitäre Vektorräume	Moduln über Hauptidealringen	Jordansche Normalform	Multilineare Algebra
grundlegende Definitionen?										
grundlegende Beispiele?										
wichtige Sätze?										
wichtige Beweistechniken?										
wichtige Zusammenhänge?										
wichtige Anwendungen?										
universelle Eigenschaften?										
Matrizenkalkül dafür?										
Algorithmen/Rezepte?										
Standardaufgaben dazu?										
weitere Aufgaben dazu?										

B
Übungsblätter

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 0 vom 24. April 2017

Aufgabe 1 (Bilinearformen?)**.** Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b_1 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \\ b_1 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Abbildung b_1 ist eine Bilinearform (über $\mathbb{R}$).
2. Die Abbildung b_2 ist eine Bilinearform (über $\mathbb{R}$).

Aufgabe 2 (ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$)**.** Sei

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe 3 (ein Skalarprodukt für Matrizen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\begin{aligned} b\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}} \cdot B). \end{aligned}$$

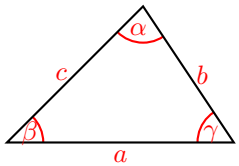
Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert.

Aufgabe 4 (Dreieck)**.** Sei

$$\Delta := \left\{ t_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_0, t_1, t_2 \in [0, 1],\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Wie heißt der griechische Buchstabe auf der linken Seite? Beherrschen Sie das große und kleine griechische Alphabet?
2. Skizzieren Sie die Menge $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.
3. Geben Sie sechs verschiedene Matrizen $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ mit $A \cdot \Delta = \Delta$ an. Welche geometrischen Namen haben die zugehörigen Abbildungen?
4. Machen Sie anschaulich plausibel, warum es keine weiteren solchen Matrizen geben kann.

Bonusaufgabe (Winkelsumme)**.** Formalisieren Sie mithilfe von Begriffen aus der Linearen Algebra, was ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ist und was die Innenwinkel eines solches Dreiecks sind. Formulieren Sie dann den Satz über die Invarianz der Winkelsumme und beweisen Sie diesen.



---

keine Abgabe; diese Aufgaben werden in den Übungen
in der zweiten Vorlesungswoche besprochen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 1 vom 27. April 2017

Aufgabe 1 (Bilinearformen)**.** Wir betrachten die Bilinearform

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_1 \cdot y_2 + 2 \cdot x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Bilinearform b ist symmetrisch.
2. Die Bilinearform b ist positiv definit.

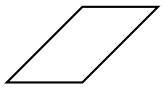
Aufgabe 2 (lineare Abhängigkeit und Skalarprodukte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, sei $\| \cdot \|$ die induzierte „Norm“ auf V und seien $x, y \in V$ mit $y \neq 0$. Sei

$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2}.$$

Zeigen Sie: Die Familie (x, y) ist genau dann linear abhängig, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$ ist.

Aufgabe 3 (Parallelogrammgleichung)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\| \cdot \|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V induzierte Norm.

1. Zeigen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$
2. Warum heißt diese Gleichung Parallelogrammgleichung? Illustrieren Sie die Situation durch eine geeignete Skizze.



Aufgabe 4 (Dualisieren über Skalarprodukte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto \langle x, \cdot \rangle \end{aligned}$$

von V in den Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass φ injektiv ist.
2. Folgern Sie: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, so ist φ ein Isomorphismus.

Bonusaufgabe (ɹǝuɹɔıǝlƃɯɯɐɹƃolǝllɐɹɐ⅁)**.** Sei $(V, \| \cdot \|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung erfüllt ist, d.h. es gilt

$$\forall_{x,y \in V} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|$ dann von einem Skalarprodukt induziert ist.
Hinweis. Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$!

Abgabe bis zum 4. Mai 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 2 vom 4. Mai 2017

Aufgabe 1 (Eigenwerte von Bilinearformen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist B eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so ist $\sigma_{\mathbb{R}}\big(M_B(b)\big) = \sigma_{\mathbb{R}}\big(M_{E_n}(b)\big)$.
2. Es gilt $\sigma_{\mathbb{R}}\big(M_{E_n}(b)\big) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 2 (Wieviele (symmetrische) Bilinearformen gibt es?)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Bestimmen Sie $\dim_K \operatorname{Bil}_K(V)$.
2. Bestimmen Sie die Dimension des K-Vektorraums aller symmetrischen Bilinearformen auf V.

Aufgabe 3 (Spieglein, Spieglein, ...)**.** Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und zu $v \in V \setminus \{0\}$ sei

$$\begin{aligned} S_v\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x - 2 \cdot \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v. \end{aligned}$$

Man bezeichnet S_v als *Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene.*

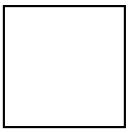
1. Berechnen Sie $S_v(x)$ in den Fällen $x \in \mathbb{R}\cdot v$ bzw. $x \perp v$. Warum rechtfertigt dies die Bezeichnung von S_v als Spiegelung?
2. Zeigen Sie, dass S_v eine Isometrie bezüglich der induzierten Norm ist.
3. Zeigen Sie: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\det S_v = -1$.
4. Skizzieren Sie S_v in den Fällen $v = e_2$ bzw. $v = e_1 + e_2$ in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_2)$. Ist die Komposition $S_{e_1} \circ S_{e_1+e_2}$ auch eine Spiegelung?

Aufgabe 4 (Isometriegruppe eines Quadrats)**.** Sei $Q := [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ und sei $G := \big\{ f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \;\big|\; f(Q) = Q \big\}$. Dann ist G eine Gruppe.

1. Zeigen Sie, dass G genau acht Elemente enthält.

   Hinweis. Was passiert mit den Ecken des Quadrats? Warum?

2. Ist die Gruppe G abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort!



Bonusaufgabe (Würfel)**.** Vervollständigen Sie im OpenSCAD-Programm auf der Rückseite `cube_isometries` derart, dass ein Würfel erzeugt wird.

Abgabe bis zum 11. Mai 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

```
// Cube
//
//-------------------------------------------------------
// global settings
// global resolution settings
$fs = 0.1;  // facet resolution
$fa = 2;    // angle resolution
$fn = 100;  // circle resolution
// helper geometry
debug = true;
// thickness of faces
t = 1;
// edge length of the cube
el = 20;

//-------------------------------------------------------
// main:
cube(el);

//-------------------------------------------------------
// cube with edge length c (centred at the origin)
module cube(c) {
  union() {
    // we reconstruct the cube by applying enough symmetries to the base face
    cube_isometries() cube_baseface(c);
  }
}

// base face of the cube (edge length c)
module cube_baseface(c) {
  translate (-c/2*[0,0,1])         // moving the block to the correct position
  linear_extrude(t)                // 2D-square -> 3D-block of thickness t
  square(size = c, center = true); // 2D-square
}

// two generating symmetries of the cube
module c_r1() {
   rotate(a=90,v=[1,0,0]) children();
}
module c_r2() {
   rotate(a=90,v=[0,1,0]) children();
}

// enough symmetries of the cube
module cube_isometries() {
  union() {
    children();
    c_r1() children();
    // ?!
    // the isometries for the remaining faces are missing ...
    // note that isometries can also be composed,
    // using syntax of the form "f() g() children();" etc
    // ?!
  }
}
```

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 3 vom 11. Mai 2017

Aufgabe 1 (orthogonale Komplemente von orthogonalen Komplementen ...)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $A \subset V$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Es gilt $\big((A^\perp)^\perp\big)^\perp = A^\perp$.

Aufgabe 2 (Orthonormalisierung)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis des Untervektorraums $V(A, 0) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$.
2. Wenden Sie nun das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf diese Basis an, um eine Orthonormalbasis von $V(A, 0)$ (bezüglich dem euklidischen Skalarprodukt) zu erhalten.

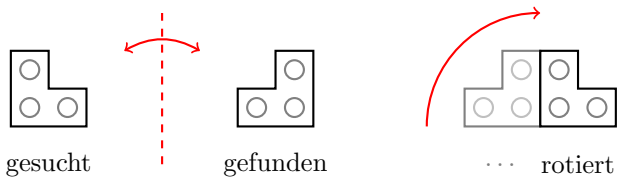
Aufgabe 3 (Eindeutigkeit orthogonaler Projektionen)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Es gibt höchstens eine lineare Abbildung $p\colon V \longrightarrow V$ mit

$$\operatorname{im} p \subset U \quad \text{und} \quad \operatorname{im}(p - \mathrm{id}_V) \subset U^\perp.$$

Aufgabe 4 (Spiegelei)**.**

1. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, so ist $L(A)$ eine Spiegelung (im Sinne von Aufgabe 3 auf Blatt 2).
2. Folgern Sie: Jede lineare Isometrie der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ist eine Spiegelung oder kann als Komposition von zwei Spiegelungen geschrieben werden.

Bonusaufgabe (Legometrie)**.** Beim Bauen nach einer Lego-Anleitung finden Sie statt des eigentlich gesuchten Teils nur das (an einer Ebene) gespiegelte Teil. Erfreut stellen Sie fest, dass sich dieses durch eine ebene Rotation in das gesuchte Teil überführen lässt. Was können Sie daraus über Ihr Teil schließen?



Abgabe bis zum 18. Mai 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 4 vom 18. Mai 2017

Aufgabe 1 (adjungierte Homomorphismen)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $(f^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = f$.
2. Es gilt $(f \circ f)^{\mathsf{H}} = f^{\mathsf{H}} \circ f^{\mathsf{H}}$.

Aufgabe 2 (Hauptachsentransformation)**.** Zu $c \in \mathbb{R}$ sei

$$Q_c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3/2 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + 3/2 \cdot x_2^2 = c\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ Hauptachsen für die Quadrik Q_c und bestimmen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{R} \mid Q_c \neq \emptyset\}$.
2. Skizzieren Sie die Quadrik Q_2. Ist Q_2 beschränkt (bezüglich $\| \cdot \|_2$)?

Aufgabe 3 (Spektraldarstellung)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im komplexen Fall). Zu $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ sei $p_\lambda\colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$. Zeigen Sie, dass dann die folgende *Spektraldarstellung* gilt:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)} \lambda \cdot p_\lambda$$

Aufgabe 4 (Polarzerlegung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{GL}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass A eine *Polarzerlegung* besitzt, d.h., es existiert eine orthogonale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$ und eine symmetrische positiv definite Matrix $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit
$$A = U \cdot P.$$
2. Zeigen Sie außerdem, dass diese Matrizen U und P eindeutig durch A bestimmt sind.

Hinweis. Ziehen Sie die Wurzel aus $A^{\mathsf{T}} \cdot A$ ...

Bonusaufgabe (Hauptminorenkriterium)**.** Beweisen Sie das Hauptminorenkriterium für positive Definitheit: Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie: Dann ist A genau dann positiv definit, wenn

$$\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad \det A(j) > 0$$

ist. Dabei bezeichnet $A(j)$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die $(j+1)$-te, ..., n-te Zeile und Spalte von A streicht.

Hinweis. Die Basiswechselformel für Matrizen von Bilinearformen ist sicher nützlich. Man kann die schwierige Richtung per Induktion über die Dimension beweisen. Im Induktionsschritt kann man analog zum Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt oder mit dem Sylvesterschen Trägheitssatz argumentieren.

Abgabe bis **Mittwoch, 24. Mai 2017, 16:00**, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 5 vom 25. Mai 2017

Aufgabe 1 (Quadrieren). Zu einem Körper K sei

$$\begin{aligned}\varphi_K \colon K[T] &\longrightarrow K[T]\\ f &\longmapsto f \cdot f.\end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Die Abbildung $\varphi_{\mathbb{Q}}$ ist ein Ringhomomorphismus.
2. Die Abbildung $\varphi_{\mathbb{F}_2}$ ist ein Ringhomomorphismus.

Aufgabe 2 (Zerlegung von Endomorphismen). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, sei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

und $f := L(A) \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-zyklischer Vektorraum ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-irreduzibler Vektorraum ist.

Aufgabe 3 (Endomorphismenpolynome). Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $p(f) = 0$ gibt.
Hinweis. Ist $p = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j$, so ist $p(f) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot f^j$. Im Notfall:
Welche Dimension hat $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ (Matrizenkalkül)? Kann die Familie $(f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ dann überhaupt linear unabhängig sein? Was bedeutet es, dass die Familie $(f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ linear abhängig ist?

Aufgabe 4 (Uhrzeitring). Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$\circlearrowright := \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; \exists_{k\in\mathbb{Z}} \quad x - y = 12 \cdot k\right\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

auf $\mathbb{Z}$ und den Quotienten $U := \mathbb{Z}/\circlearrowright$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned}+ \colon U \times U &\longrightarrow U\\ \big([x], [y]\big) &\longmapsto [x + y]\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\cdot \colon U \times U &\longrightarrow U\\ \big([x], [y]\big) &\longmapsto [x \cdot y]\end{aligned}$$

   wohldefiniert sind.
2. Zeigen Sie, dass U mit diesen Verknüpfungen ein kommutativer Ring ist.
3. Was hat U mit Uhrzeiten zu tun?
4. Ist U ein Integritätsring? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Gruppenringe). Sei G eine Gruppe. Finden Sie mithilfe geeigneter Literatur heraus, wie der Gruppenring $\mathbb{C}G$ definiert ist und was die Kaplansky-Vermutung besagt. Zeigen Sie: Gibt es ein Element $g \in G\setminus\{e\}$ mit $g^{2017} = e$, so ist der Ring $\mathbb{C}G$ *nicht* nullteilerfrei.

Abgabe bis zum 1. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 6 vom 1. Juni 2017

Aufgabe 1 (Modulhomomorphismen)**.** Sei R ein Ring, seien V, W Moduln über R und sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $f(0) = 0$.
2. Ist $a \in R \setminus \{0\}$ und $v \in V$ mit $f(a \cdot v) = 0$, so folgt $f(v) = 0$.

Aufgabe 2 (minimale Erzeugendensysteme)**.** Im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^2$ betrachten wir

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 2017 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} E = \mathbb{Z}^2$ gilt.
2. Zeigen Sie: Ist $F \subset E$ mit $F \neq E$, so ist $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} F \neq \mathbb{Z}^2$.

Aufgabe 3 (invariante Unterräume)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Außerdem sei $U \subset V$ ein K-Untervektorraum. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Unterraum U ist f-invariant, d.h. es gilt $f(U) \subset U$.
2. Die Teilmenge $U \subset V$ ist ein $K[T]$-Untermodul von $V[f]$.

Aufgabe 4 (Vererbung von endlicher Erzeugtheit)**.** Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul und sei $U \subset V$ ein Untermodul. Zeigen Sie: Sind U und V/U endlich erzeugte R-Moduln, so ist auch der R-Modul V endlich erzeugt.

Hinweis. Wie kann man aus dem Beweis der Dimensionsformel für Quotientenvektorräume einen Beweis dieser Aussage über Moduln extrahieren? Basen sollten dabei natürlich nicht auftreten, sondern nur Erzeugendensysteme.

Bonusaufgabe (Zauberei!)**.** Professor Pirkheimer führt seinen Kollegen in der Modulkatalogslektüregesellschaft zusammen mit seinem Assistenten folgenden Kartentrick vor: Pirkheimer bittet einen der Zuschauer, ein Kartendeck mit 52 Karten (jeweils 2, 3, . . . , 10, B, D, K, A in den Farben Karo, Herz, Pik, Kreuz) zu mischen. Ein weiterer Zuschauer zieht aus diesem Deck fünf Karten und gibt sie dem Assistenten (natürlich so, dass Pirkheimer die Karten *nicht* sehen kann; der Assistent darf sie aber ansehen). Der Assistent gibt dann nacheinander vier Karten offen an Pirkheimer und behält die fünfte Karte verdeckt bei sich. Professor Pirkheimer nennt daraufhin korrekt die verdeckte fünfte Karte.

Wie funktioniert dieser Trick? Wie kann man den Trick so arrangieren, dass er einfach durchzuführen ist?

Hinweis. Es geht alles mit rechten Dingen zu – insbesondere kommt es nicht darauf an, ob die Karten quer, hochkant, mit wackelnden Ohren, etc. überreicht werden. Zum Einstieg kann es hilfreich sein, sich zunächst eine Variante zu überlegen, bei der Pirkheimer nur die Farbe der fünften Karte korrekt nennt. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und die symmetrische Gruppe S_3 dürfen gerne mitspielen!

Abgabe bis zum 8. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig Blatt 7 vom 8. Juni 2017

Aufgabe 1 (Quotienten und direkte Summen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Es gilt $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (Irreduzibilität)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und es sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Vektorraum V ist f-reduzibel.
2. Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zerlegbar.

Aufgabe 3 (freie Moduln)**.** Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R-Modul V ist frei.
2. Es gibt eine Menge I mit $V \cong_R \bigoplus_I R$.

Aufgabe 4 (Determinantenideale)**.** Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{m\times n}(R)$. Mithilfe der Leibniz-Formel erhält man eine Definition der Determinante von quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in R. Sei $r \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$. Ein $r \times r$-*Untermatrix von* A ist eine Matrix der Form $(A_{j,k})_{j\in J, k\in K} \in M_{r\times r}(R)$, wobei $J \subset \{1, \dots .m\}$, $K \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|J| = r = |K|$. Sei

$$D_r(A) := \operatorname{Span}_R\big\{\det B \;\big|\; B \text{ ist eine } r \times r\text{-Untermatrix von } A\big\} \subset R$$

das von den r-Minoren von A erzeugte Ideal in R.

1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$$

   die Ideale $D_1(A)$ und $D_2(A)$.

2. Zeigen Sie: Sind $S \in M_{m\times m}(R)$ und $T \in M_{n\times n}(R)$, so gilt

$$D_r(S \cdot A) \subset D_r(A) \quad \text{und} \quad D_r(A \cdot T) \subset D_r(A)$$

   für alle $r \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$.

3. Folgern Sie: Sind $S \in M_{m\times m}(R)$ und $T \in M_{n\times n}(R)$ invertierbar (d.h. diese Matrizen besitzen multiplikative Inverse in $M_{m\times m}(R)$ bzw. $M_{n\times n}(R)$), so gilt $D_r(S \cdot A \cdot T) = D_r(A)$ für alle $r \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Verschwörung!)**.** Fünfundzwanzig Modulbeauftragte planen eine Revolution und kommen daher zu konspirativen Sitzungen zusammen. Der Sitzungsmarathon besteht aus sechs Terminen, zu denen sich die fünfundzwanzig Teilnehmer auf fünf Räume verteilen. Um die Konspirativität zu bewahren, besteht jede dieser Sitzungsgruppen aus genau fünf Teilnehmern. Andererseits soll jeder Teilnehmer mindestens einmal mit jedem anderen Teilnehmer in einer dieser Fünfergruppen konspiriert haben. Zeigen Sie, dass es möglich ist, einen Sitzungsplan zu erstellen, der diese Bedingungen erfüllt.

Hinweis. Betrachten Sie den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Wieviele Untermoduln mit genau fünf Elementen besitzt dieser? Wie kann man die Elemente der zugehörigen Quotientenmoduln interpretieren?

Abgabe bis **Mittwoch, 14. Juni 2017, 16:00**, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 8 vom 15. Juni 2017

Aufgabe 1 (Ideale/Teilbarkeit)**.** Sei R ein Ring und seien $a, b \in R$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gilt $(a+b) = (a) + (b)$.

   Hinweis. Dabei ist $(a) + (b) = \{x + y \mid x \in (a), y \in (b)\}$.

2. Es gilt $(a \cdot b) = (a) \cap (b)$.

Aufgabe 2 (Primfaktorzerlegungen über verschiedenen Körpern)**.** Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen des Polynoms

$$T^4 - 4$$

in $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$ (und begründen Sie jeweils, warum es sich dabei um Primfaktorzerlegungen handelt).

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung)**.** Sei R ein Integritätsring und seien $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R$ Primelemente mit

$$\prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{j=1}^{m} q_j.$$

Zeigen Sie: Dann ist $n = m$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in R^\times$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad p_j = \varepsilon_j \cdot q_{\sigma(j)}.$$

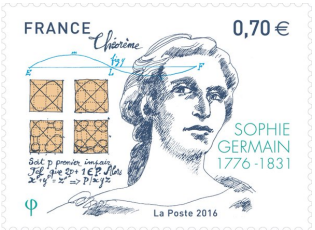
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass p_1 zu einem der Elemente $q_1, \dots, q_m$ assoziiert ist und hangeln Sie sich dann Primfaktor für Primfaktor durch das Produkt.

Aufgabe 4 (zyklische Moduln)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und es sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Vektorraum V ist f-zyklisch.
2. Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zyklisch.

Bonusaufgabe (prima Primzahl?!)**.** Ist $4^{2345} + 2345^4$ eine Primzahl? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis.



Abgabe bis zum 22. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 9 vom 22. Juni 2017

Aufgabe 1 (Idealgleichheiten)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(T^4 + T^2 + 2 \cdot T, T^3 + 2017 \cdot T) = (T)$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Es gilt $(T^2 + T, T + 1) = (T^2 + T, T^5 + 1)$ in $\mathbb{F}_2[T]$.

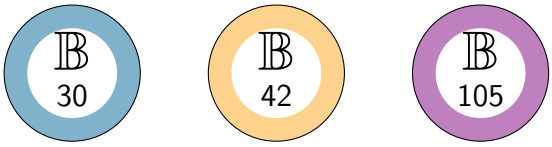
Aufgabe 2 (Schwanensee)**.** Professor Pirkheimer bewundert das Schwanensee-Ballett und wüsste zu gerne, wie viele Tänzerinnen involviert sind. Aufgrund des permanenten Rumgehopses sind sie jedoch nur schwer zu zählen. Er stellt jedoch fest, dass es je einen Tanz gibt, bei dem sich

- alle bis auf drei Tänzerinnen in Fünfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf fünf Tänzerinnen in Zwölfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf sechs Tänzerinnen in Siebenergrüppchen aufteilen.

Außerdem ist sich Pirkheimer sicher, dass es sich insgesamt um weniger als 1000 Tanzbeine bzw. 500 Tänzerinnen handelt.

Wieviele Tänzerinnen schwirren herum? Begründen Sie Ihre Antwort! Wie haben Sie diese Lösung gefunden?

Aufgabe 3 (Währungsreform)**.** Im Rahmen einer Währungsreform werden neue Münzen mit dem Wert von 30 Blorx, 42 Blorx bzw. 105 Blorx eingeführt.



1. Ist es möglich, 44 Blorx exakt zu bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Wie kann man den Betrag von 9 Blorx exakt bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)?

Hinweis. Sie dürfen in beiden Fällen annehmen, dass Käufer und Verkäufer genug Exemplare der verschiedenen Münztypen besitzen.

Aufgabe 4 (Präsentationen von Moduln)**.** Bestimmen Sie für die folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln V jeweils zwei verschiedene Wahlen von $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ mit $V \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^m / \operatorname{im} L(A)$.

1. Für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2017}$.
2. Für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Bonusaufgabe (große kleine Moduln)**.** Geben Sie einen Integritätsring R an, für den nicht jeder Untermodul von R^{2017} endlich erzeugt ist.

Hinweis. Man könnte zum Beispiel Polynome mit viiiiiielen Variablen betrachten ...

Abgabe bis zum 29. Juni 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 10 vom 29. Juni 2017

Aufgabe 1 (Elementarteiler von Moduln)**.** Sei R ein Hauptidealring und sei U ein Untermodul von R^3. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist (v_1, v_2, v_3) eine R-Basis von R^3, so gibt es Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \alpha_2 \cdot v_2, \alpha_3 \cdot v_3\}$.
2. Es gibt eine Basis (v_1, v_2, v_3) von R^3 und Primelemente $p_1, p_2, p_3 \in R$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{p_1 \cdot v_1, p_2 \cdot v_2, p_3 \cdot v_3\}$.

Aufgabe 2 (mehr Elementarteiler)**.** Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \leq 9$, indem Sie zunächst geeignete Elementarteiler und zugehörige Transformationen bestimmen.

Aufgabe 3 (schon wieder Elementarteiler)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} T^3 & (T+1) & -1 \\ T & T & T \\ T^2 & (T+1) & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}\big(\mathbb{Q}[T]\big)$$

und $U := \operatorname{im} L(A) \subset \mathbb{Q}[T]^3$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Elementarteiler von A.
2. Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}[T]$-Basis von U.
3. Geben Sie eine Darstellung von $\mathbb{Q}[T]^3/U$ als direkte Summe zyklischer $\mathbb{Q}[T]$-Moduln an.
4. Ist $\mathbb{Q}[T]^3/U \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[T]/(T^3 + T^2)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Rang freier Moduln über Hauptidealringen)**.** Sei R ein Hauptidealring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie: Gilt $n > m$ und ist $A \in M_{m\times n}(R)$, so ist $L(A)\colon R^n \longrightarrow R^m$ *nicht* injektiv.
2. Folgern Sie: Es gilt genau dann $R^n \cong_R R^m$, wenn $n = m$ ist.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Staatsexamensaufgaben zu abelschen Gruppen)**.** Die folgenden Aufgaben sind ehemalige (teilweise leicht umformulierte) Staatsexamensaufgaben:

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphietypen von abelschen Gruppen, die genau 1980 Elemente enthalten, und geben Sie für jeden Isomorphietyp ein Beispiel.

2. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, so dass es genau sechs Isomorphietypen von abelschen Gruppen mit genau n Elementen gibt.

3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ mit $\det A \neq 0$. Zeigen Sie, dass
$$|\det A| = |\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} L(A)|.$$

4. Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppe der positiven reellen Zahlen (bezüglich Multiplikation) zur abelschen Gruppe aller reellen Zahlen (bezüglich Addition) isomorph ist.

   Hinweis. Analysis!

Hinweis. Herzlichen Glückwunsch! Bereits mit dem jetzigen Wissen aus der Linearen Algebra und der Analysis sind Sie in der Lage einen signifikanten Anteil an Staatsexamensaufgaben (aber natürlich bei weitem nicht alle ...) zu lösen.

Abgabe bis zum 6. Juli 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 11 vom 6. Juli 2017

Aufgabe 1 (Minimalpolynome)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $\lambda \in K \setminus \{0\}$, so ist $\mu_{\lambda\cdot A} = \lambda^{\deg \mu_A} \cdot \mu_A\big(\frac{1}{\lambda} \cdot T\big)$.
2. Es gilt $\mu_{A\cdot A} = \mu_A \cdot \mu_A$.

Aufgabe 2 (Kombination zweier Blöcke)**.** Sei K ein Körper, seien $k, m \in \mathbb{N}$, seien $B \in M_{k\times k}(K)$, $C \in M_{m\times m}(K)$. Dann betrachten wir die Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

mit $n := k + m$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A das (normierte) kleinste gemeinsame Vielfache von μ_B und μ_C in $K[T]$ ist.

Aufgabe 3 (Minimalpolynome und Normalformen)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[T]$.
2. Ist A über $\mathbb{Q}$ zu einer Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$ in Jordanscher Normalform ähnlich? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Ist die Matrix A (aufgefasst als Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$) über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A in $\mathbb{F}_2[T]$, wenn wir A als Matrix in $M_{4\times 4}(\mathbb{F}_2)$ auffassen.

Aufgabe 4 (Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Matrix A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und (paarweise) verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j).$$

Hinweis. Falls A diagonalisierbar ist, so bietet es sich an, das Minimalpolynom mithilfe der Konjugationsinvarianz zu berechnen. Für die umgekehrte Implikation kann man wie beim Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton vorgehen.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Cayley-Hamilton, ganz einfach?!)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

Behauptung. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Dann ist μ_A in $K[T]$ ein Teiler von χ_A.

Beweis. Da das Minimalpolynom den Kern der Auswertung bei A als Ideal in $K[T]$ erzeugt, genügt es zu zeigen, dass $\chi_A(A) = 0 \in M_{n\times n}(K)$ gilt.

Nach Definition des charakteristischen Polynoms ist $\chi_A = \det(T \cdot I_n - A)$. Also erhalten wir

$$\chi_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = \det 0 = 0,$$

wie gewünscht. □

Hinweis. Es ist hilfreich, dies an einem konkreten Beispiel, Schritt für Schritt durchzugehen und jeweils pedantischst darauf zu achten, dass man nicht schlampert ...

Abgabe bis zum 13. Juli 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 12 vom 13. Juli 2017

Aufgabe 1 (Jordansche Normalformen?)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Es gibt eine Matrix $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit
$$\det A = 8 \quad \text{und} \quad \mu_A = (T-2)^2 \cdot (T-1).$$
2. Es gibt eine Matrix $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit
$$\det A = 54 \quad \text{und} \quad \mu_A = (T-3)^2 \cdot (T-2).$$

Aufgabe 2 (Jordansche Normalform und Ähnlichkeit)**.**

1. Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen in $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 & 10 & -9 \\ -14 & 14 & -9 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$
2. Welche dieser Matrizen sind ähnlich zueinander? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (iiiii!)**.** Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} i & -i & i & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & i & -i & i \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$
Bestimmen Sie außerdem (mit dem Verfahren aus der Vorlesung) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 4 (Blorxisch)**.** Die Sprache **BLORX** beruht auf dem Alphabet mit den Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X**. Blorxische Wörter werden dabei nach den folgenden Regeln gebildet:

- Wörter dürfen mit jedem der Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X** beginnen.
- Auf **B** kann nur **B** oder **L** folgen (oder das Wortende).
- Auf **L** oder **O** kann nur **L**, **O**, **R** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **R** kann nur **O** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **X** kann nur **L** oder **X** folgen (oder das Wortende).

Zum Beispiel sind **BLORX** und **RORO** korrekte blorxische Wörter, *nicht* aber **ROXOR**. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die Anzahl der blorxischen Wörter gegebener Länge, die mit **X** beginnen und mit **X** enden!

Hinweis. Betrachten Sie eine geeignete Matrix in $M_{5\times 5}(\mathbb{C})$, deren Einträge nur Nullen und Einsen sind. Was haben Potenzen dieser Matrix mit den gesuchten Anzahlen zu tun? Wie kann man Potenzen von Matrizen mithilfe der Jordanschen Normalform bestimmen?

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Berechnung der Jordanschen Normalform über den Elementarteilersatz für Matrizen)**.** Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n\times n}(K)$.

1. Lesen Sie im Skript nach, wie man die Jordansche Normalform von A berechnen kann, indem man den Elementarteilersatz für Matrizen auf die Matrix $T \cdot I_n - A \in M_{n\times n}(K[T])$ anwendet.

2. Zeigen Sie die dabei verwendete Tatsache, dass $\operatorname{im} L(T \cdot I_n - A) = \ker \pi$ gilt, wobei

$$\begin{aligned} \pi \colon K[T]^n &\longrightarrow K^n[L(A)] \\ p &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot e_j. \end{aligned}$$

Bonusaufgabe (runde Matrizen; für Lehrämtler (als optionale Alternative zur obigen Bonusaufgabe))**.** Ein wesentlicher Bestandteil des Unterrichts ist ein Fundus an interessanten Aufgaben. Die Schüler freuen sich dabei natürlich, wenn der eigentliche Inhalt der Aufgaben nicht durch „krumme“ Zahlen in den Rechnungen in den Hintergrund rückt. In diesem Sinne:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie kann man viele Beispiele von Matrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ finden, deren Jordan-Normalform nur ganzzahlige Einträge besitzt, und für die es auch Ähnlichkeitstransformationen mit ganzzahligen Einträgen gibt?

2. In welchen Fällen kann man es sogar einrichten, dass *alle* zugehörigen Ähnlichkeitstransformationen (bis auf ein skalares Vielfaches) ganzzahlig sind? (Das gibt einem die Garantie, dass ziemlich unabhängig vom Lösungsweg keine zu komplizierten Matrizen auftreten.)

Bonusaufgabe (Hamilton; für Physiker (als optionale Alternative zur obigen Bonusaufgabe))**.** „Welcher“ Hamilton hat am Satz von Cayley-Hamilton mitgewirkt? Welche weiteren Konzepte der Physik/Mathematik gehen auf ihn zurck?

Abgabe bis zum 20. Juli 2017, 10:00 Uhr, in die Briefkästen

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 13 vom 20. Juli 2017

Aufgabe 1 (Tensoren)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K und seien $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

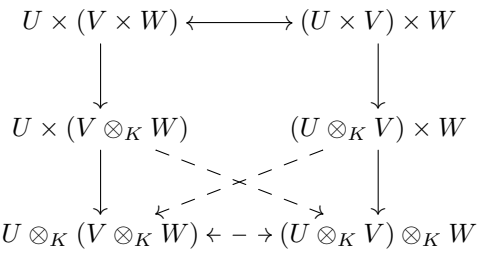
1. Ist $v \otimes w = v' \otimes w'$, so folgt $v = v'$ und $w = w'$.
2. Es gilt $v \otimes w + v' \otimes w' = (v + v') \otimes (w + w')$.

Aufgabe 2 (Skalarprodukte und Tensorprodukte)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Reformulieren Sie die Definition von Skalarprodukten auf V so, dass Sie nur das Tensorprodukt und Eigenschaften von linearen Abbildungen verwenden. Zeigen Sie, dass Ihre Reformulierung zur gewöhnlichen Definition äquivalent ist!

Aufgabe 3 (Assoziativität des Tensorprodukts)**.** Sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} U \otimes_K (V \otimes_K W) &\longrightarrow (U \otimes_K V) \otimes_K W \\ u \otimes (v \otimes w) &\longmapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen ist, indem Sie das folgende Diagramm geeignet dekorieren:



Aufgabe 4 (mehr zur koordinatenfreien Spur)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Wie sieht die Komposition von Endomorphismen von V unter dem kanonischen Isomorphismus $V^* \otimes_K V \cong_K \operatorname{Hom}_K(V, V)$ in $V^* \otimes_K V$ aus?
2. Wie kann man mit dem ersten Teil und der koordinatenfreien Beschreibung der Spur beweisen, dass für alle Endomorphismen $f, g \colon V \longrightarrow V$ die Spurgleichung
$$\operatorname{tr} f \circ g = \operatorname{tr} g \circ f$$
gilt?

Bonusaufgabe (Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$)**.** Schlagen Sie in der Literatur nach, wie das Tensorprodukt $\otimes_{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$-Moduln definiert ist. Wie kann man den $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2016\mathbb{Z}$$

einfacher beschreiben?

Bonusaufgabe (mathematische Allgemeinbildung)**.** Wer war Maryam Mirzakhani? Warum wird diese Aufgabe gerade jetzt gestellt?

Freiwillige Abgabe (bis zum 27. Juli 2017, 10:00, in die Briefkästen)

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 14 vom 27. Juli 2017

Aufgabe 1 (äußere Produkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v, v' \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort (durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel)!

1. Ist $v \wedge v' = v' \wedge v$ in $\bigwedge^2 V$, so folgt $v = v'$.
2. Es gilt $v \wedge v' + v' \wedge v = (v + v') \wedge (v' + v)$ in $\bigwedge^2 V$.

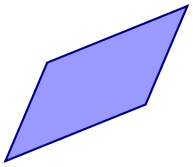
Aufgabe 2 (algebraische Eigenschaften des Kreuzprodukts)**.**

1. Ist das Kreuzprodukt $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ kommutativ? Assoziativ? Gibt es ein neutrales Element für das Kreuzprodukt?
2. Gibt es zu allen $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein $z \in \mathbb{R}^3$ mit $x \times z = y$?

Aufgabe 3 (geometrische Eigenschaften des Kreuzprodukts)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass $x \times y$ zu x und y orthogonal ist (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$).
2. Zeigen Sie: Ist die Familie (x, y) linear unabhängig, so ist $(x, y, x \times y)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, deren Orientierung mit der Orientierung der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) übereinstimmt.
3. Zeigen Sie, dass $\|x \times y\|_2$ der (euklidische) Flächeninhalt des von x und y in $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms ist.

   Hinweis. Winkel?!



Aufgabe 4 (Konstruktion der Volumenform)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum der Dimension $n > 0$ und sei eine Orientierung von V gewählt. Zeigen Sie, dass es dann ein Element $\omega \in (\bigwedge^n V)^*$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für jede positiv orientierte Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V gilt

$$\omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \sqrt{\det\big((\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k \in \{1,\dots,n\}}\big)}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Konstruieren Sie ω, indem Sie der Anleitung im Skript folgen und die Details ausführen.
2. Welche geometrische Bedeutung hat die Volumenform im Fall des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$? Warum?

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

---

keine Abgabe

C

Fingerübungen

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 1 vom 24. April 2017

Aufgabe 1 (Skalarprodukte)**.** Wir betrachten

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Zeichnen Sie diese Vektoren in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte:

$$\langle x, x\rangle_2, \quad \langle y, y\rangle_2, \quad \langle z, z\rangle_2, \quad \langle x, y\rangle_2, \quad \langle x, z\rangle_2, \quad \langle y, z\rangle_2$$

Aufgabe 2 (Förmchen)**.** Sei

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 20 \cdot x_1 \cdot y_1 + 17 \cdot x_2 \cdot y_3 \end{aligned}$$

gegeben.

1. Ist b bilinear (über $\mathbb{R}$)?
2. Ist b symmetrisch?
3. Ist b positiv definit?

Aufgabe 3 (quadratische Formen)**.** Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} b_\varepsilon\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + \varepsilon \cdot x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_\varepsilon\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto b_\varepsilon(x, x). \end{aligned}$$

1. Für welche $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist b_ε positiv definit bzw. positiv semi-definit bzw. negativ definit bzw. negativ semi-definit bzw. indefinit?
2. Skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_1(x) = 1\}$. Wie heißt das entstehende Gebilde?
3. Skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_{-1}(x) = 1\}$. Wie heißt das entstehende Gebilde (jedenfalls, wenn man es geeignet dreht)?

Aufgabe 4 (Lücken)**.** Welche Begriffe/Sätze aus der Linearen Algebra I haben Sie vergessen? Welche Beweise/Rechentechniken aus der Linearen Algebra I finden Sie dubios? Füllen Sie diese Lücken!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 2 vom 2. Mai 2017

Aufgabe 1 (Längen)**.** Bestimmen Sie für alle Vektoren

$$v \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

jeweils $\|v\|_2$ und $\|v\|_1$.

Aufgabe 2 (Winkel)**.** Bestimmen Sie (bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^2$) die Winkel

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \quad \sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 3 (Isometrien)**.** Wir betrachten die Endomorphismen

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \\ g \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

von $\mathbb{R}^2$.

0. Skizzieren Sie f und g.
1. Ist f eine lineare Isometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?
2. Ist f eine lineare Isometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$?
3. Ist g eine lineare Isometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?
4. Ist g eine lineare Isometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$?

Aufgabe 4 (nachrechnen)**.** Ist es Ihnen gelungen, alles nachzurechnen, was in der Vorlesung als nachrechenbar deklariert wurde? Falls nicht, sollten Sie in den Übungen oder in der Zentralübung Fragen dazu stellen!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 3 vom 8. Mai 2017

Aufgabe 1 (Orthogonalität)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2.\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Gilt bezüglich diesem Skalarprodukt, dass $e_1 \perp e_2$?
3. Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $e_1 \perp x$.

Aufgabe 2 (orthogonale Komplemente)**.** Bestimmen Sie die folgenden orthogonalen Komplemente in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}, \quad \left(\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{\perp}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}.$$

Aufgabe 3 (Orthonormalisierung)**.** Wenden Sie das Orthonoramlisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf die Familie

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ an. Erhalten Sie dasselbe Ergebnis, wenn Sie dieses Verfahren auf

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

anwenden?

Aufgabe 4 (nachrechnen)**.** Ist es Ihnen gelungen, alles nachzurechnen, was in der Vorlesung als nachrechenbar deklariert wurde? Falls nicht, sollten Sie in den Übungen oder in der Zentralübung Fragen dazu stellen!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 4 vom 15. Mai 2017

Aufgabe 1 (Diagonalisierbarkeit)**.** Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (adjungierte Abbildung)**.** Zu $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\begin{aligned} f_a \colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + a \cdot x_2 \\ a^2 \cdot x_1 + x_3 \\ x_2 + a \cdot x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die adjungierte Abbildung zu f_a.
2. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f_a selbstadjungiert?

Aufgabe 3 (Orthonormalbasen aus Eigenvektoren)**.**

1. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$
besteht.
2. Finden Sie ein symmetrische Matrix in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit Eigenwerten $1, 2, 3$, für die die Vektoren
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Eigenvektoren sind.

Aufgabe 4 (CAS)**.** Überprüfen Sie Ihre Rechnungen mit einem Computeralgebrasystem!

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 5 vom 22. Mai 2017

Aufgabe 1 (Endomorphismenpolynome)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f := L(A)\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome $p \in \mathbb{C}[T]$ den Endomorphismus $p(f)$, den man erhält, indem man f in p einsetzt:

$$T - \lambda, \quad (T-\lambda)^2, \quad (T-\lambda)^3$$

Aufgabe 2 (Ringrechnungen)**.** Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

1. Für alle $x \in R$ ist $0 \cdot x = 0$.
2. Für alle $x \in R$ ist $-x = (-1) \cdot x$.

Aufgabe 3 (Ringe)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Ringe paarweise nicht isomorph sind:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}[T], \quad \mathbb{F}_2[T].$$

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung des Kapitels über euklidische und unitäre Vektorräume. Was sind die wichtigsten Begriffe, Beispiele, Sätze, Techniken?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 6 vom 29. Mai 2017

Aufgabe 1 (universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** Überprüfen Sie jeweils, ob es einen $\mathbb{Q}$-Algebrenhomomorphismus $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt!

1. Es gilt $f(T) = -T$ und $f(T^2) = T^2$.
2. Es gilt $f(T) = T$ und $f(T^2) = -T^2$.
3. Es gilt $f(T) = 2017 \cdot T^3$.
4. Es gilt $f(T^3) = T$.

Aufgabe 2 (Untermoduln)**.** Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind Untermoduln von $\mathbb{Z}$?

1. $\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{2017 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{2017 \cdot n + 5 \cdot m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
4. $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists_{p \in \mathbb{Q}[T]} \quad p(n) = 0\}$

Aufgabe 3 (Modul zu einem Endomorphismus)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie im Modul $\mathbb{R}^2[f]$ die folgenden Terme:

1. $1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $T^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $(T-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $(T-1)^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (Wozu?)**.** Warum befassen wir uns im Augenblick mit Modultheorie? Warum ist dafür auch Ringtheorie nötig?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 7 vom 5. Juni 2017

Aufgabe 1 (Arithmetik mit Rest)**.** Führen Sie die folgenden Rechnungen in den angegebenen Quotientenmoduln des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ aus:

$$[8] + [15] \text{ in } \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$
$$-3 \cdot [6] \text{ in } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$
$$3 \cdot [-2] \text{ in } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$
$$-48 \cdot [42] \text{ in } \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$$

Aufgabe 2 (Quotientenmoduln im Alltag)**.** Welche Quotientenmoduln von $\mathbb{Z}$ bieten sich zur Modellierung von Rechnungen im Rahmen der folgenden Sachverhalte an?

1. Monate im Jahr
2. Mondphasen
3. Haltestellen der Yamanote Line in Tokyo
4. Paternosteraufzüge

Aufgabe 3 (mehr Quotientenmoduln)**.** Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Matrizen $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, wieviele Elemente der Quotientenmodul $\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} L(A)$ des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^2$ enthält:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2017 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Wozu?)**.** Warum befassen wir uns im Moment mit der Konstruktion von Moduln?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 8 vom 12. Juni 2017

Aufgabe 1 (Division mit Rest)**.** Wir betrachten auf $\mathbb{Z}$ den Absolutbetrag als euklidische Gradfunktion und auf Polynomringen über Körpern die modifizierte Gradfunktion.

1. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Division von 2017 mit Rest durch 126.
2. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Division von 4242 mit Rest durch -17
3. Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[T]$ die Division von $T^4 - 2 \cdot T^3 + T + 7$ mit Rest durch $T^2 + 2 \cdot T - 6$.
4. Berechnen Sie in $\mathbb{F}_2[T]$ die Division von T^3+T^2+1 mit Rest durch T^2+T.

Aufgabe 2 (Primfaktorzerlegung)**.** Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen der Polynome

$$T^2 - 3 \quad \text{und} \quad T^2 + 3$$

in $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$.

Aufgabe 3 (Idealinklusionen)**.** Bestimmen Sie jeweils für die nachfolgenden Ideale, welche Ideale in welchen anderen Idealen enthalten sind. Was bedeutet das für die zugehörigen zyklischen Quotientenmoduln?

1. $(3),\ (6),\ (4),\ (12)$ in $\mathbb{Z}$
2. $(3),\ (T),\ (T^2),\ (T+1)$ in $\mathbb{Q}[T]$
3. $(T+1),\ (T^2+1),\ (T),\ (T^2+T)$ in $\mathbb{F}_2[T]$
4. $(T, T+1),\ (T),\ (T^2),\ (T^3)$ in $\mathbb{C}[T]$

Aufgabe 4 (CAS)**.** Finden Sie heraus, wie man mit einem Computeralgebrasystem Polynomdivision durchführen kann.

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 9 vom 19. Juni 2017

Aufgabe 1 (größter gemeinsamer Teiler).

1. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 2015 und 25 in $\mathbb{Z}$.
2. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 2017 und 5 in $\mathbb{Z}$.
3. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von T^2+T und T^3 in $\mathbb{F}_2[T]$.
4. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $T^5 \cdot (T+1)^7 \cdot (T+2)^{11}$ und $T^3 \cdot (T+1)^{13} \cdot (T+2)^8 \cdot (T+3)^2$ in $\mathbb{R}[T]$.

Aufgabe 2 (Gleichungen in Ringen).

1. Finden Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2017 \cdot x + 42 \cdot y = -8$.
2. Gibt es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $44 \cdot x + 42 \cdot y = 2017$?
3. Finden Sie Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[T]$ mit $p \cdot (T^2 + 2) + q \cdot (T - 1) = T^3$.
4. Gibt es Polynome $p, q \in \mathbb{F}_2[T]$ mit $p \cdot (T^2 + 1) + q \cdot (T + 1) = T^2$?

Aufgabe 3 (Idealinklusionen). Bestimmen Sie jeweils für die nachfolgenden Ideale, welche Ideale in welchen anderen Idealen enthalten sind.

1. $(5),\ (100, 80)$ in $\mathbb{Z}$
2. $(10),\ (8, 12),\ (8, 14),\ (20)$ in $\mathbb{Z}$
3. $(T, T + 1),\ (T^2 + 2017)$ in $\mathbb{Q}[T]$
4. $(T^2 + T, T),\ (T^2),\ (T^2 + 2 \cdot T + 1)$ in $\mathbb{C}[T]$

Aufgabe 4 (Ringeigenschaften). Sammeln Sie alle Ringeigenschaften, die wir bisher behandelt haben, und fassen Sie die bereits bewiesenen Implikationen/Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften in einem möglichst übersichtlichen Diagramm zusammen.

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 10 vom 26. Juni 2017

Aufgabe 1 (Präsentationen von Moduln)**.**

1. Gehen Sie den Beweis von Satz 2.5.1 Schritt für Schritt im Falle des Untermoduls

$$\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid 2 \cdot x_1 + x_2 = 0\} \oplus \big\{[2 \cdot x] \;\big|\; x \in \mathbb{Z}\big\} \subset \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

   durch.

2. Gehen Sie den Beweis von Korollar 2.5.2 Schritt für Schritt im Falle des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^{2017} \oplus \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ durch.

Aufgabe 2 (Elementarteiler)**.** Bestimmen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} 10 \cdot T & 5 \cdot T^2 + 5 \cdot T \\ -15 \cdot T^2 & 5 \cdot T^3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}\big(\mathbb{Q}[T]\big)$$

$$\begin{pmatrix} T & T+1 \\ T^2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}\big(\mathbb{F}_2[T]\big)$$

Aufgabe 3 (lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}$)**.**

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$-x_1 + 2017 \cdot x_3 = 0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 = 42.$$

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = 5 \quad \text{und} \quad 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 = 2.$$

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Fassen Sie alles zusammen, was Sie bereits über Moduln zu Endomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen wissen.

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 11 vom 3. Juli 2017

Aufgabe 1 (Minimalpolynome)**.** Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom der folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie auch jeweils eine Zerlegung des zugehörigen $\mathbb{C}[T]$-Moduls in zyklische Moduln zu Primpolynompotenzen an.

Aufgabe 2 (mehr Minimalpolynome)**.** Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom der folgenden Matrizen in $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen Zusammenhang zwischen manchen dieser Polynome? Formulieren Sie eine Vermutung!

Aufgabe 3 (noch mehr Minimalpolynome)**.** Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen in $M_{5\times 5}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Fällt Ihnen ein Zusammenhang zwischen dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom auf? Formulieren Sie eine Vermutung!

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung über das Kapitel über Moduln über Hauptidealringen. Was sind die wichtigsten Begriffe, Beispiele, Sätze, Techniken?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 12 vom 10. Juli 2017

Aufgabe 1 (Jordansche Normalform: 2×2)**.** Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$$

in $M_{2\times2}(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2 (Jordansche Normalform: 3×3)**.** Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&2\\0&0&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

in $M_{3\times3}(\mathbb{C})$.

1. Verwenden Sie dazu zunächst stur das Verfahren aus der Vorlesung.
2. In einem zweiten Durchlauf sollten Sie versuchen, möglichst viele Abkürzungen zu finden und die Jordansche Normalform mit minimalem Rechenaufwand bestimmen!

Aufgabe 3 (Jordansche Normalformen?)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob es Matrizen $A \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften gibt oder nicht:

1. Es gilt $\operatorname{tr} A = 0$ und $(T-2)\cdot(T+4)$ ist ein Teiler von μ_A.
2. Es gilt $\operatorname{tr} A = 0$ und $(T-2)\cdot(T-2)\cdot(T+4)$ ist ein Teiler von μ_A.
3. Es gilt $\operatorname{tr} A = 0$ und $(T-2)\cdot(T+2)\cdot(T+4)$ ist ein Teiler von μ_A.
4. Es gilt $\det A = i$ und T ist ein Teiler von μ_A.

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Wiederholen Sie die Themen Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit, darstellende Matrizen aus der Linearen Algebra I und schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung dazu.

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 13 vom 17. Juli 2017

Aufgabe 1 (Tensoren)**.** Welche der folgenden Gleichheiten gelten in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$?

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
2. $2016 \cdot e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 = e_1 \otimes (e_1 + 2017 \cdot e_2)$
3. $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$
4. $e_1 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1$

Aufgabe 2 (Abbildungen auf Tensorprodukten)**.** Sei K ein Körper. Welche der folgenden Abbildungen $K^3 \otimes_K K^3 \longrightarrow K$ sind wohldefiniert?

1. $v \otimes w \longmapsto 0$
2. $v \otimes w \longmapsto v + w$
3. $v \otimes w \longmapsto v$
4. $v \otimes w \longmapsto v_1 \cdot w_3 - v_2 \cdot w_1$

Aufgabe 3 (Tensorproduktbaukasten)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden Vektorräume sind in dieser Situation immer isomorph zueinander? Welche im allgemeinen nicht?

$$V^* \otimes_K V, \quad K \otimes_K (V \otimes_K K), \quad \mathrm{Hom}_K(K, V \otimes_K V), \quad (V \otimes_K V) \oplus (K \otimes_K K)$$

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung über das Kapitel über die Jordansche Normalform. Was sind die wichtigsten Begriffe, Beispiele, Sätze, Techniken?

---

keine Abgabe!

Fingerübungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — Blatt 14 vom 24. Juli 2017

Aufgabe 1 (äußere Produkte)**.** Welche der folgenden Gleichheiten gelten im äußeren Produkt $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$?

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
2. $2016 \cdot e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_1 = e_1 \wedge (e_1 + 2017 \cdot e_2)$
3. $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$
4. $e_1 \wedge e_2 = e_2 \wedge e_1$

Aufgabe 2 (Abbildungen auf äußeren Produkten)**.** Sei K ein Körper. Welche der folgenden Abbildungen $\bigwedge^2(K^3) \longrightarrow K$ sind wohldefiniert?

1. $v \wedge w \longmapsto v + w$
2. $v \wedge w \longmapsto v$
3. $v \wedge w \longmapsto v_1 \cdot w_3 - v_2 \cdot w_1$
4. $v \wedge w \longmapsto v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1$

Aufgabe 3 (Äußerer-Produkt-Baukasten)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden Vektorräume sind in dieser Situation immer isomorph zueinander? Welche im allgemeinen nicht?

$$\bigwedge^2(V^*), \quad V \otimes_K V, \quad \operatorname{Hom}_K(K, \bigwedge^2 V), \quad (\bigwedge^3 V)^*, \quad \bigoplus_{j=1}^{1/2 \cdot \dim_K V \cdot (\dim_K V - 1)} K$$

Aufgabe 4 (Wiederholung)**.** Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung über das Kapitel über multilineare Algebra. Was sind die wichtigsten Begriffe, Beispiele, Sätze, Techniken?

---

keine Abgabe!

D
Allgemeine Hinweise

Lineare Algebra II im SS 2017
Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig April 2017

Homepage. Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/linalg2_ss17

https://elearning.uni-regensburg.de

Vorlesung. Die Vorlesung findet jeweils montags (10:15–12:00; H 32) und donnerstags (10:15–12:00; H 32) statt.

Es wird ein (Kurz)Skript zur Vorlesung geben, das eine Übersicht über die wichtigsten Themen der Vorlesung enthält. Dieses Skript wird jeweils auf den obigen Homepages aktualisiert. Beachten Sie bitte, dass dieses Kurzskript keineswegs geeignet ist, den Besuch der Vorlesung oder der Übungen zu ersetzen!

Übungen. Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich donnerstags spätestens um 10:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum Donnerstag eine Woche später um 10:00 Uhr in die entsprechenden Briefkästen in der Mathematik abzugeben.

Auf jedem Übungsblatt gibt es vier reguläre Aufgaben (je 4 Punkte) und herausforderndere Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte).

Sie dürfen (und sollen) die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden (andernfalls werden die Punkte aberkannt). Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen an der Tafel zu präsentieren (andernfalls werden die Punkte aberkannt).

Die Übungen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen wird das Einführungsblatt, Blatt 0, besprochen.

Zentralübung. Zusätzlich zur Vorlesung und den Übungen bietet die Zentralübung die Gelegenheit, Fragen zu stellen und den Stoff der Vorlesung zu wiederholen und zu vertiefen. Die Zentralübung findet jeweils montags (14:15–16:00; H 32) statt und wird von Daniel Fauser und Johannes Witzig geleitet; die Zentralübung beginnt in der *ersten* Vorlesungswoche.

Außerdem werden wir auf der Homepage Fingerübungen anbieten, mit denen grundlegende Begriffe, Handgriffe und Rechentechniken eingeübt werden können. Diese Aufgaben werden nicht abgegeben bzw. korrigiert.

Einteilung in die Übungsgruppen. Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über GRIPS:

https://elearning.uni-regensburg.de

Sie können sich bis Mittwoch, den 26. April 2017, um 10:00 Uhr für die Übungen anmelden; Sie können dort Ihre Präferenzen für die Übungstermine auswählen und wir werden versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Bitte beachten Sie jedoch, dass es sein kann, dass wir nicht alle Wünsche erfüllen können.

Falls Sie noch keine Kennung des Rechenzentrums haben, wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser oder Johannes Witzig.

Die endgültige Einteilung der Übungsgruppen wird spätestens am Freitag, den 28. April 2017, in GRIPS bekanntgegeben. Ein Wechsel in volle Übungsgruppen ist dann nur durch Tausch mit einem Tauschpartner möglich.

Bei Fragen zur Einteilung der Übungsgruppen und zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser (daniel.fauser@ur.de) oder Johannes Witzig (johannes.witzig@ur.de).

Leistungsnachweise. Diese Vorlesung kann wie in den einzelnen Modulkatalogen spezifiziert in die Studiengänge eingebracht werden.

- *Studienleistung*: Regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen, mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen.
- *Prüfungsleistung (für den Leistungsnachweis zur Linearen Algebra II)*: Zweistündige Klausur (s.u.). Die Modulnote ergibt sich wie im jeweiligen Modulkatalog angegeben.

Im *Bachelorstudiengang Mathematik* ist für das Modul BGLA zusätzlich noch eine (mündliche) Modulabschlussprüfung über die Inhalte der Vorlesungen Lineare Algebra I und II abzulegen. Details zu diesen Prüfungen werden am Ende der Linearen Algebra II bekanntgegeben.

Klausur. Die Klausur findet am Dienstag, den 1. August 2017, von 9:00 bis 11:00 Uhr, statt. Die Wiederholungsklausur ist voraussichtlich am Ende der Semesterferien; der genaue Termin wird so bald wie möglich bekanntgegeben.

Sie müssen sich in FlexNow für die Studienleistung und die Prüfungsleistung anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig. Wir werden rechtzeitig Einträge in FlexNow vorbereiten. Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/studierende-und-studienanfaenger/index.html

Hinweise für Wiederholer. Studenten, die bereits in einem vorangegangenen Semester die Klausurzulassung erhalten haben, aber im entsprechenden Semester die Klausur nicht bestanden haben oder nicht an der Klausur teilgenommen haben, können mit dieser Zulassung auch an den oben genannten Klausurterminen teilnehmen. Informieren Sie sich rechtzeitig über den Stoffumfang dieser Vorlesung (z.B. über das Kurzskript). Außerdem kann es je nach Kenntnisstand sinnvoll sein, nochmal an den Übungen oder der Vorlesung teilzunehmen.

Für den Drittversuch besteht alternativ zur Klausur auch wahlweise die Möglichkeit, die Prüfung als mündliche Prüfung abzulegen.

Falls Sie an den Übungen teilnehmen möchten, ohne dass Ihre Lösungen korrigiert werden sollen, schreiben Sie bitte eine email an Daniel Fauser oder Johannes Witzig mit Ihren Wunschterminen (damit die Übungsgruppen einigermaßen gleichmäßig besucht sind).

Ansprechpartner.

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an Daniel Fauser oder Johannes Witzig (Büro M 205):

  daniel.fauser@ur.de
  johannes.witzig@ur.de

- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder an Daniel Fauser oder Johannes Witzig.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Daniel Fauser, Johannes Witzig oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung oder das zuständige Prüfungsamt:

http://www.uni-regensburg.de/mathematik/fakultaet/studium/ansprechpersonen/index.html

Bei vielen Fragen kann Ihnen auch die Fachschaft weiterhelfen:

http://www-cgi.uni-regensburg.de/Studentisches/FS_MathePhysik/cmsms/

Lineare Algebra II im SS 2017
Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig April 2017

Ziel der Prüfungsvorbereitung. Hauptziel der Prüfungsvorbereitung ist die souveräne Beherrschung des behandelten Fachgebiets. Die Prüfung sichert ab, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist aber nicht das eigentliche inhaltliche Ziel der Vorlesung.

Beherrscht werden sollten also:

- aktive Kenntnis der Fachbegriffe und Formalisierungsmethoden
- Verständnis der Ideen, die zu diesen Fachbegriffen und Formalisierungen führen
- wichtige Probleme und Fragestellungen, die das Gebiet maßgeblich beeinflusst haben bzw. die durch das Gebiet gelöst werden können
- wichtige Resultate und Zusammenhänge innerhalb des Gebiets
- wichtige Beweis- und Lösungsstrategien
- repräsentative Beispiele
- Anwendungen des Gebiets und Interaktion mit anderen Gebieten
- Fähigkeit, auf all diesen Kenntnissen weiter aufzubauen.

Erreichen dieses Ziels. Während der Vorlesungszeit:

- aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben
- Erlernen des Fachwissens (Definitionen, Sätze), notfalls mit Karteikarten
- weiteres aktives Üben mit zusätzlichen Aufgaben und Vertiefung der Kenntnisse durch Selbststudium (Bibliothek!)
- Bei Fragen: Betreuungsangebote nutzen!

Kurz vor der Prüfung:

- Kann ich mein Wissen präzise und verständlich präsentieren? (Das kann man einfach an anderen Kommilitonen ausprobieren ...)
- Was könnten typische Prüfungsfragen sein? Was sind gute Lösungen zu diesen Fragen?
- Wie belastbar sind meine Fähigkeiten? Was muss ich noch verbessern?

Bewertungskriterien. In der Prüfung werden folgende Fähigkeiten abgeprüft:

- Fachwissen (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Anschauung, Zusammenhänge, Anwendungen, ...)
- präzises und korrektes, logisch schlüssiges, Formulieren und Argumentieren
- Lösen von Standardproblemen
- Kreativität bei der Lösung von Problemen

Viel Erfolg bei der Prüfung!

Lineare Algebra II im SS 2017
Hinweise zu den Übungsaufgaben

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig April 2017

Ziel der Übungsaufgaben. Ziel der Übungsaufgaben ist, sich aktiv mit den behandelten Definitionen, Sätzen, Beispielen und Beweistechniken auseinanderzusetzen und zu lernen, damit umzugehen.

Wie bearbeitet man eine Übungsaufgabe?

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung an dem Tag, an dem das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch. Kennen Sie alle auftretenden Begriffe? Verstehen Sie, was in den Aufgaben verlangt wird?
- Was sind die Voraussetzungen? Was ist zu zeigen? Wie könnten diese Dinge zusammenhängen? Gibt es Sätze aus der Vorlesung, die auf diese Situation passen?
- Welche Lösungsstrategien bzw. Beweisstrategien passen auf die Aufgabe? Kann man einfach direkt mit den Definitionen arbeiten und so zum Ziel gelangen?
- Ist die Aufgabe plausibel? Versuchen Sie die behaupteten Aussagen, an einfachen Beispielen nachzuvollziehen!
- Falls Sie die Aufgabe unplausibel finden, können Sie versuchen, sie zu widerlegen und untersuchen, woran dieses Vorhaben scheitert.
- Kann man die Situation durch eine geeignete Skizze graphisch darstellen?
- Versuchen Sie, das Problem in kleinere Teilprobleme aufzuteilen. Können Sie diese Teilprobleme lösen?
- Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuexperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit den Begriffen und Sätzen auseinandersetzen.
- Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!

Wie schreibt man eine Lösung auf?

- Gliedern Sie Ihre Lösung sauber in Voraussetzung, Behauptung und Beweis.
- Teilen Sie Ihre Beweise in sinnvolle Zwischenschritte auf.

- Achten Sie darauf, dass Sie verständlich formulieren und dass die Argumente logisch aufeinander aufbauen.
- Ist Ihre Argumentationskette wirklich lückenlos? Seien Sie misstrauisch gegenüber Ihrer eigenen Lösung und versuchen Sie, alle potentiellen Schwachpunkte ausfindig zu machen!
- Wenn Sie einzelne Beweisschritte nicht vollständig durchführen können, können Sie in Ihrer Lösung darauf hinweisen – die restliche Lösung kann trotzdem Punkte erhalten!
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Bezeichner einführen und dass Sie mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt verwenden.
- Versuchen Sie, sich so präzise wie möglich auszudrücken!
- Versuchen Sie, indirekte Argumente so weit wie möglich zu vermeiden.
- Überprüfen Sie am Ende, ob Sie wirklich das bewiesen haben, was Sie ursprünglich behauptet haben.
- Oft ist es auch hilfreich zu überprüfen, ob/wie alle in der Aufgabe gegebenen Voraussetzungen verwendet wurden.
- Würden Sie Ihre Lösung verstehen, wenn Sie sie zum ersten Mal lesen würden?
- Alles, was Sie abgeben, müssen Sie eigenständig formuliert und auch verstanden haben.
- Geben Sie Literaturangaben an, wenn Sie zusätzliche Quellen verwendet haben.

Bewertungskriterien. Bei der Bewertung der abgegebenen Lösungen wird auf folgendes geachtet:

- Wurde die gestellte Aufgabe vollständig gelöst?
- Wurden Voraussetzung, Behauptung, Beweis deutlich voneinander getrennt?
- Stimmen die Voraussetzungen? Sind sie sauber formuliert?
- Stimmen die Behauptungen/Zwischenbehauptungen? Sind sie sauber formuliert?
- Ist die Argumentationskette der Beweisschritte vollständig?
- Sind die Beweisschritte präzise formuliert und verständlich?
- Sind alle Bezeichner eingeführt?
- Werden mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt eingesetzt?
- Ist an jeder Stelle des Beweises klar, was passiert?
- Werden die neu erlernten Begriffe und Techniken passend eingesetzt?

Viel Erfolg und viel Spass bei den Übungen!

Literaturverzeichnis

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, dritte Auflage, Springer, 2004. Zitiert auf Seite: 79

[2] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-8348-9599-8 Zitiert auf Seite:

[3] S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014. Zitiert auf Seite: 95, 101, 128

[4] M. Brandenburg. *Einfhrung in die Kategorientheorie: Mit ausfhrlichen Erklrungen und zahlreichen Beispielen*, Springer-Spektrum, 2015. Zitiert auf Seite: A 5

[5] K. Jänich. *Lineare Algebra*, 11. Auflage, Springer, 2013. Zitiert auf Seite:

[6] K. Jänich. *Vektoranalysis*, fünfte Auflage, Springer, 2005. Zitiert auf Seite: 164, A 17

[7] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek. *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, Band 157, Springer, 2004. Zitiert auf Seite: 98

[8] C. Löh. *Geometrie*, Vorlesungsskript (SS 2016), Universität Regensburg, 2016.
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie_ss16/lecture_notes.pdf
Zitiert auf Seite: 13, 16

[9] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998. Zitiert auf Seite: A 5

[10] J. Matoušek. *Thirty-three Miniatures. Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra.* AMS Student Mathematical Library, Band 53, AMS, 2010. Zitiert auf Seite: 150

[11] S.D. Schoen. Understanding Common Factor Attacks: An RSA-Cracking Puzzle http://www.loyalty.org/∼schoen/rsa/ Zitiert auf Seite: 86