Wiederholungsklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 5. Oktober 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so gilt für alle $x \in V$, dass $U^\perp = (x+U)^\perp$.
2. Sind $A, B \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, so ist $A \cdot B \in \mathrm{SO}(2)$.
3. Die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ ist abelsch.

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gilt $2 \cdot \mathbb{Z} \cap 7 \cdot \mathbb{Z} = 14 \cdot \mathbb{Z}$.
2. Sind $p, q \in \mathbb{F}_2[T]$ prim, so ist auch $p + q$ prim in $\mathbb{F}_2[T]$.
3. Es gilt $\mathbb{Q}[T]/(T^2 + 2 \cdot T + 1) \cong_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T + 1) \oplus \mathbb{Q}[T]/(T + 1)$.

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ ein Ringhomomorphismus mit $f(T^2) = T^2$, so gilt $f(T^3) = T^3$.

2. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[T]/(T) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1) &\longrightarrow \mathbb{R}[T]/(T^2+T) \\ \big([f],[g]\big) &\longmapsto \big[(T+1)\cdot f - T\cdot g\big] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter $\mathbb{R}[T]$-Modulhomomorphismus.

3. Ist K ein Körper, so liefert folgendes eine wohldefinierte K-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} K \otimes_K K^2 &\longrightarrow K \\ x \otimes \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto x\cdot y - x\cdot z \end{aligned}$$

Aufgabe 4 ($1 + 5 + 3 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie sind Hauptidealringe definiert?
2. Formulieren Sie den Elementarteilersatz für Matrizen.
3. Wie geht der Elementarteilersatz für Matrizen bei der Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen ein?

Aufgabe 5 $(4+2+3=9$ Punkte$)$**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Gilt $A^{2017} = 2 \cdot A^{2016}$? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.
3. Ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$-irreduzibler $\mathbb{C}$-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 $(3+3+3=9$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 3\cdot x_1\cdot y_1 + x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1 + 3\cdot x_2\cdot y_2. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass f ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dem Skalarprodukt f.
3. Bestimmen Sie Hauptachsen (bezüglich $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2$) für die Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,x) = 2\}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Zeigen Sie: Gibt es eine injektive K-lineare Abbildung $U \longrightarrow V$, so gibt es auch eine injektive K-lineare Abbildung $U \otimes_K W \longrightarrow V \otimes_K W$.