Wiederholungsklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — 5. Oktober 2017

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

– Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.

– Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so gilt für alle $x \in V$, dass $U^\perp = (x+U)^\perp$.
2. Sind $A, B \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, so ist $A \cdot B \in \mathrm{SO}(2)$.
3. Die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ ist abelsch.

Lösung:

1. Diese Aussage ist falsch, denn: Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle) := (\mathbb{R}, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2)$ und $U := \{0\} \subset \mathbb{R}$, $x := 1$. Dann ist $U^\perp = \{0\}^\perp = \mathbb{R}$, aber
$$(x+U)^\perp = \{1\}^\perp = \{0\}.$$
2. Diese Aussage ist wahr, denn: Seien $A, B \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$. Da $\mathrm{O}(2)$ eine Gruppe ist, ist $A \cdot B \in \mathrm{O}(2)$. Wegen $A, B \notin \mathrm{SO}(2)$ gilt $\det A = -1 = \det B$, und damit
$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = (-1) \cdot (-1) = 1.$$
Also ist $A \cdot B \in \mathrm{SO}(2)$.
3. Diese Aussage ist falsch, denn: Seien etwa
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dann sind $A, B \in \mathrm{SO}(3)$, aber
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \dots & & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \dots & & \\ 0 & & \\ & & \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gilt $2 \cdot \mathbb{Z} \cap 7 \cdot \mathbb{Z} = 14 \cdot \mathbb{Z}$.
2. Sind $p, q \in \mathbb{F}_2[T]$ prim, so ist auch $p + q$ prim in $\mathbb{F}_2[T]$.
3. Es gilt $\mathbb{Q}[T]/(T^2 + 2 \cdot T + 1) \cong_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T + 1) \oplus \mathbb{Q}[T]/(T + 1)$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Wegen $14 = 2 \cdot 7$ folgt $14 \cdot \mathbb{Z} \subset 2 \cdot \mathbb{Z}$ und $14 \cdot \mathbb{Z} \subset 7 \cdot \mathbb{Z}$, und damit $14 \cdot \mathbb{Z} \subset 2 \cdot \mathbb{Z} \cap 7 \cdot \mathbb{Z}$.

   Sei umgekehrt $x \in 2 \cdot \mathbb{Z} \cap 7 \cdot \mathbb{Z}$, d.h. $2 \mid x$ und $7 \mid x$. Daher ist auch „das“ kleinste gemeinsame Vielfache 14 von 2 und 7 ein Teiler von x. Also ist $x \in 14 \cdot \mathbb{Z}$.

2. Diese Aussage ist falsch, denn: Das Polynom $T \in \mathbb{F}_2[T]$ ist irreduzibel und damit prim (da $\mathbb{F}_2[T]$ ein Hauptidealring ist). Aber $T + T = 0 \in \mathbb{F}_2[T]$ ist *nicht* prim.

3. Diese Aussage ist falsch, denn: Es ist

$$\mathbb{Q}[T]/(T^2 + 2 \cdot T + 1) \cong_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/((T + 1)^2)).$$

   Da $T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ prim ist, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (in diesem Fall $\mathbb{Q}[T]$), dass

$$\mathbb{Q}[T]/((T + 1)^2)) \ncong_{\mathbb{Q}[T]} \mathbb{Q}[T]/(T + 1) \oplus \mathbb{Q}[T]/(T + 1).$$

   [Alternativ kann man auch zeigen, dass auf der rechten Seite alle Elemente $(T + 1)$-Torsion sind, nicht aber auf der linken Seite.]

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ ein Ringhomomorphismus mit $f(T^2) = T^2$, so gilt $f(T^3) = T^3$.
2. Es ist
$$\begin{aligned} \mathbb{R}[T]/(T) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1) &\longrightarrow \mathbb{R}[T]/(T^2+T) \\ \big([f],[g]\big) &\longmapsto \big[(T+1)\cdot f - T\cdot g\big] \end{aligned}$$
ein wohldefinierter $\mathbb{R}[T]$-Modulhomomorphismus.
3. Ist K ein Körper, so liefert folgendes eine wohldefinierte K-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} K \otimes_K K^2 &\longrightarrow K \\ x \otimes \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto x\cdot y - x\cdot z \end{aligned}$$

Lösung:

1. Diese Aussage ist falsch, denn: Sei $f\colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ der eindeutig bestimmte $\mathbb{Q}$-Algebrenhomomorphismus (insbesondere Ringhomomorphismus) mit
$$f(T) = -T.$$
Dann ist $f(T^2) = f(T)\cdot f(T) = (-T)\cdot(-T) = T^2$, aber
$$f(T^3) = \big(f(T)\big)^3 = (-T)^3 = -T^3 \neq T^3.$$
2. Diese Aussage ist wahr, denn: Dies ergibt sich wegen
$$1\cdot(T+1) + (-1)\cdot T = 1$$
aus dem Chinesischen Restsatz.

   [Alternativ kann man auch von Hand nachrechnen, dass es sich um einen wohldefinierten $\mathbb{R}[T]$-Modulhomomorphismus handelt.]
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Die Abbildung
$$\begin{aligned} K \times K^2 &\longrightarrow K \\ \left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) &\longmapsto x\cdot y - x\cdot z \end{aligned}$$
ist K-bilinear. Mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts folgt somit die Behauptung.

Aufgabe 4 (1 + 5 + 3 = 9 Punkte)**.**

1. Wie sind Hauptidealringe definiert?
2. Formulieren Sie den Elementarteilersatz für Matrizen.
3. Wie geht der Elementarteilersatz für Matrizen bei der Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen ein?

Lösung:

1. *Definition.* Ein *Hauptidealring* ist ein Integritätsring, in dem alle Ideale Hauptideale sind.
2. *Der Elementarteilersatz für Matrizen.* Sei R ein Hauptidealring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{m\times n}(R)$.
   (a) Dann gibt es Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$, $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass
   $$B := S \cdot A \cdot T$$
   in Smith-Normalform ist.
   (b) Für die Elementarteiler $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ von B gilt:
   $$\forall_{k\in\{1,\dots,\min(m,n)\}} \quad D_k(A) = \begin{cases} (\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k) & \text{falls } k \leq r \\ \{0\} & \text{falls } k > r. \end{cases}$$
   Insbesondere sind r und die Elementarteiler von B (bis auf Assoziiertheit) eindeutig durch A bestimmt; man bezeichnet sie daher auch als *Elementarteiler von* A.
3. Sei R ein Hauptidealring und sei V ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ mit
   $$V \cong_R R^n / \operatorname{im} L(A).$$
   Man wendet nun den Elementarteilersatz für Matrizen auf die Matrix A an. Ohne Einschränkung kann man somit annehmen, dass A bereits in Smith-Normalform ist. Daraus erhält man eine Zerlegung von V als direkte Summe von endlich vielen zyklischen R-Moduln.

   (Danach fährt man dann mit Primfaktorzerlegung und dem Chinesischen Restsatz fort, um die gewünschte Normalform zu erhalten.)

Aufgabe 5 $(4+2+3=9$ Punkte$)$**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Gilt $A^{2017} = 2 \cdot A^{2016}$? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.
3. Ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$-irreduzibler $\mathbb{C}$-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Nein, denn: Dazu bestimmen wir das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{C}[T]$ von A. Als ersten Schritt berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[T]$ von A: Nach Definition ist
$$\chi_A = \det(T \cdot I_3 - A) = T \cdot (T-2)^2 \in \mathbb{C}[T].$$
Mit dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $\mu_A = T \cdot (T-2)$ oder $\mu_A = T \cdot (T-2)^2$. Wegen
$$\big(T \cdot (T-2)\big)(A) = A^2 - 2 \cdot A \neq 0$$
ist $\mu_A = T \cdot (T-2)^2$.
Sei nun $p := T^{2017} - 2 \cdot T^{2016} \in \mathbb{C}[T]$. Dann gilt genau dann $p(A) = 0$, wenn $A^{2017} = 2 \cdot A^{2016}$ ist. *Angenommen*, es wäre $p(A) = 0$. Dann wäre das Minimalpolynom μ_A ein Teiler von p in $\mathbb{C}[T]$. Wegen
$$p = T^{2017} - 2 \cdot T^{2016} = T^{2016} \cdot (T-2)$$
und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung im Hauptidealring $\mathbb{C}[T]$ folgt aber $\mu_A \nmid p$. Also ist $p(A) \neq 0$.
[Alternativ kann man zuerst die Jordansche Normalform bestimmen und dann über den Konjugationstrick argumentieren.]
2. Aus dem ersten Teil wissen wir bereits, dass $\mu_A = T \cdot (T-2)^2 = \chi_A$. Insbesondere ist $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{0, 2\}$ und die Jordan-Normalform von A enthält mindestens einen Jordanblock der Größe 1 zum Eigenwert 0 und einen Jordanblock der

Größe 2 zum Eigenwert 2. Da A eine 3×3-Matrix ist, ist kein Platz für weitere Jordanblöcke. Also ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Jordan-Normalform von A.

3. Nein, denn: Die Jordanblöcke der Jordanschen Normalform von A liefern zueinander komplementäre $L(A)$-invariante Unterräume von $\mathbb{C}^3$. Also ist $\mathbb{C}^3$ *nicht* $L(A)$-irreduzibel.

Aufgabe 6 ($3 + 3 + 3 = 9$ Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 3 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + 3 \cdot x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass f ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dem Skalarprodukt f.
3. Bestimmen Sie Hauptachsen (bezüglich $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$) für die Quadrik

$$\bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x, x) = 2\bigr\}.$$

Lösung:

1. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$
Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$, dass
$$f(x, y) = x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot y.$$
Insbesondere ist f bilinear. Da die Matrix A symmetrisch ist, ist auch f symmetrisch. Um zu zeigen, dass f positiv definit ist, genügt es zu zeigen, dass A positiv definit ist. Wegen
$$\chi_A = \det(T \cdot I_2 - A) = (T - 4) \cdot (T - 2)$$
ist $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 4\}$; also ist A positiv definit.
[Alternativ kann man die positive Definitheit von A auch mit dem Hauptminorenkriterium nachweisen.]
[Alternativ kann man positive Definitheit von f auch durch direktes Nachrechnen verifizieren.]
2. Wir wenden das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf die Basis $(v_1, v_2) := (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und das Skalarprodukt f an; dabei schreiben wir $\|\cdot\|$ für die von f induzierte Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Sei

$$w_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{f(e_1, e_1)}} \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\widetilde{w}_2 := v_2 - f(w_1, v_2) \cdot w_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$w_2 := \frac{1}{\|\widetilde{w}_2\|} \cdot \widetilde{w}_2 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt ist dann (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich f.

[Alternativ kann man auch leicht von Hand einen Vektor finden, der mit w_1 zusammen eine f-Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bildet.]

3. Sei
$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, x) = 2 \right\} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\mathsf{T} \cdot A \cdot x = 2 \}.$$
Hauptachsen von Q ergeben sich also aus einer Orthogonalbasis (bzgl. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$) von Eigenvektoren von A.

Wegen

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_2 = 0$$

sind also $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Hauptachsen für Q.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Zeigen Sie: Gibt es eine injektive K-lineare Abbildung $U \longrightarrow V$, so gibt es auch eine injektive K-lineare Abbildung $U \otimes_K W \longrightarrow V \otimes_K W$.

Lösung: Sei $f\colon U \longrightarrow V$ eine injektive K-lineare Abbildung.

Dann gibt es eine K-lineare Abbildung $g\colon V \longrightarrow U$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_U$, denn: Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von U. Dann ist $(f(v_i))_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie in V (da f injektiv ist). Wir ergänzen diese Familie zu einer Basis B von V. Nun definieren wir $g\colon V \longrightarrow U$ mithilfe der universellen Eigenschaft von Basen, indem wir

$$g\bigl(f(v_i)\bigr) := v_i$$

für alle $i \in I$ und

$$g(w) := 0$$

für alle w in B, die nicht im Bild von f liegen, setzen. Nach Konstruktion gilt dann $g \circ f = \mathrm{id}_U$ (da dies auf der Basis $(v_i)_{i\in I}$ von U zutreffend ist).

Wir betrachten nun die K-linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} F := f \otimes_K \mathrm{id}_W \colon U \otimes_K W &\longrightarrow V \otimes_K W \\ u \otimes w &\longmapsto f(u) \otimes w \\ G := g \otimes_K \mathrm{id}_W \colon V \otimes_K W &\longrightarrow U \otimes_K W \\ v \otimes w &\longmapsto g(v) \otimes w \end{aligned}$$

mithilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts. Dann gilt $G \circ F = \mathrm{id}_{U\otimes_K W}$, denn: Es genügt diese Aussage auf Elementartensoren nachzuweisen (da diese ein Erzeugendensystem bilden); für alle $u \in U$ und alle $w \in W$ gilt nach Konstruktion

$$G \circ F(u \otimes w) = G\bigl(f(u) \otimes w\bigr) = g(f(u)) \otimes w = u \otimes w.$$

Also ist $G \circ F = \mathrm{id}_{U\otimes_K W}$. Insbesondere ist F injektiv.

[Alternativ kann man auch über Dimensionen argumentieren; dabei ist jedoch Vorsicht geboten, da nicht vorausgesetzt ist, dass die beteiligten Vektorräume endlichdimensional sind. Etwas Sattelfestigkeit mit unendlichen Mächtigkeiten ist für eine solche Lösung also notwendig.]