# Probeklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig 24. Juli 2017

---

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

---

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

*Viel Erfolg!*

---

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte maximal | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 6 | 60 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | |

Note: Unterschrift:

**Aufgabe 1** (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und ist $x \in V$ mit $x \perp 2017 \cdot x$, so folgt $x = 0$.

2. Ist $A \in \mathrm{O}(2)$, so ist $L(A)$ eine Drehung um 0.

3. Ist $A \in \mathrm{SO}(3)$, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $A \cdot x = x$.

**Aufgabe 2** (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für jeden Körper $K$ gilt $K[T]/(T^2+T) \cong_{K[T]} K[T]/(T) \oplus K[T]/(T+1)$.
2. Ist $V$ ein $\mathbb{Z}$-Modul und $x \in V$ mit $2017 \cdot x = 0$, so folgt $x = 0$.
3. Sind $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ mit $\det A = \det B$, so haben $A$ und $B$ dieselben Elementarteiler über $\mathbb{Z}$.

**Aufgabe 3** (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{C}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ mit $f(T^2) = T^3$.
2. Folgendes liefert eine wohldefinierte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ ([x],[y]) &\longmapsto [x] \end{aligned}$$
3. Folgendes liefert eine wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \otimes y &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** $(1 + 3 + 4 + 1 = 9$ Punkte$)$.

1. Wie lautet die Definition selbstadjungierter Endomorphismen?
2. Formulieren Sie den Spektralsatz.
3. Skizzieren Sie die wesentlichen Schritte des Beweises des Spektralsatzes im unitären Fall.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Spektralsatzes.

**Aufgabe 5** ($3+3+3=9$ Punkte)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $A$.
2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $A$.
3. Ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$-zyklischer Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 6** $(5 + 2 + 2 = 9$ Punkte$)$**.** Sei

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Bestimmen Sie Hauptachsen für die Quadrik $Q$.
2. Skizzieren Sie die Quadrik $Q$.
3. Zeigen Sie, dass es ein $x \in Q$ mit $\|x\|_2 \geq 2017$ gibt.

**Aufgabe 7** (6 Punkte)**.** Sei $K$ ein Körper, seien $V$, $W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $f\colon V \otimes_K W \longrightarrow K$ eine lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} &\forall_{v \in V \setminus \{0\}} \quad \exists_{w \in W} \quad f(v \otimes w) \neq 0 \\ &\forall_{w \in W \setminus \{0\}} \quad \exists_{v \in V} \quad f(v \otimes w) \neq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann $V \cong_K W$ gilt.