Probeklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/D. Fauser/J. Witzig — 24. Juli 2017

Name: — Vorname:

Matrikelnummer: □□□□□□□ — Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	9	9	9	9	9	9	6	60
erreichte Punkte								

Note: — Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und ist $x \in V$ mit $x \perp 2017 \cdot x$, so folgt $x = 0$.
2. Ist $A \in \mathrm{O}(2)$, so ist $L(A)$ eine Drehung um 0.
3. Ist $A \in \mathrm{SO}(3)$, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $A \cdot x = x$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Aus $x \perp 2017 \cdot x$ folgt
$$0 = \langle x, 2017 \cdot x\rangle = 2017 \cdot \langle x, x\rangle,$$
und damit $\langle x, x\rangle = 0$ bzw. $x = 0$ (positive Definitheit).
2. Diese Aussage ist falsch, denn: Es ist
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2),$$
aber wegen $\det A = -1$ ist $L(A) \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *keine* Drehung um 0 (Drehungen sind orientierungserhaltend!).
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Ist $A \in \mathrm{SO}(3)$, so ist $L(A) \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Drehung um eine Gerade g in $\mathbb{R}^3$. Insbesondere gilt für alle Punkte x auf dieser Geraden, dass $A \cdot x = x$. Wegen $g \neq \{0\}$ gibt es dann auch ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $A \cdot x = x$.

Aufgabe 2 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für jeden Körper K gilt $K[T]/(T^2+T) \cong_{K[T]} K[T]/(T) \oplus K[T]/(T+1)$.
2. Ist V ein $\mathbb{Z}$-Modul und $x \in V$ mit $2017 \cdot x = 0$, so folgt $x = 0$.
3. Sind $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ mit $\det A = \det B$, so haben A und B dieselben Elementarteiler über $\mathbb{Z}$.

Lösung:

1. Diese Aussage ist wahr, denn: Es ist $K[T]$ ein faktorieller Ring und da 1 der größte gemeinsame Teiler von T und $T+1$ in $K[T]$ ist (Primfaktorzerlegung!), ist der chinesische Restsatz anwendbar. Damit folgt
$$K[T]/(T) \oplus K[T]/(T+1) \cong_{K[T]} K[T]/(T \cdot (T+1)) = K[T]/(T^2+T).$$
2. Diese Aussage ist falsch, denn: Sei $V := \mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ und $x := [1] \in V$. Dann ist $x \neq 0$, aber in $\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z}$ gilt
$$2017 \cdot x = 2017 \cdot [1] = [2017 \cdot 1] = [0] = 0.$$
3. Diese Aussage ist falsch, denn: Sei
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$
Dann sind A und B in Smith-Normalform und man liest leicht ab, dass die Elementarteiler von A und B *nicht* übereinstimmen (auch nicht bis auf Assoziiertheit). Aber es gilt
$$\det A = 0 = \det B.$$

Aufgabe 3 (3+3+3 = 9 Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{C}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ mit $f(T^2) = T^3$.
2. Folgendes liefert eine wohldefinierte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ ([x],[y]) &\longmapsto [x] \end{aligned}$$
3. Folgendes liefert eine wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung:
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \otimes y &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Lösung:

1. Diese Aussage ist falsch, denn: *Angenommen,* es gäbe einen solchen Ringhomomorphismus f. Sei $g := f(T) \in \mathbb{C}[T]$. Dann ist
$$T^3 = f(T^2) = f(T) \cdot f(T) = g \cdot g.$$
Aus der Primfaktorzerlegung $T^3 = T \cdot T \cdot T$ folgt aber, dass es ein solches g *nicht* geben kann. Dies ist ein Widerspruch; also gibt es *keinen* solchen Ringhomomorphismus.
2. Diese Aussage ist falsch, denn: Es gilt $[0] = [5]$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, aber
$$\bigl([0],[0]\bigr) \longmapsto [0]$$
und
$$\bigl([5],[0]\bigr) \longmapsto [5] = [2] \neq [0] \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$
3. Diese Aussage ist wahr, denn: Die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$
ist bilinear und induziert somit nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts die wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \otimes y &\longmapsto x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 ($1 + 3 + 4 + 1 = 9$ Punkte)**.**

1. Wie lautet die Definition selbstadjungierter Endomorphismen?
2. Formulieren Sie den Spektralsatz.
3. Skizzieren Sie die wesentlichen Schritte des Beweises des Spektralsatzes im unitären Fall.
4. Nennen Sie eine Anwendung des Spektralsatzes.

Lösung:

1. *Definition.* Sei $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Ein Endomorphimus $f \colon V \longrightarrow V$ ist *selbstadjungiert*, wenn
$$\forall_{x,y \in V} \quad \bigl\langle x, f(y) \bigr\rangle = \bigl\langle f(x), y \bigr\rangle.$$
2. *Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen.* Sei $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Es bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall). Dann gilt:
   (a) Alle Eigenwerte von f über $\mathbb{K}$ sind bereits reell, d.h. $\sigma_{\mathbb{K}}(f) \subset \mathbb{R}$.
   (b) Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.
   (c) Insbesondere ist f über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar.
3. Der erste Teil ist eine einfache Rechnung. Der dritte Teil folgt direkt aus dem zweiten Teil.

   Den zweiten Teil kann man per Induktion über die Dimension des Vektorraums führen. Dazu benötigt man zwei wesentliche Bausteine:

   – Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen bzw. unitären Vektorraums besitzt mindestens einen Eigenwert/-vektor (dies kann man mit z.B. mit dem Fundamentalsatz der Algebra zeigen).
   – Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum von V mit $f(W) \subset W$, so gilt bereits, dass $f(W^\perp) \subset W^\perp$.

   Kombiniert man diese beiden Eigenschaften, so sieht man, dass man sich Dimension für Dimension nach unten (bis zur Dimension 0) hangeln kann.
4. Beispiele für Anwendungen sind: Spektralkalkül, Definitheitskriterien für symmetrische Matrizen, Hauptachsentransformation, Trägheitssatz von Sylvester, ...

Aufgabe 5 (3 + 3 + 3 = 9 Punkte)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.
2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.
3. Ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$-zyklischer Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

1. Es gilt
$$\chi_A = \det(T \cdot I_3 - A) = (T-1) \cdot \big((T-2) \cdot T - 1\big) = (T-1)^3.$$
Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist das Minimalpolynom μ_A ein normierter Teiler von χ_A (in $\mathbb{C}[T]$). Also ist $\mu_A \in \{1, T-1, (T-1)^2, (T-1)^3\}$. Wegen
$$\begin{aligned} 1(A) &= I_3 \neq 0 \\ (T-1)(A) &= I_3 - A \neq 0 \\ (T-1)^2(A) &= (I_3 - A)^2 = A^2 - 2 \cdot A - I_3 = 0 \end{aligned}$$
folgt $\mu_A = (T-1)^2$.

2. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform folgt, dass die Jordansche Normalform von A nur Jordanblöcke zum Eigenwert 1 besitzt und dass (nach der Berechnung von μ_A im ersten Teil) der größte Jordanblock die Größe 2 hat. Also bleibt (da A eine 3×3-Matrix ist) als einizge Möglichkeit für die Jordansche Normalform von A nur
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nein, denn: Aus dem Satz über die Jordansche Normalform und der Berechnung im zweiten Teil folgt
$$\mathbb{C}^3[L(A)] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T-1) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-1)^2.$$
Dieser $\mathbb{C}[T]$-Modul ist *nicht* zyklisch (nach der Eindeutigkeitsaussage aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über dem Hauptidealring $\mathbb{C}[T]$). Also ist der $\mathbb{C}[T]$-Modul $\mathbb{C}^3[L(A)]$ *nicht* zyklisch.

Aufgabe 6 $(5+2+2=9$ Punkte$)$**.** Sei

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Bestimmen Sie Hauptachsen für die Quadrik Q.
2. Skizzieren Sie die Quadrik Q.
3. Zeigen Sie, dass es ein $x \in Q$ mit $\|x\|_2 \geq 2017$ gibt.

Lösung:

1. Es gilt

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\mathsf{T} \cdot A \cdot x = 1\} \end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Wir bestimmen nun eine Matrix $S \in \mathrm{O}(2)$, so dass $S^\mathsf{T} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist: Es gilt

$$\chi_A = \det(T \cdot I_2 - A) = (T-2) \cdot (T+1) - 4 = (T-3) \cdot (T+2).$$

Die Matrix A hat also die (reellen) Eigenwerte 3 und -2.

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert 3 gilt

$$V(A - 3 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert -2 gilt

$$V(A + 2 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

eine Orthonormalbasis (bezüglich $\langle \cdot , \cdot \rangle_2$) aus Eigenvektoren von A. Somit hat die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$$

die gewünschte Eigenschaft. Also sind

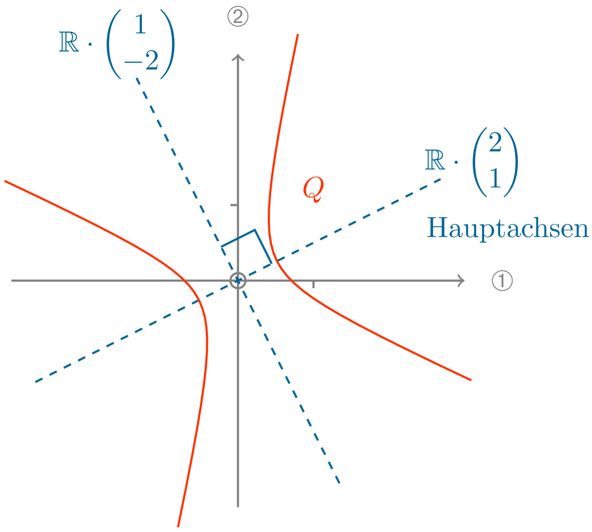
$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hauptachsen für Q.

2. Nach der Berechnung im ersten Teil ist

$$Q = \{S \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 = 1\}.$$

Zusammen mit den Hauptachsen liefert dies das folgende Bild:



3. Sei $y_2 := 2017$ und

$$y_1 := \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 2017^2)}.$$

Dann ist $x := S \cdot y \in Q$ und wegen $S \in \mathrm{O}(2)$ folgt

$$\|x\|_2 = \|S \cdot y\|_2 = \|y\|_2 \geq |y_2| = 2017.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper, seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f\colon V \otimes_K W \longrightarrow K$ eine lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} &\forall_{v\in V\setminus\{0\}} \quad \exists_{w\in W} \quad f(v\otimes w) \neq 0 \\ &\forall_{w\in W\setminus\{0\}} \quad \exists_{v\in V} \quad f(v\otimes w) \neq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann $V \cong_K W$ gilt.

Lösung: Aus der ersten Bedingung folgt: Die Abbildung

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(W,K) = W^* \\ v &\longmapsto \bigl(w \mapsto f(v\otimes w)\bigr) \end{aligned}$$

ist injektiv. Also ist (Dimensionsformel und da W endlich-dimensional ist)

$$\dim_K V \leq \dim_K W^* = \dim_K W.$$

Analog folgt aus der zweiten Bedingung, dass $\dim_K W \leq \dim_K V$. Aus diesen beiden Ungleichungen erhalten wir $\dim_K V = \dim_K W$, und damit $V \cong_K W$.