Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 1 vom 24. April 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen" beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Lineare Algebra). Wiederholen Sie die Begriffe *Vektorraum*, *lineare Abbildung* und *lineare Unabhängigkeit* aus der Linearen Algebra I und illustrieren Sie diese Begriffe durch sinnvolle Beispiele. Achten Sie auf präzise und verständliche Formulierungen!

Fingerübung B (Wiederholung: Aufschreiben). Wie schreibt man Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise, Beispiele sauber auf? Wo verwendet man Konjunktiv, wo Indikativ?

Fingerübung C (Wiederholung: die komplexen Zahlen). Wiederholen Sie die Grundlagen zu den komplexen Zahlen (Anhang A.2). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z + \overline{z}$ reell.
2. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{z}$ reell und nicht-negativ.
3. Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist z genau dann reell, wenn $z = \overline{z}$ ist.

Fingerübung D (das Standarskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$). Wir betrachten

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Zeichnen Sie diese Vektoren in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte:

$$\langle x, x\rangle_2, \quad \langle y, y\rangle_2, \quad \langle z, z\rangle_2, \quad \langle x, y\rangle_2, \quad \langle x, z\rangle_2, \quad \langle y, z\rangle_2$$

Fingerübung E (neue Skalarprodukte). Definieren Sie selbst ein „neues" Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$! Können Sie es irgendwie anschaulich beschreiben?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$; 4 Punkte). Sei

$$\begin{aligned} b \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
2. Sei $\|\cdot\|$ die von b induzierte Norm. Geben Sie ein Beispiel für ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Skalarprodukte? 4 Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
b_1 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 \\
b_2 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2
\end{aligned}
$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung b_1 ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.
2. Die Abbildung b_2 ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

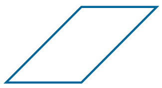
Aufgabe 3 (Polarisierung und Parallelogrammgleichung; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V.

1. Beweisen Sie die *Polarisierungsgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2} \cdot \bigl(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\bigr)$$

2. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr)$$



Aufgabe 4 (lineare Abhängigkeit; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V und seien $x, y \in V$ mit $y \neq 0$. Sei

$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}.$$

Zeigen Sie: Die Familie (x, y) ist genau dann linear abhängig, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$. Dabei wird im euklidischen Fall lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ und im unitären Fall lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{C}$ betrachtet.

Bonusaufgabe (Anschauung; 4 Punkte)**.** Welche geometrische Bedeutung haben die Polarisierungsgleichung und die Parallelogrammgleichung? Illustrieren Sie Ihre Erklärungen durch geeignete Skizzen.

Für Lehramtsstudenten: Mit welchen Sätzen aus der Schulgeometrie hängen diese beiden Gleichungen zusammen?

Hinweis. Die Bonusaufgaben sind ein freiwilliges Zusatzangebot, sind oft manchmal komplexer oder aufwendiger bzw. basieren auf Material oder Fähigkeiten, die über die Vorlesung und die Übungen hinausgehen. Diese Aufgaben werden nicht in den Übungsgruppen besprochen. Sie dienen einfach nur als zusätzliche Anregung und Herausforderung. Man kann sich also gerne die Zähne daran ausbeißen oder sie fröhlich ignorieren.

Abgabe bis 2. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS