

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Blatt 10 vom 26. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Ringe). Welche Eigenschaften von Ringen kennen Sie bereits? Wie hängen diese zusammen? Welche Beispiele kennen Sie?

Fingerübung B (ggT).

1. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 2025 und 35 in \mathbb{Z} .
2. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von T^2+T und T^3 in $\mathbb{F}_2[T]$.

Fingerübung C (Gleichungen in Ringen).

1. Finden Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2025 \cdot x + 49 \cdot y = -3$.
2. Gibt es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2025 \cdot x + 27 \cdot y = 25$?
3. Finden Sie Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[T]$ mit $p \cdot (T^2 + 2) + q \cdot (T - 2) = T^3$.
4. Gibt es Polynome $p, q \in \mathbb{F}_2[T]$ mit $p \cdot (T^2 + 1) + q \cdot (T + 1) = T^2$?

Fingerübung D (Ideale in \mathbb{Z}). Welche der folgenden Ideale in \mathbb{Z} sind gleich?

$$(13, 14, 15), \quad (23, 24, 25), \quad (15, 25, 35), \quad (16, 26, 36), \quad (17, 27, 37)$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (\mathbb{Z} -Moduln; 2 (= 0 + 1 + 1) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

0. Wie lautet die Definition von *freien Moduln*?
1. Der \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/2025 \oplus \mathbb{Z}/2026$ ist frei.
2. Der \mathbb{Z} -Modul $\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ ist frei.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Währungsreform; 4(= 2+2) Punkte). Im Rahmen einer Währungsreform werden neue Münzen mit dem Wert von 30 Blorx, 42 Blorx bzw. 105 Blorx eingeführt.



1. Ist es möglich, 44 Blorx exakt zu bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Wie kann man den Betrag von 9 Blorx exakt bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)?

Hinweis. Sie dürfen in beiden Fällen annehmen, dass Käufer und Verkäufer genug Exemplare der verschiedenen Münztypen besitzen.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (ideale Gleichheit? 4 (= 2 + 2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(T^4 + T^2 + 2 \cdot T, T^3 + 2025 \cdot T) = (T)$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Es gilt $(T^2 + T, T + 1) = (T^2 + T, T^5 + 1)$ in $\mathbb{F}_2[T]$.

Aufgabe 3 (Schwanensee; 4 Punkte). Professor Pirkheimer bewundert das Schwanensee-Ballett und wüsste zu gerne, wie viele Tänzerinnen involviert sind. Aufgrund des permanenten Rumgehopses sind sie jedoch nur schwer zu zählen. Er stellt jedoch fest, dass es je einen Tanz gibt, bei dem sich

- alle bis auf drei Tänzerinnen in Fünfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf fünf Tänzerinnen in Zwölfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf sechs Tänzerinnen in Siebenergrüppchen aufteilen.

Außerdem ist sich Pirkheimer sicher, dass es sich insgesamt um weniger als 1000 Tanzbeine bzw. 500 Tänzerinnen handelt.

Wieviele Tänzerinnen schwirren herum? Begründen Sie Ihre Antwort! Wie haben Sie diese Lösung gefunden?

Aufgabe 4 (Präsentationen von Moduln; 4 (= 2 + 2) Punkte). Bestimmen Sie für die folgenden \mathbb{Z} -Moduln V jeweils zwei verschiedene Wahlen von $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ mit $V \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^m / \text{im } L(A)$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Für den \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/42 \oplus \mathbb{Z}^{2025}$.
2. Für den \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/25$.

Bonusaufgabe (Sophie Germain; 4 (= 2 + 2) Punkte). Wer war Sophie Germain?

1. Geben Sie kurz die wichtigsten Daten/Stationen ihres Lebens an.
2. Geben Sie einen Satz an, der von Sophie Germain bewiesen wurde.

Hinweis. Alle Angaben sind durch nachvollziehbare Quellen zu belegen. Eine Konversation mit einem KI-System zählt *nicht* als nachvollziehbare Quelle.



Abgabe bis 4. Juli 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS