Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 11 vom 3. Juli 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Gauß-Elimination)**.** Wiederholen Sie das *Gaußsche Eliminationsverfahren* und wie man damit diverse Probleme der linearen Algebra lösen kann.

Fingerübung B (Elementarteiler)**.** Bestimmen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen (über $\mathbb{Z}$):

$$\begin{pmatrix} 55 & 2025 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung C (lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}$)**.** Wieviele $x \in Z^2$ gibt es, die das folgende lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}$) erfüllen?

$$9 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 = 6 \quad \text{und} \quad 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = -8$$

Verwenden Sie den Elementarteilersatz für Matrizen!

Fingerübung D (Elementarteiler von Moduln)**.** Führen Sie die Beweisschritte des Elementarteilersatzes für Moduln am folgenden $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}^2$ durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_3 \\ 8 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 10x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Primfaktoren; 2 $(= 0 + 1 + 1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

0. Wie lautet die Definition von *prim* in Integritätsringen?
1. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $T^4 - 7 \cdot T^2$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $T^4 + 7 \cdot T^2$ in $\mathbb{C}[T]$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Gitterpunkte; 4 Punkte)**.** Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \leq 9$, indem Sie zunächst geeignete Elementarteiler und zugehörige Transformationen bestimmen.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Elementarteiler von Moduln; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Hauptidealring und sei U ein Untermodul von R^3. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist (v_1, v_2, v_3) eine R-Basis von R^3, so gibt es Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ und $r \in \{0, \dots, 3\}$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\}$.

2. Es gibt eine Basis (v_1, v_2, v_3) von R^3, Primelemente $p_1, p_2, p_3 \in R$ und $r \in \{0, \dots, 3\}$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{p_1 \cdot v_1, \dots, p_r \cdot v_r\}$.

Aufgabe 3 (Rang freier Moduln über Hauptidealringen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Hauptidealring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie: Gilt $n > m$ und ist $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(R)$, so ist $L(A)\colon R^n \longrightarrow R^m$ *nicht* injektiv.

   Hinweis. Verwenden Sie den Elementarteilersatz für Matrizen.

2. Folgern Sie: Es gilt genau dann $R^n \cong_R R^m$, wenn $n = m$ ist.

Aufgabe 4 (Determinantenideale; 4 $(= 3 + 1)$ Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(R)$.

1. Zeigen Sie: Sind $S \in \mathrm{M}_{m \times m}(R)$ und $T \in \mathrm{M}_{n \times n}(R)$, so gilt für alle $k \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$:

   $$D_k(S \cdot A) \subset D_k(A) \quad \text{und} \quad D_k(A \cdot T) \subset D_k(A)$$

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie einen der beiden Fälle bearbeiten. Zur Vereinfachung: Wenn Sie möchten, können Sie sich außerdem darauf einschränken, die beiden Fälle $k = 1$ bzw. $k = 2$ zu behandeln.

2. Folgern Sie: Sind $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so gilt $D_k(S \cdot A \cdot T) = D_k(A)$ für alle $k \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$.

Bonusaufgabe (Elementarreime; 4 Punkte)**.**

Werd ich zum Elementaren sagen:
Teile doch! Du bist so schön!
Dann magst du mich in Reime schlagen.
Dann will ich gern zum Dichten gehn!

Schreiben Sie ein Gedicht, das den Algorithmus zur Bestimmung der Elementarteiler von Matrizen über euklidischen Ringen gut einprägsam zusammenfasst.