Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 12 vom 10. Juli 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (charakteristisches Polynom)**.** Wiederholen Sie die Definition und Anwendungen des *charakteristischen Polynoms* von Matrizen bzw. von Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume.

Fingerübung B (Minimalpolynome)**.** Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung C (Kombination zweier Blöcke)**.** Sei K ein Körper, seien $k, m \in \mathbb{N}$, seien $B \in \mathrm{M}_{k\times k}(K)$, $C \in M \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$. Wir betrachten die Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

mit $n := k + m$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A das (normierte) kleinste gemeinsame Vielfache von μ_B und μ_C in $K[T]$ ist.

Fingerübung D (abelsche Gruppen)**.** Wieviele abelsche Gruppen mit genau 40 Elementen gibt es bis auf Isomorphie?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (ggT; 2 $(= 0 + 1 + 1)$ Punkte)**.**

0. Was ist „der“ *größte gemeinsame Teiler*?
1. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $T^5 - 1$ und $T^4 - 1$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von T^6+T+1 und T^4+T^3 in $\mathbb{F}_2[T]$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Jordansche Normalformen und Ähnlichkeit; 4 $(= 3 + 1)$ Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 & 10 & -9 \\ -14 & 14 & -9 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Welche dieser Matrizen sind ähnlich zueinander? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Jordansche Normalformen? 4 (= 2+2) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt $A \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit $\det A = 8$ und $\mu_A = (T-2)^2 \cdot (T-1)$.
2. Es gibt $A \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit $\det A = 54$ und $\mu_A = (T-3)^2 \cdot (T-2)$.

Aufgabe 3 (iiiii! 4 Punkte). Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & i & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & i & -i & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie außerdem (mit dem Verfahren aus der Vorlesung) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 4 (Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit; 4 $(= 0+2+2)$ Punkte). Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

0. Wie lautet die Definition von *Diagonalisierbarkeit* von Matrizen?

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Matrix A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und (paarweise) verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit
$$\mu_A = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j).$$

Hinweis. Falls A diagonalisierbar ist, so bietet es sich an, das Minimalpolynom mithilfe der Konjugationsinvarianz zu berechnen. Für die umgekehrte Implikation kann man wie beim Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton vorgehen.

Bonusaufgabe (Staatsexamen: abelsche Gruppen; 4 $(= 1+1+1+1)$ Punkte). Die folgenden Aufgaben sind ehemalige (teilweise leicht umformulierte) Staatsexamensaufgaben. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphietypen von abelschen Gruppen, die genau 1980 Elemente enthalten, und geben Sie für jeden Isomorphietyp ein Beispiel.
2. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, so dass es genau sechs Isomorphietypen von abelschen Gruppen mit genau n Elementen gibt.
3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ mit $\det A \neq 0$. Zeigen Sie, dass
$$|\det A| = \#\bigl(\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} L(A)\bigr).$$
4. Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppe der positiven reellen Zahlen (bezüglich Multiplikation) zur abelschen Gruppe aller reellen Zahlen (bezüglich Addition) isomorph ist.

   Hinweis. Analysis!

Abgabe bis 18. Juli 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Die Aufgaben von Blatt 13 zählen als Bonuspunkte.