Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 13 vom 17. Juli 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Bilinearformen, Skalarprodukte)**.** Wiederholen Sie die Definition und Anwendungen von *Bilinearformen* und *Skalarprodukten*, inklusive Matrizenkalkül.

Fingerübung B (Dualräume)**.** Welche der folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume sind isomorph?

$$\mathbb{R},\ \mathbb{R}^*,\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3),\ (\mathbb{R}^5)^*,\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^5)^*,\ (\mathbb{R}^6)^*,\ \mathbb{R}^*\oplus(\mathbb{R}^2)^*\oplus(\mathbb{R}^3)^*$$

Fingerübung C (Abbildungen auf Tensorprodukten)**.** Sei K ein Körper. Welche der folgenden Abbildungen $K^3 \otimes_K K^3 \longrightarrow K$ sind wohldefiniert?

1. $v \otimes w \longmapsto 0$
2. $v \otimes w \longmapsto v_1 + w_2$
3. $v \otimes w \longmapsto v_3$
4. $v \otimes w \longmapsto v_1 \cdot w_3 - v_2 \cdot w_1$

Fingerübung D (Tensoren)**.** Welche dieser Gleichheiten gelten in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$?

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
2. $2024 \cdot e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 = e_1 \otimes (e_1 + 2025 \cdot e_2)$
3. $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$
4. $e_1 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Elementarteiler; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.**

1. Verwenden Sie den Elementarteilersatz, um das folgende lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}$) zu lösen:

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit
   $$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 15 \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &= 22 \\ 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \phantom{{}+ 3 \cdot x_3} &= 17 \end{aligned}$$
2. Skizzieren Sie die Lösungsmenge.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (duale Abbildungen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $f \colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

1. Ist f surjektiv, so ist $f^* \colon W^* \longrightarrow V^*$ injektiv.
2. Ist f injektiv, so ist $f^* \colon W^* \longrightarrow V^*$ surjektiv.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Rechnen mit Elementartensoren; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K und seien $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $v \otimes w = v' \otimes w'$, so folgt $v = v'$ und $w = w'$.
2. Es gilt $v \otimes w + v' \otimes w' = (v + v') \otimes (w + w')$.

Aufgabe 3 (Skalarprodukte und Tensorprodukte; 4 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Reformulieren Sie die Definition von Skalarprodukten auf V so, dass Sie nur das Tensorprodukt und Eigenschaften von linearen Abbildungen verwenden. Zeigen Sie, dass Ihre Reformulierung zur gewöhnlichen Definition äquivalent ist!

Aufgabe 4 (Kommutativität des Tensorprodukts; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K.

1. Zeigen Sie, dass wie folgt wohldefinierte K-lineare Abbildungen beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
V \otimes_K W &\longrightarrow W \otimes_K V \\
v \otimes w &\longmapsto w \otimes v \\
W \otimes_K V &\longrightarrow V \otimes_K W \\
w \otimes v &\longmapsto v \otimes w
\end{aligned}
$$

2. Folgern Sie, dass $V \otimes_K W \cong_K W \otimes_K V$ gilt.

Bonusaufgabe (Blorxisch; 4 Punkte)**.** Die Sprache **BLORX** beruht auf dem Alphabet mit den Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X**. Blorxische Wörter werden dabei nach den folgenden Regeln gebildet:

- Wörter dürfen mit jedem der Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X** beginnen.
- Auf **B** kann nur **B** oder **L** folgen (oder das Wortende).
- Auf **L** oder **O** kann nur **L**, **O**, **R** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **R** kann nur **O** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **X** kann nur **L** oder **X** folgen (oder das Wortende).

Zum Beispiel sind **BLORX** und **RORO** korrekte blorxische Wörter, *nicht* aber **ROXOR**. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die Anzahl der blorxischen Wörter gegebener Länge, die mit **X** beginnen und mit **X** enden!

Hinweis. Betrachten Sie eine geeignete Matrix in $\mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$, deren Einträge nur Nullen und Einsen sind. Was haben Potenzen dieser Matrix mit den gesuchten Anzahlen zu tun? Wie kann man Potenzen von Matrizen mithilfe der Jordanschen Normalform bestimmen?

Bonusaufgabe (Cayley–Hamilton, ganz einfach?! 4 Punkte)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

Behauptung. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann ist μ_A in $K[T]$ ein Teiler von χ_A.

Beweis. Da das Minimalpolynom den Kern der Auswertung bei A als Ideal in $K[T]$ erzeugt, genügt es zu zeigen, dass $\chi_A(A) = 0 \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ gilt.

Nach Definition des charakteristischen Polynoms ist $\chi_A = \det(T \cdot I_n - A)$. Also erhalten wir $\chi_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = \det 0 = 0$,wie gewünscht. $\square$

Hinweis. Es ist hilfreich, dies an einem konkreten Beispiel, Schritt für Schritt durchzugehen und jeweils pedantischst darauf zu achten, dass man nicht schlampert ...

Freiwillige Abgabe bis 25. Juli, 8:35, via Briefkasten/GRIPS. Alle Punkte zählen als Bonuspunkte.