Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 3 vom 8. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: komplementäre Untervektorräume)**.** Wiederholen Sie den Begriff des *komplementären Untervektorraums*. Was haben komplementäre Untervektorräume mit Quotientenvektorräumen zu tun?

Fingerübung B (Matrizen/Bilinearformen)**.** Wie können Bilinearformen durch Matrizen beschrieben werden und umgekehrt? Wie kann man an der Matrix ablesen, ob die zugehörige Bilinearform symmetrisch ist?

Fingerübung C (orthogonale Komplemente)**.** Bestimmen Sie die folgenden orthogonalen Komplemente in $(\mathbb{R}^2, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2)$ und skizzieren Sie die Situation.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}^\perp, \quad \left(\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)^\perp, \quad \left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\}^\perp$$

Ersetzen Sie $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2$ durch ein anderes Skalarprodukt und wiederholen Sie die Berechnung dafür.

Fingerübung D (Orthonormalisierung)**.** Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt auf die folgende Familie in $(\mathbb{R}^3, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2)$ an:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right)$$

Erhalten Sie dasselbe Ergebnis, wenn Sie die Reihenfolge der Vektoren in der Familie ändern?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Skalarprodukte 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.**

1. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist:

$$\begin{aligned}\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto 3\cdot x_1\cdot y_1 + x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1 + x_2\cdot y_2\end{aligned}$$

2. Finden Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle e_1, x\rangle = 0$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Orthonormalisierung; 4 Punkte)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 5 & 5 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}).$$

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis des Untervektorraums $V(A,0) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid A\cdot x = 0\}$.

2. Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt auf diese Basis an, um eine Orthonormalbasis von $V(A,0)$ (bezüglich des euklidischen Skalarprodukts) zu erhalten.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (iterierte orthogonale Komplemente; 4 (= 2+2) Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $A \subset V$ nicht-leer. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Es gilt $((A^\perp)^\perp)^\perp = A^\perp$.

Aufgabe 3 (Wieviele symmetrische Bilinearformen gibt es? 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Bestimmen Sie $\dim_K \operatorname{Bil}_K(V)$.
2. Bestimmen Sie die Dimension des K-Vektorraums aller symmetrischen Bilinearformen auf V.

Aufgabe 4 (Spieglein, Spieglein, ...; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und zu $v \in V \setminus \{0\}$ sei

$$\begin{aligned} S_v \colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x - 2 \cdot \frac{\langle v, x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v. \end{aligned}$$

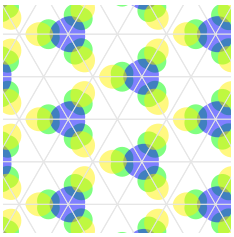
Man bezeichnet S_v als *Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene*. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Teilaufgaben:

1. Berechnen Sie $S_v(x)$ in den Fällen $x \in \mathbb{R}\cdot v$ bzw. $x \perp v$. Warum rechtfertigt dies die Bezeichnung von S_v als Spiegelung?
2. Zeigen Sie, dass S_v eine Isometrie bezüglich der induzierten Norm ist.
3. Zeigen Sie: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\det S_v = -1$.
4. Skizzieren Sie S_v in den Fällen $v = e_2$ bzw. $v = e_1 + e_2$ in $(\mathbb{R}^2, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2)$. Ist die Komposition $S_{e_1} \circ S_{e_1+e_2}$ auch eine Spiegelung? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Kaleidoskop in LaTeX; 4 Punkte)**.** Vervollständigen Sie die LaTeX-Quelldatei caleidoscope_exercise.tex so, dass Sie einen Kaleidoskop-Bilder-Generator erhalten. Erklären Sie Ihre Ergänzungen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Vervollständigen Sie \caleidohexagon so, dass ein Sechseck aus sechs wie in einem Kaleidoskop gespiegelten Dreiecken entsteht.
2. Vervollständigen Sie dann das Programm durch geeignete Translationen von \caleidohexagon.

Hinweis. Wenn Sie keine eigene LaTeX-Installation haben, können Sie den Quellcode unter https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in LaTeX lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Abgabe bis 16. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS