Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 5 vom 22. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Diagonalisierbarkeit)**.** Wiederholen Sie die Begriffe *Eigenwerte*, *Eigenvektoren*, *charakteristisches Polynom*, *Diagonalisierbarkeit* (von Matrizen und Endomorphismen) und wie man diese in der Praxis bestimmen kann. Was ist die *Jordansche Normalform*?

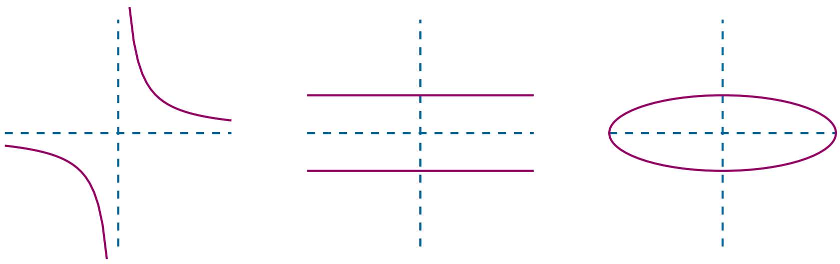
Fingerübung B (Wurzeln)**.** Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit

$$B^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fingerübung C (Definitheit)**.** Untersuchen Sie die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ auf Definitheit. Welche Signatur haben diese Matrizen?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche der untenstehenden Skizzen passt zu welcher dieser Matrizen?



Fingerübung D (adjungierter Homomorphismus)**.** Bestimmen Sie den adjungierten Homomorphismus (bezüglich $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_2$) der folgenden $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Ist diese Abbildung selbstadjungiert?

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} (1 - 2\cdot i)\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \\ i\cdot x_1 - (2025 + i)\cdot x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Orthogonalität; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Relation „$\perp$“ auf $\mathbb{R}^3$ (bezüglich $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_2$) ist transitiv.
2. Jedes Orthonormalsystem in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot \rangle_2)$ kann zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot \rangle_2)$ ergänzt werden.

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Hauptachsentransformation; $4 = (2+2)$ Punkte)**.** Zu $c \in \mathbb{R}$ sei

$$Q_c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3/2 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + 3/2 \cdot x_2^2 = c\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ Hauptachsen für die Quadrik Q_c und bestimmen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{R} \mid Q_c \neq \emptyset\}$.

2. Skizzieren Sie die Quadrik Q_2. Ist Q_2 beschränkt (bezüglich $\|\cdot\|_2$)?

Aufgabe 2 (adjungierte Homomorphismen; 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und seien $f, g\colon V \longrightarrow V$ Endomorphismen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(f^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = f$.

2. Es gilt $(f \circ g)^{\mathsf{H}} = f^{\mathsf{H}} \circ g^{\mathsf{H}}$.

Aufgabe 3 (Spektralzerlegung; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall). Zu $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ sei $p_\lambda\colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$. Zeigen Sie, dass dann die folgende *Spektraldarstellung* gilt:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)} \lambda \cdot p_\lambda$$

Aufgabe 4 (Polarzerlegung; 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass A eine *Polarzerlegung* besitzt, d.h., dass eine orthogonale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$ und eine symmetrische positiv definite Matrix $P \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ existiert mit
$$A = U \cdot P.$$

2. Zeigen Sie, dass diese Matrizen P und U eindeutig durch A bestimmt sind.

Hinweis. Ziehen Sie die „positive" Wurzel aus $A^{\mathsf{T}} \cdot A$ ...

Bonusaufgabe (Kerne statt Quotienten; 4 Punkte)**.** Seien $(U, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_U)$, $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_V)$, $(W, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_W)$ endlich-dimensionale euklidische/unitäre Vektorräume und seien $f\colon U \longrightarrow V$, $g\colon V \longrightarrow W$ mit $g \circ f = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \ker(g^{\mathsf{H}} \circ g + f \circ f^{\mathsf{H}}) &\longrightarrow \ker g / \operatorname{im} f \\ x &\longmapsto x + \operatorname{im} f \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Vektorraumisomorphismus ist.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $(\operatorname{im} f)^\perp = \ker f^{\mathsf{H}}$ gilt.

Abgabe bis 30. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS