Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 6 vom 29. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Polynomring und algebraische Strukturen)**.** Wiederholen Sie die Konstruktion des *Polynomrings* (über einem Körper). Welche algebraische Strukturen kennen Sie bereits? Sammeln Sie die Definitionen und passende Beispiele!

Fingerübung B (Rechnen in Ringen: konkret)**.** Welche der folgenden Ringe sind nullteilerfrei?

$$\mathbb{F}_2, \quad \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}), \quad \mathbb{Z}/42.$$

Fingerübung C (Rechnen in Ringen: abstrakt)**.** Sei R ein Ring. Zeigen Sie: Für alle $x \in R$ ist $0 \cdot x = 0$.

Fingerübung D (Endomorphismenpolynome)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f := L(A)\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome $p \in \mathbb{C}[T]$ den Endomorphismus $p(f)$, den man erhält, wenn man f in p einsetzt:

$$T - \lambda, \quad (T-\lambda)^2, \quad (T-\lambda)^3$$

Worauf wird bei dieser Form des „Einsetzens“ die universelle Eigenschaft des Polynomrings $\mathbb{C}[T]$ angewendet? Wie helfen die Eigenschaften von Ringhomomorphismen dabei, die entsprechenden Endomorphismen zu berechnen?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Isometriegruppen; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ ist abelsch.
2. Die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ ist abelsch.

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Zerlegung von Endomorphismen; 4 $= (0+2+2)$ Punkte)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, sei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

und $f := L(A) \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$.

0. Wie sind f-*zyklisch* und f-*irreduzibel* definiert?
1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-zyklischer Vektorraum ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-irreduzibler Vektorraum ist.

Aufgabe 2 (universelle Eigenschaft des Polynomrings? 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f \colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit $f(T^2) = T$.
2. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f \colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit $f(T^2) = 2025$.

Aufgabe 3 (Ringe; 4 $(= 0+4)$ Punkte)**.**

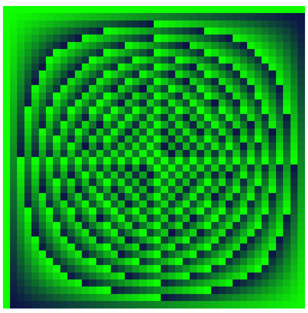
0. Wie sind *Ringhomomorphismus* und *Ringisomorphismus* definiert?
1. Zeigen Sie, dass die folgenden Ringe paarweise nicht isomorph sind:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}[T], \quad \mathbb{F}_2[T]$$

Aufgabe 4 (Endomorphismenpolynome: Annihilation; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $p(f) = 0$ gibt.

Hinweis. Welche Dimension hat $\mathrm{Hom}_K(V,V)$? Warum hilft das?

Bonusaufgabe (Ringe, anschaulich; 4 Punkte)**.** Stellen Sie die Multiplikation von $\mathbb{Z}/42$ geeignet graphisch dar und erklären Sie, was Ihre Graphik bedeutet.



Hinweis. Es bietet sich an, dafür ein geeignetes Programm zu schreiben …

Abgabe bis 6. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS