Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann Blatt 7 vom 5. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Konstruktionen von Vektorräumen; Basen)**.** Wiederholen Sie die Konstruktionen *direkte Summe* und *Quotienten* von Vektorräumen. Welche linearen Abbildungen kann man zu/auf diesen Konstruktionen immer definieren? Wie lautet die *universelle Eigenschaft von Basen* in Vektorräumen?

Fingerübung B (Rechnen in Moduln: konkret)**.** Berechnen Sie im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2025$:

$$45 \cdot [5] + 9 \cdot [45]$$

Fingerübung C (Rechnen in Moduln: abstrakt)**.** Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Zeigen Sie: Für alle $x \in V$ gilt $(-1) \cdot x = -x$.

Fingerübung D (Modulhomomorphismen)**.** Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $f := 2025 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie Kern und Bild von f. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Könnte dasselbe Phänomen bei $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auftreten?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (adjungierte Abbildungen; 2 (= 0+1+1) Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, seien $f, g \colon V \longrightarrow V$ Endomorphismen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

0. Wie sind *adjungierte Homomorphismen* definiert?
1. Es gilt $(i \cdot f)^{\mathsf{H}} = i \cdot f^{\mathsf{H}}$.
2. Es gilt $(g \circ f)^{\mathsf{H}} = f^{\mathsf{H}} \circ g^{\mathsf{H}}$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (minimales Erzeugendensystem; 4 = (0 + 2 + 2) Punkte)**.** Im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^2$ betrachten wir

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 2025 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2024 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

0. Wie ist *Erzeugendensystem* für Moduln definiert? Was weiß man über minimale Erzeugendensysteme in Vektorräumen?
1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} E = \mathbb{Z}^2$ gilt.
2. Zeigen Sie: Ist $F \subset E$ mit $F \neq E$, so ist $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} F \neq \mathbb{Z}^2$.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Ideale; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Ring und seien $a, b \subset R$ linksseitige Ideale in R. Welche der folgenden Aussagen sind wahr in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Dann ist $a \cap b$ ein Ideal in R.
2. Dann ist $a \cup b$ ein Ideal in R.

Aufgabe 3 (invariante Unterräume; 4 $(= 0 + 4)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Außerdem sei $U \subset V$ ein K-Untervektorraum.

0. Wie sind der $K[T]$-Modul $V[f]$ und $K[T]$-*Untermodul* definiert?
1. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Der Unterraum U ist f-invariant, d.h. es gilt $f(U) \subset U$.
   (b) Die Teilmenge $U \subset V$ ist ein $K[T]$-Untermodul von $V[f]$.

Aufgabe 4 (Ideale als Kerne; 4 Punkte)**.** Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein linksseitiges Ideal in R. Zeigen Sie, dass es dann einen R-Modul V und einen R-Modulhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow V$ mit $\ker f = a$ gibt.

Bonusaufgabe (Zauberei! 4 Punkte)**.** Commander Blorx führt seinen Kollegen in der Modulkatalogslektüregesellschaft zusammen mit seinem Assistenten folgenden Kartentrick vor: Blorx bittet einen der Zuschauer, ein Kartendeck mit 52 Karten (jeweils 2, 3, …, 10, B, D, K, A in den Farben Karo, Herz, Pik, Kreuz) zu mischen. Ein weiterer Zuschauer zieht aus diesem Deck fünf Karten und gibt sie dem Assistenten (natürlich so, dass Blorx die Karten *nicht* sehen kann; der Assistent darf sie aber ansehen). Der Assistent gibt dann nacheinander vier Karten offen an Blorx und behält die fünfte Karte verdeckt bei sich. Blorx nennt daraufhin korrekt die verdeckte fünfte Karte.

$\boxed{\diamondsuit}$ $\boxed{\heartsuit}$ $\boxed{\spadesuit}$ $\boxed{\clubsuit}$ $\boxed{?}$

Wie funktioniert dieser Trick? Wie kann man den Trick so arrangieren, dass er einfach durchzuführen ist?

Hinweis. Es geht alles mit rechten Dingen zu – insbesondere kommt es nicht darauf an, ob die Karten quer, hochkant, mit wackelnden Ohren, etc. überreicht werden. Zum Einstieg kann es hilfreich sein, sich zunächst eine Variante zu überlegen, bei der Blorx nur die Farbe der fünften Karte korrekt nennt. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/13$ und die symmetrische Gruppe S_3 dürfen gerne mitspielen!