Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 8 vom 12. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Existenz von Basen)**.** Wiederholen Sie das Argument dafür, warum endlich erzeugte Vektorräume Basen besitzen. Warum funktioniert dieses Argument nicht im endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2$?!

Fingerübung B (Basen)**.** Welche der folgenden Familien sind $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathbb{Z}^2$?

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right),\quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right),\quad \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$$

Fingerübung C (Quotienten und Summen)**.** Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Wieviele Elemente enthält der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/m \oplus \mathbb{Z}/n$?

Fingerübung D (Homomorphiesatz)**.**

1. Finden Sie einen surjektiven $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$.
2. Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Moduln, um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}/6 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Polynomringe; $2\ (= 0 + 1 + 1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

0. Was ist die *universelle Eigenschaft von Polynomringen* (über Körpern)?
1. Die Ringe $\mathbb{C}[T]$ und $\mathbb{R}[T]$ sind isomorph.
2. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(T^2) = -2025$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Homomorphiesatz; $4 = (0 + 2 + 2)$ Punkte)**.**

0. Wie lautet der *Homomorphiesatz für Moduln*?
1. Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Moduln, um zu zeigen, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} f$ und $\mathbb{Z}/2$ isomorph sind, wobei $f := L(A)\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ durch die folgende Matrix gegeben ist:
$$A := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$
2. Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Moduln, um zu zeigen, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} f$ und $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ isomorph sind, wobei $f := L(A)\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ durch die folgende Matrix gegeben ist:
$$A := \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Quotienten und Summen; 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Z}/2025 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/45 \oplus \mathbb{Z}/45$.
2. Es gilt $\mathbb{Z}/2025 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/81 \oplus \mathbb{Z}/25$.

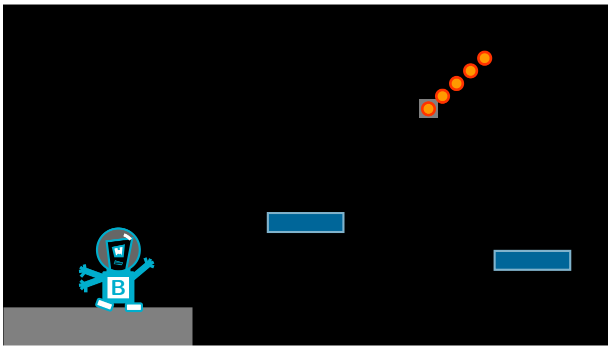
Aufgabe 3 (freie Moduln; 4 Punkte)**.** Sei R ein Ring und V ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R-Modul V ist frei.
2. Es gibt eine Menge I mit $V \cong_R \bigoplus_I R$.

Aufgabe 4 (Irreduzibilität; 4 $(= 0+4)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

0. Wie ist f-*Reduzibilität* von V definiert?
1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Der K-Vektorraum V ist f-reduzibel.
   (b) Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zerlegbar.

Bonusaufgabe (Warten auf eine günstige Gelegenheit; 4 Punkte)**.** Commander Blorx gerät in einen 2D-Platformer. Gleich zu Beginn entdeckt er zwei bewegliche Plattformen und einen rotierenden Feuerstrahl.



Die eine Plattform bewegt sich (gleichmäßig) horizontal und benötigt 42 Zeiteinheiten hin und zurück. Die zweite Plattform bewegt sich (gleichmäßig) vertikal und benötigt 88 Zeiteinheiten hin und zurück. Der Feuerstrahl benötigt 51 Zeiteinheiten für eine (gleichmäßige) Umrundung.

Nach wievielen Zeiteinheiten wiederholt sich die Anfangskonstellation? Genauer: Modellieren Sie die Situation geeignet mithilfe von $\mathbb{Z}$-Moduln und $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen, lösen Sie das entsprechende Problem für $\mathbb{Z}$-Moduln und übersetzen Sie dann die Lösung zurück in das Anwendungsproblem.

Abgabe bis 20. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS