Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann | Blatt 9 vom 19. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Prüfungsvorbereitung). Wie planen Sie Ihre Prüfungsvorbereitung für die mündlichen Modulprüfungen? Lesen Sie die Hinweise zur Prüfungsvorbereitung. Insbesondere: Wo finden Sie die in der Fachschaft gesammelten Gedächtnisprotokolle von mündlichen Prüfungen?

Fingerübung B (Division mit Rest). Wir betrachten auf $\mathbb{Z}$ den Absolutbetrag als euklidische Gradfunktion und auf Polynomringen über Körpern die modifizierte Gradfunktion.

1. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Division von 2025 mit Rest durch 126.
2. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Division von 4242 mit Rest durch -17
3. Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[T]$ die Division von $T^5 - 2 \cdot T^3 + T + 7$ mit Rest durch $T^2 + 2 \cdot T - 6$.
4. Berechnen Sie in $\mathbb{F}_2[T]$ die Division von T^3+T^2+1 mit Rest durch T^2+T.

Fingerübung C (Primfaktorzerlegung). Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen der Polynome
$$T^2 - 3 \quad \text{und} \quad T^2 + 3$$
in $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$.

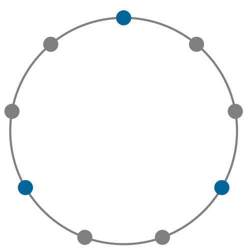
Fingerübung D (Ideale). Bestimmen Sie jeweils für die nachfolgenden Ideale, welche Ideale in welchen anderen Idealen enthalten sind. Was bedeutet das für die zugehörigen zyklischen Quotientenmoduln?

1. $(3),\ (6),\ (4),\ (12)$ in $\mathbb{Z}$
2. $(3),\ (T),\ (T^2),\ (T+1)$ in $\mathbb{Q}[T]$
3. $(T+1),\ (T^2+1),\ (T),\ (T^2+T)$ in $\mathbb{F}_2[T]$
4. $(T, T+1),\ (T),\ (T^2),\ (T^3)$ in $\mathbb{C}[T]$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Untermoduln; 2 $(= 0+1+1)$ Punkte). Beschriften Sie jeweils Ihre Skizzen aussagekräftig und begründen Sie Ihre Antwort!

0. Wie sind *von einer Teilmenge erzeugte Untermoduln* definiert?
1. Skizzieren Sie im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/12$ den von $[8]$ erzeugten Untermodul.
2. Skizzieren Sie im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/13$ den von $[8]$ erzeugten Untermodul.



Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Primfaktoren; $4 = (0 + 2 \cdot 2)$ Punkte)**.**

0. Wie lautet die Definition von *prim* für Elemente in Integritätsringen?
1. Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen des Polynoms

$$T^4 - 4$$

in zwei der folgenden drei Ringe $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$ (und begründen Sie jeweils, warum es sich dabei um Primfaktorzerlegungen handelt).

Aufgabe 2 (Hauptideale; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(a + b) = (a) \cap (b)$.
2. Es gilt $(a \cdot b) = (a) \cap (b)$.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung; 4 Punkte)**.** Sei R ein Integritätsring, seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R$ Primelemente mit

$$\prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{j=1}^{m} q_j.$$

Zeigen Sie: Dann ist $n = m$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in R^\times$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \quad p_j = \varepsilon_j \cdot q_{\sigma(j)}.$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass p_1 zu einem der Elemente $q_1, \dots, q_m$ assoziiert ist und hangeln Sie sich dann Primfaktor für Primfaktor durch das Produkt.

Aufgabe 4 (zyklische Moduln; 4 $(= 0 + 4)$ Punkte)**.**

0. Wie lautet jeweils die Definition von *zyklisch* in den beiden unten angegebenen Aussagen?
1. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und es sei $f \colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Der Vektorraum V ist f-zyklisch.
   (b) Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zyklisch.

Bonusaufgabe (Division mit Rest; 4 $(= 2 + 1 + 1)$ Punkte)**.**

1. Geben Sie den Algorithmus für Division von natürlichen Zahlen mit Rest (im Zehnersystem) an. Achten Sie dabei darauf, dass die Schritte so gewählt sind, dass ein Fünftklässer sie ohne Schwierigkeiten oder Nachfragen deterministisch ausführen kann. Insbesondere: Wie bestimmt man die nächste Ziffer?!
2. Führen sie Ihren Algorithmus am Beispiel der Division von 22222222 mit Rest durch 876 durch.
3. Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus immer terminiert und das korrekte Ergebnis liefert.

Abgabe bis 27. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS