Klausur Lineare Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann 28. Juli 2025

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum *positiv definit* ist.

2. Sei $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$. Gilt dann bereits $(x + y) \perp (x - y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Gilt für alle $A \in \mathrm{SO}(3)$, dass $A^2 = I_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Formulieren Sie die Dreiecksungleichung für Normen und beweisen Sie diese für von Skalarprodukten induzierte Normen mithilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung.

Aufgabe 2 ($5+1+1+3=10$ Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_2 - 2 \cdot x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Hauptachsen für die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,x) = 1\}$.
2. Skizzieren Sie diese Quadrik.
3. Formulieren Sie die Definition von *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum.
4. Ist f ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass ein Ringelement *irreduzibel* ist.
2. Ist $T^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$ irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T+1) = T$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gilt $(T^2 + T, T^3) = (2025 \cdot T^2)$ in $\mathbb{Q}[T]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (3 + 1 + 3 + 3 = 10 Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den *Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen*.

2. Nennen Sie eine Anwendung des Hauptsatzes über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

3. Gilt $\mathbb{Z}/26 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/13$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Gibt es $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $6 \cdot x - 9 \cdot y + 51 \cdot z = 8$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 ($3+3+3+3=12$ Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A. Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\deg p = 2025$ und $p(A) = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A. Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist $\mathbb{C}^3[L(A)]$ ein freier $\mathbb{C}[T]$-Modul? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (2 + 2 + 4 = 8 Punkte)**.**

1. Sei K ein Körper. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des *Tensorproduktes* zweier K-Vektorräume.

2. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft einer weiteren Konstruktion von Vektorräumen.

3. Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto \big(y \mapsto \langle x, y\rangle\big) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.