

Klausur Lineare Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

28. Juli 2025

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 (1 + 3 + 3 + 3 = 10 Punkte).

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum *positiv definit* ist.
2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$. Gilt dann bereits $(x + y) \perp (x - y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gilt für alle $A \in \text{SO}(3)$, dass $A^2 = I_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Formulieren Sie die Dreiecksungleichung für Normen und beweisen Sie diese für von Skalarprodukten induzierte Normen mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Lösung:

1. Eine Bilinearform $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ist *positiv definit*, wenn für alle $x \in V \setminus \{0\}$ gilt:

$$b(x, x) > 0$$

2. *Behauptung.* Ja, dann gilt $(x + y) \perp (x - y)$.

Beweis. Mit der Bilinearität und der Symmetrie des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie der Definition der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ folgt

$$\begin{aligned} \langle x + y, x - y \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 0 - \|y\|^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{da } \|x\| = \|y\|)$$

Somit folgt $(x + y) \perp (x - y)$. □

3. *Behauptung.* Nein, dies gilt im allgemeinen nicht.

Beweis. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Dann ist $A^T \cdot A = I_3$ und $\det A = 1$. Also ist $A \in \text{SO}(3)$. Aber es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3. \quad \square$$

4. *Behauptung. (Dreiecksungleichung für induzierte Normen)* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm. Dann gilt für alle $x, y \in V$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Beweis. Seien $x, y \in V$. Wegen $\|\cdot\| \geq 0$ und der Monotonie der Wurzelfunktion, genügt es $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ zu zeigen.

Mit Definition der induzierten Norm und der Bilinearität und Symmetrie des Skalarprodukts erhalten wir unter Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \quad (\text{Cauchy–Schwarzsche Ungleichung}) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

wie gewünscht. $\square$

Aufgabe 2 ($5 + 1 + 1 + 3 = 10$ Punkte). Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 - 2 \cdot x_1 \cdot y_2 - 2 \cdot x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Hauptachsen für die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, x) = 1\}$.
2. Skizzieren Sie diese Quadrik.
3. Formulieren Sie die Definition von *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum.
4. Ist f ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Es gilt

$$\begin{aligned} Q &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top \cdot A \cdot x = 1\} \end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Wir bestimmen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, die aus Eigenvektoren von A besteht: Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(T \cdot I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} T-1 & 2 \\ 2 & T-1 \end{pmatrix} \\ &= (T-1)^2 - 4 = T^2 - 2 \cdot T - 3 \\ &= (T+1) \cdot (T-3). \end{aligned}$$

Die Matrix A hat also die (reellen) Eigenwerte -1 und 3 .

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert -1 gilt

$$V(A + I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert 3 gilt

$$V(A - 3 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A .

Somit sind

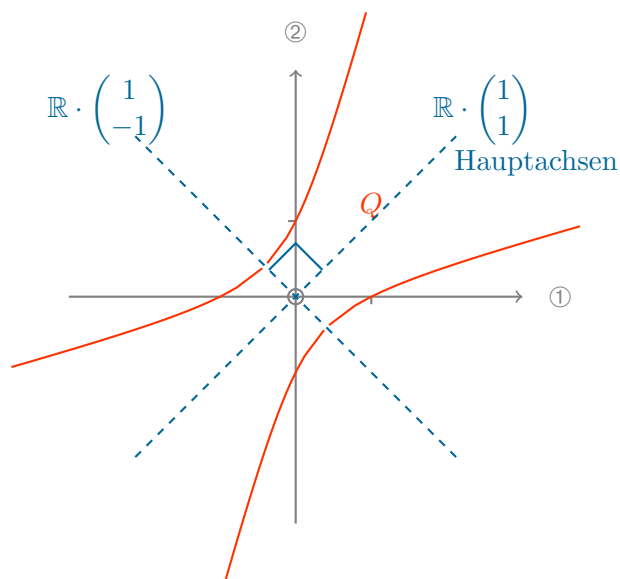
$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hauptachsen für Q .

2. Nach der Berechnung im ersten Teil ist

$$Q = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } -x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 = 1 \right\}.$$

Zusammen mit den bereits bestimmten Hauptachsen liefert dies das folgende Bild:



3. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine symmetrische und positiv definite Bilinearform auf V .

4. *Behauptung.* Nein, f ist kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Wir zeigen, dass f nicht positiv definitiv ist. Dazu betrachten wir (der Kandidat ergibt sich aus dem ersten Teil)

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $x \neq 0$ und

$$f(x, x) = -2 < 0.$$

Also ist f nicht positiv definit, und damit kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. □

Aufgabe 3 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass ein Ringelement *irreduzibel* ist.
2. Ist $T^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$ irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T + 1) = T$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gilt $(T^2 + T, T^3) = (2025 \cdot T^2)$ in $\mathbb{Q}[T]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Ring. Ein Element $a \in R \setminus \{0\}$ ist *irreduzibel*, wenn a keine Einheit ist und folgendes gilt: Für alle $x, y \in R$ mit $a = x \cdot y$ ist $x \in R^\times$ oder $y \in R^\times$.
2. *Behauptung.* Nein, $T^2 + 1$ ist in $\mathbb{F}_2[T]$ nicht irreduzibel.

Beweis. In $\mathbb{F}_2[T]$ gilt

$$T^2 + 1 = T^2 + 2 \cdot T + 1 = (T + 1) \cdot (T + 1).$$

Da $T^2 + 1 \neq 0$ und $T + 1$ und $T^2 + 1$ aus Gradgründen keine Einheiten in $\mathbb{F}_2[T]$ sind, folgt, dass $T^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[T]$ nicht irreduzibel ist. $\square$

3. *Behauptung.* Ja, es gibt einen solchen Ringhomomorphismus.

Beweis. Mit der universellen Eigenschaft des Polynomrings $\mathbb{R}[T]$ erhalten wir einen $\mathbb{R}$ -Algebrenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T) = T - 1$. Dann ist φ insbesondere ein Ringhomomorphismus und es gilt

$$\varphi(T + 1) = \varphi(T) + \varphi(1) = (T - 1) + 1 = T. \quad \square$$

4. *Behauptung.* Nein, die Ideale $(T^2 + T, T^3)$ und $(2025 \cdot T^2)$ in $\mathbb{Q}[T]$ sind verschieden.

Beweis. Aus Gradgründen ist $T \notin (2025 \cdot T^2)$.

Aber es gilt:

$$T = 1 \cdot (T^2 + T) - T \cdot (T^2 + T) + 1 \cdot T^3 \in (T^2 + T, T^3)$$

[Alternativ könnte man auch über den größten gemeinsamen Teiler argumentieren.] $\square$

Aufgabe 4 ($3 + 1 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie den *Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen*.
2. Nennen Sie eine Anwendung des Hauptsatzes über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.
3. Gilt $\mathbb{Z}/26 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/13$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $6 \cdot x - 9 \cdot y + 51 \cdot z = 8$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Hauptidealring und sei V ein endlich erzeugter R -Modul. Dann gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primelemente $p_1, \dots, p_k \in R$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$V \cong_R R^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1, \dots, k\}} R/(p_j^{n_j}).$$

Dabei sind d, k , die Primelemente $p_1, \dots, p_k$ (bis auf Assoziiiertheit und Reihenfolge) und die zugehörigen Exponenten $n_1, \dots, n_k$ eindeutig durch V bestimmt.

2. Der Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen kann zum Beispiel verwendet werden, um die Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform (über algebraisch abgeschlossenen Körpern) zu zeigen.

[Eine weitere Anwendung ist zum Beispiel die Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen.]

3. *Behauptung.* Die $\mathbb{Z}$ -Moduln $\mathbb{Z}/26$ und $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/13$ sind isomorph.

Beweis. Wegen $\text{ggT}(2, 13) = 1$ folgt mit dem chinesischen Restsatz für Moduln (angewendet auf den Hauptidealring $\mathbb{Z}$), dass $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/13 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2 \cdot 13) = \mathbb{Z}/26$. □

4. *Behauptung.* Nein, es gibt keine $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $6 \cdot x - 9 \cdot y + 51 \cdot z = 8$.

Beweis. Für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ist

$$6 \cdot x - 9 \cdot y + 51 \cdot z = 3 \cdot (2 \cdot x - 3 \cdot y + 17 \cdot z)$$

durch 3 teilbar, aber 8 ist *nicht* durch 3 teilbar. □

Aufgabe 5 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A . Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\deg p = 2025$ und $p(A) = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A . Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist $\mathbb{C}^3[L(A)]$ ein freier $\mathbb{C}[T]$ -Modul? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Als ersten Schritt berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[T]$ von A : Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(T \cdot I_3 - A) = (T - 2) \cdot (T^2 - 2 \cdot T) + 4 \cdot T - 4 \cdot T \\ &= (T - 2)^2 \cdot T. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist das Minimalpolynom μ_A ein normierter Teiler von χ_A in $\mathbb{C}[T]$ und besitzt dieselben Primteiler (aber möglicherweise mit niedrigerer Vielfachheit). Also ist $\mu_A \in \{(T - 2) \cdot T, (T - 2)^2 \cdot T\}$.

Eine direkte Berechnung liefert

$$((T - 2) \cdot T)(A) \neq 0.$$

Also ist $\mu_A = (T - 2)^2 \cdot T$.

[Alternativ könnte man im letzten Schritt auch die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 2 von A bestimmen und daraus auf die Gestalt von μ_A schließen.]

2. *Behauptung.* Ja, es gibt ein solches Polynom.

Beweis. Sei $p := T^{2022} \cdot \mu_A \in \mathbb{C}[T]$. Dann ist $\deg p = 2022 + \deg \mu_A = 2025$ (nach dem ersten Teil) und wegen $\mu_A(A) = 0$ folgt in $M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$:

$$p(A) = (T^{2022} \cdot \mu_A)(A) = A^{2022} \cdot \mu_A(A) = A^{2022} \cdot 0 = 0. \quad \square$$

[Alternativ kann man auch mit χ_A und dem Satz von Cayley–Hamilton argumentieren.]

3. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform folgt, dass die Jordansche Normalform von A nur Jordanblöcke zu den Eigenwerten 0 und 2 besitzt und dass (nach der Berechnung von μ_A im ersten Teil) der größte Jordanblock zum Eigenwert 0 die Größe 1 besitzt und der größte Jordanblock zum Eigenwert 2 die Größe 2 besitzt.

Da A eine 3×3 -Matrix ist, bleibt als einzige Möglichkeit (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) für die Jordansche Normalform von A nur

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. *Behauptung.* Nein, $\mathbb{C}^3[L(A)]$ ist kein freier $\mathbb{C}[T]$ -Modul.

Beweis. Ist V ein freier $\mathbb{C}[T]$ -Modul, so gilt für alle $x \in V \setminus \{0\}$ und alle $p \in \mathbb{C}[T] \setminus \{0\}$, dass $p \cdot x \neq 0$.

Der $\mathbb{C}[T]$ -Modul $\mathbb{C}^3[L(A)]$ ist nicht-trivial, da $\mathbb{C}^3 \neq \{0\}$ ist. Also gibt es ein Element $x \in \mathbb{C}^3[L(A)]$ mit $x \neq 0$. Nach Definition der $\mathbb{C}[T]$ -Modulstruktur gilt

$$\mu_A \cdot x = (\mu_A(A)) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Wegen $\mu_A \neq 0$ ist $\mathbb{C}^3[L(A)]$ somit kein freier $\mathbb{C}[T]$ -Modul. □

[Alternativ könnte man auch damit argumentieren, dass $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3[L(A)] = 3$ endlich ist und dass nicht-triviale freie $\mathbb{C}[T]$ -Moduln wegen $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T] = \infty$ unendlich-dimensional sind.]

Aufgabe 6 ($2 + 2 + 4 = 8$ Punkte).

1. Sei K ein Körper. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des *Tensorprodukts* zweier K -Vektorräume.
2. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft einer weiteren Konstruktion von Vektorräumen.
3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K . Das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ und die bilineare Abbildung $\otimes: V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ besitzen zusammen die folgende universelle Eigenschaft:

Für jeden K -Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $f: V \times W \longrightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\otimes: V \otimes_K W \longrightarrow Z$ mit

$$f_\otimes \circ \otimes = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f \text{ (bilinear)}} & Z \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! f_\otimes \text{ (linear)} & \\ V \otimes_K W & & \end{array}$$

2. Universelle Eigenschaft von Quotientenvektorräumen: Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und sei $U \subset V$ ein K -Untervektorraum. Dann besitzt der Quotientenvektorraum V/U zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\begin{aligned} \pi_U: V &\longrightarrow V/U \\ v &\longmapsto v + U \end{aligned}$$

die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden K -Vektorraum W und jede K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $U \subset \ker f$ gibt es genau eine K -lineare Abbildung $\bar{f}: V/U \rightarrow W$ mit

$$\bar{f} \circ \pi_U = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ V/U & & \end{array} \quad \exists! \bar{f}$$

[Alternativ könnte man zum Beispiel auch die universelle Eigenschaft direkter Summen oder von äußeren Produkten formulieren.]

3. Da V endlich-dimensional ist, ist $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^*$. Es genügt daher zu zeigen, dass die gegebene Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: V &\rightarrow V^* \\ x &\mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

injektiv ist.

Da φ linear ist, genügt es zu zeigen, dass $\ker \varphi = \{0\}$ ist. Sei $x \in \ker \varphi$. Dann folgt

$$\langle x, x \rangle = (\varphi(x))(x) = 0(x) = 0$$

bzw. $x = 0$ (wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts).