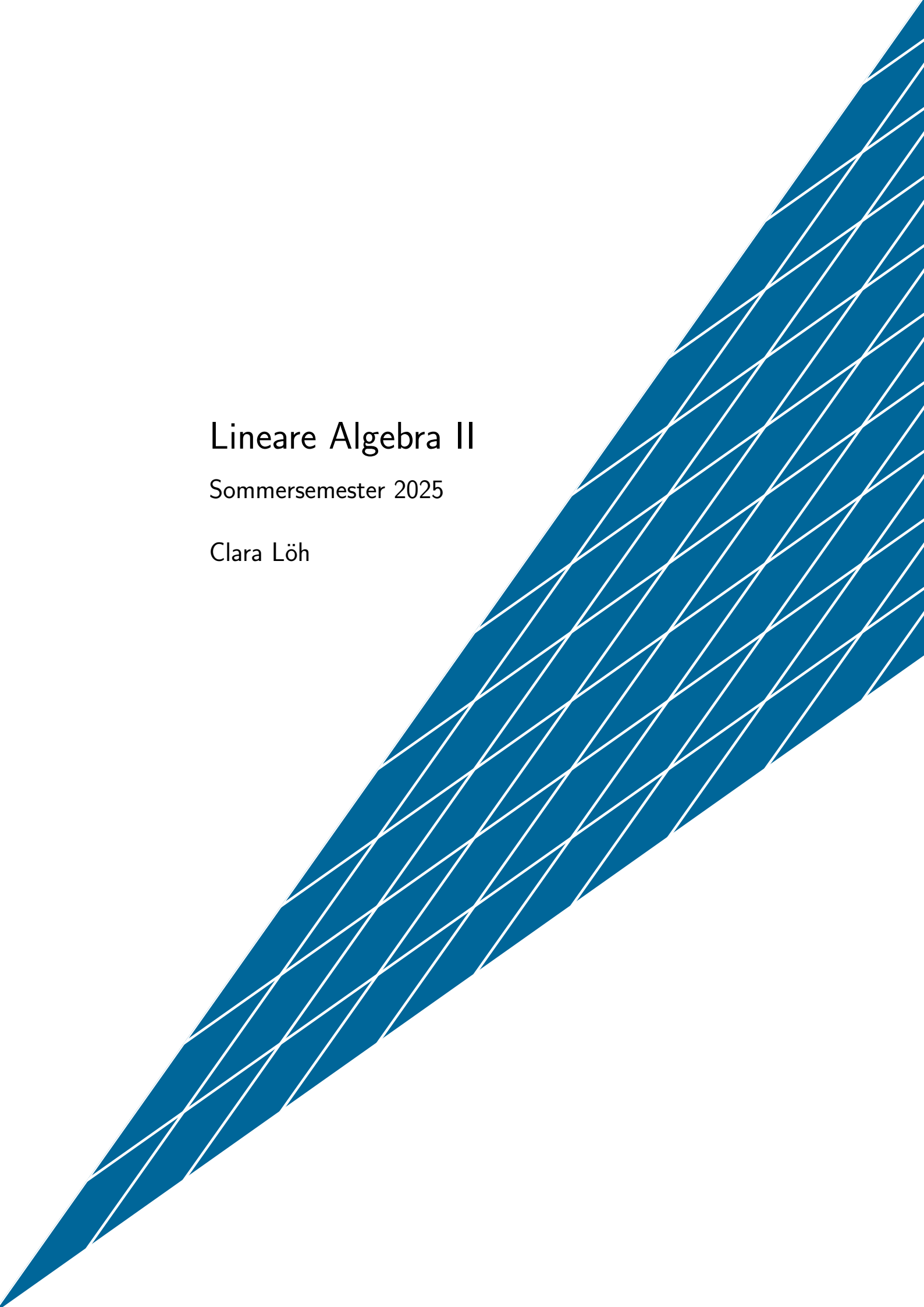
Lineare Algebra II

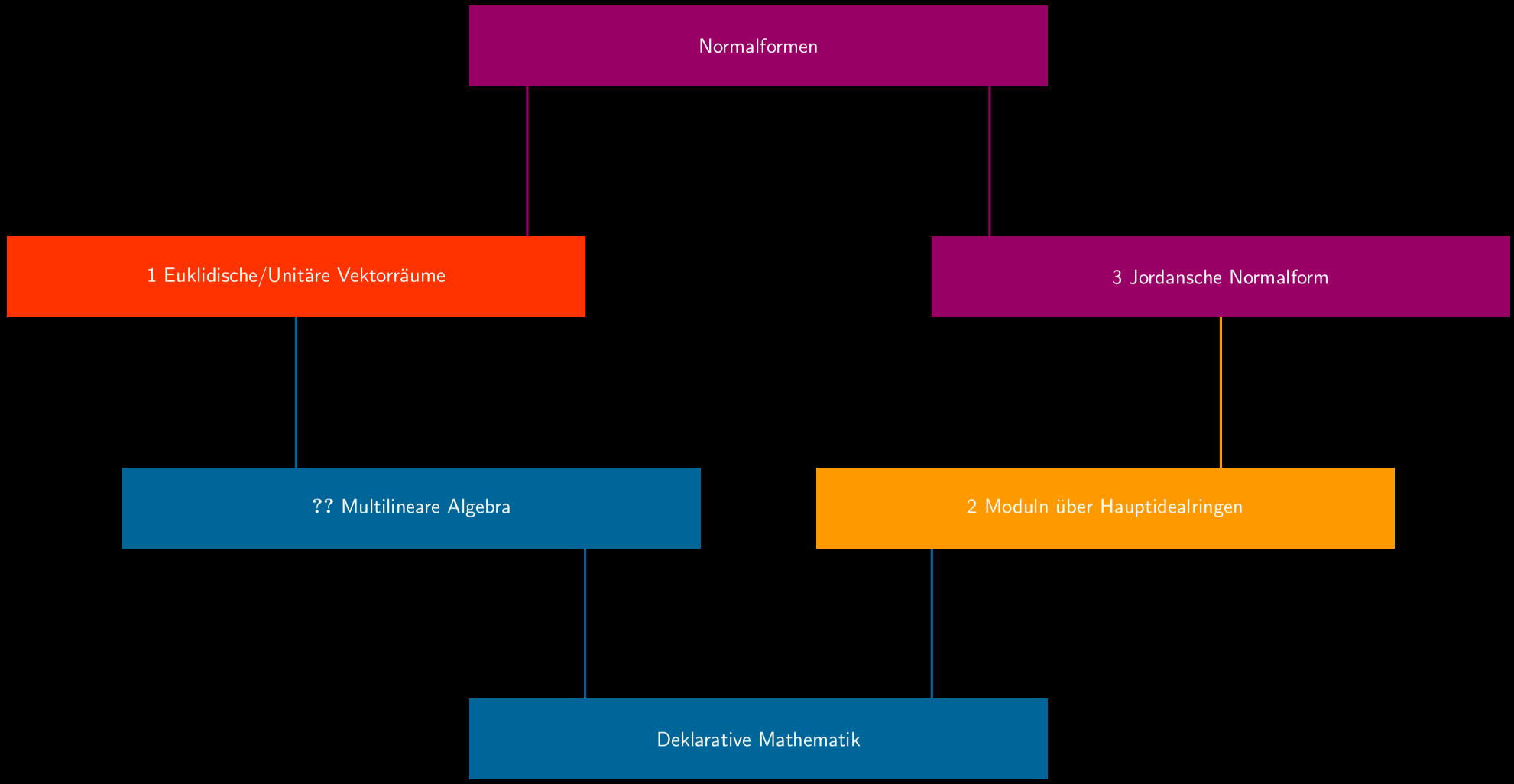
Sommersemester 2025

Clara Löh



Version vom 22. August 2025
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

Dungeon Map: Overworld



Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise ix

0 Einführung 1

1 Euklidische/Unitäre Vektorräume 5
- 1.1 Euklidische und unitäre Vektorräume 6
  - 1.1.1 Bilinearformen und Skalarprodukte 7
  - 1.1.2 Längen und Winkel 10
  - 1.1.3 Lineare Isometrien 16
  - 1.1.4 Matrizenkalkül für Bilinearformen 20
  - 1.1.5 Matrizenkalkül für Sesquilinearformen 23
- 1.2 Orthogonalität 25
  - 1.2.1 Orthogonale Vektoren 25
  - 1.2.2 Orthonormalbasen 26
  - 1.2.3 Orthogonale Projektionen 30
  - 1.2.4 Die orthogonale Gruppe 33
- 1.3 Spektralsätze 39
  - 1.3.1 Selbstadjungierte Endomorphismen 39
  - 1.3.2 Der Spektralsatz 41
  - 1.3.3 Hauptachsentransformation 47
  - 1.3.4 Der Trägheitssatz und die Signatur 49

2 Normalformen II: Moduln über Hauptidealringen 53
- 2.1 Zerlegung von Endomorphismen und Moduln 54
- 2.2 Ringe 56
  - 2.2.1 Ringe 56
  - 2.2.2 Ringhomomorphismen 59

2.3 Moduln 62
2.3.1 Moduln 62
2.3.2 Modulhomomorphismen 66
2.3.3 Ideale 69
2.3.4 Quotientenmoduln 70
2.3.5 Direkte Summen 75
2.4 Hauptidealringe 80
2.4.1 Hauptidealringe 80
2.4.2 Euklidische Ringe 81
2.4.3 Teilbarkeit und Primfaktoren 84
2.4.4 Der größte gemeinsame Teiler 91
2.5 Moduln über Hauptidealringen 95
2.5.1 Präsentationen von Moduln 96
2.5.2 Der Elementarteilersatz 98
2.5.3 Die Klassifikation endlich erzeugter Moduln 107

3 Normalformen III: Die Jordansche Normalform 115
3.1 Moduln zu Endomorphismen 116
3.1.1 Zerlegung von Endomorphismen: Modulversion 116
3.1.2 Zerlegung von Endomorphismen: Matrizenversion 118
3.2 Das Minimalpolynom 120
3.3 Die Jordansche Normalform 126
3.3.1 Vorbereitung: Algebraisch abgeschlossene Körper 129
3.3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform 130
3.3.3 Berechnung der Jordanschen Normalform 132

4 Multilineare Algebra 145
4.1 Homomorphismenräume 146
4.2 Das Tensorprodukt 149
4.2.1 Wozu das Tensorprodukt? 149
4.2.2 Rechnen mit Tensorprodukten 152
4.2.3 Konstruktion des Tensorprodukts 156
4.2.4 Anwendungen des Tensorprodukts 158
4.3 Das äußere Produkt 162
4.3.1 Wozu das äußere Produkt? 163
4.3.2 Rechnen mit äußeren Produkten 165
4.3.3 Konstruktion des äußeren Produkts 169
4.3.4 Anwendungen des äußeren Produkts 170

A Anhang A.1
A.1 Das griechische Alphabet A.2
A.2 Die komplexen Zahlen A.3
A.3 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus A.7
A.4 Anwendungen der Jordanschen Normalform A.9
A.5 Die LA-Matrix A.12

B Übungsblätter B.1

C Organisatorisches C.1
Literaturverzeichnis C.1
Wörterbuch C.3
Symbolverzeichnis C.11
Index C.11

Literaturhinweise

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

Sie sollten mehrere solche Bücher anschauen und dann entscheiden, (ob) welche davon für Sie als Ergänzung zur Vorlesung geeignet sind. Das Material wird nicht immer in derselben Reihenfolge präsentiert und es gibt bei Konventionen und Schwerpunkten Unterschiede.

Die nachfolgende Liste enthält Anregungen für ergänzende und vertiefende Literatur. Manche Dinge werden dort anders behandelt als in dieser Vorlesung!

Lineare Algebra

- S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014.
- G. Fischer. *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger*, 18. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- K. Jänich. *Lineare Algebra*, 11. Auflage, Springer, 2013.
- S. Lang. *Linear Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3. Auflage, Springer, 1987.
- J. Matoušek. *Thirty-three miniatures. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra*, *Student Mathematical Library*, 53. American Mathematical Society, 2010.

Logik und Mengenlehre

- G.S. Boolos, J.P. Burgess, R.C. Jeffrey. *Computability and Logic*, fifth edition, Cambridge University Press, 2007.
- P.J. Cameron. *Sets, Logic and Categories*, Universitext, Springer, 1998.
- H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2007.
- U. Friedrichsdorf, A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg, 1985.
- C.N. Delzell, A. Prestel. *Mathematical Logic and Model Theory: A Brief Introduction*, Universitext, Springer, 2011.
- W. Rautenberg. *Einführung in die mathematische Logik: Ein Lehrbuch*, Vieweg+Teubner, 2008.
- R.M. Smullyan, M. Fitting. *Set theory and the continuum problem*, überarbeitete Auflage, Dover, 2010.

Beweisen und Problemlösen

- J. Avigad, L. de Moura, S. Kong. *Theorem Proving in Lean*, https://lean-lang.org/theorem_proving_in_lean/, 2023.
- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
- J. Cummings. *Proofs: A Long-Form Mathematics Textbook*, Indepdently published, 2021.
- A.G. Konforowitsch. *Logischen Katastrophen auf der Spur*, zweite Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1994.
- L. Lamport. How to write a 21st century proof, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 11(1), 43–63, 2012.
- C. Löh. *Exploring Formalisation. A Primer in Human-Readable Mathematics in Lean 3 with Examples from Simplicial Topology*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, 11, Springer, 2022.
- G. Polya, J.H. Conway (Hrsg.). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2014.
- T. Tao. *Solving mathematical problems. A personal perspective*, Oxford University Press, 2006.

Weiterführende Literatur

- K. Jänich. *Vektoranalysis*, fünfte Auflage, Springer, 2005.
- S. Lang. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, dritte überarbeitete Auflage, Springer, 2002.
- S. Lang. *Real and Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 142, dritte Auflage, Springer, 1993.
- W. Rudin. *Functional Analysis*, zweite Auflage, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1991.

0
Einführung

Die Algebra befasst sich mit der abstrakten Struktur allgemeiner „Zahlenbereiche“. Eine besonders einfache und zugängliche Art solcher Strukturen sind lineare Strukturen, d.h. Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Wie wir bereits in der Linearen Algebra I gesehen haben, treten lineare Strukturen an vielen verschiedenen Stellen auf:

- Lösung linearer Gleichungssysteme,
- elementare ebene und räumliche Geometrie,
- Computergeometrie und dreidimensionale Modellierung,
- geschlossene Darstellung kombinatorischer Phänomene,
- als zentraler Approximationsbaustein in der Analysis,
- als erste Abstraktionsstufe in der Algebra,
- ...

Warum noch mehr Lineare Algebra?

Wir werden in der Vorlesung Lineare Algebra II die folgenden Themen behandeln und an passender Stelle auch Ausblicke auf Anwendungen geben:

- **Euklidische und unitäre Vektorräume.** Mithilfe der Methoden der Linearen Algebra lassen sich viele Aspekte der zwei- bzw. dreidimensionalen Geometrie gut beschreiben und berechnen. Zum Beispiel erhält man so einen rechnerischen Zugang zur Elementargeometrie.

- **Normalformen von Endomorphismen.** Wir werden die Existenz der Jordanschen Normalform beweisen und untersuchen, wie man diese vernünftig berechnen kann. Zum Beispiel ist dies bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme ein wichtiges Hilfsmittel.
- **Multilineare Algebra.** Wir werden die Grundlagen der multilinearen Algebra kennenlernen, wie zum Beispiel Tensorprodukte und äußere Produkte. Diese Konzepte treten zum Beispiel bei der Betrachtung der Geometrie gekrümmter Räume, sogenannter Mannigfaltigkeiten, auf.

Zusätzlich zu konkreten Konstruktionen werden wir uns auch an deklarative Mathematik im Sinne von universellen Eigenschaften gewöhnen.

Anmerkung für Lehramtsstudenten. Auf ganz natürliche Weise werden wir dabei Begriffen und Themen aus der Schulmathematik begegnen und diese vertiefen. Zudem begnegnen wir Aspekten der Mathematik, die in Zukunft Bestandteil der Schulmathematik werden könnten. Wichtiger als die Beherrschung des aktuellen Lehrplans ist es, ein solides Fundament zu erlernen, das es erlaubt, Mathematik inhaltlich korrekt, nachvollziehbar und souverän zu lehren und auf das der Unterricht im Rahmen des aktuellen und der zukünftigen Lehrpläne aufbauen kann.

Insbesondere haben die folgenden Themen der Vorlesung Lineare Algebra II einen direkten Bezug zu derzeitigem Schulstoff:

- Euklidische Vektorräume und die Beschreibung der zwei- bzw. dreidimensionalen Geometrie durch Konzepte aus der Linearen Algebra.
- Elementare Ringtheorie und Grundlagen der Teilbarkeitstheorie bzw. von Primelementen.
- Moduln über $\mathbb{Z}$ und die Lösung linearer Gleichungssysteme über den ganzen Zahlen.

Anmerkung zum Lernen (Skript)**.** Dieses Vorlesungsskript dokumentiert den Fortschritt dieser Vorlesung, die besprochenen Themen und zusätzliches optionales Material. Der Besuch der Vorlesung erleichtert es, die Entwicklung der Begriffe, Beweise, etc. nachzuvollziehen. Zusätzliches Material wird in GRIPS und auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt:

https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg2_ss25

Anhänge und Ausblicke sind *nicht* prüfungsrelevant, sondern dienen der Allgemeinbildung.

Das Skript dient keineswegs dazu, den Besuch der Vorlesung oder gar der Übungen zu ersetzen. Außerdem spiegelt sich in diesem Skript natürlich nur ein kleiner Ausschnitt der Linearen Algebra wider. Sie sollten sich unbedingt auch mithilfe anderer Quellen (Bücher!) selbst ein Bild des gesamten Gebietes machen. Referenzen der Form „Satz I.6.5.12“ verweisen auf die entsprechende Stelle im Skript zur Linearen Algebra I:

https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/lecture_notes.pdf

Wie der Name der Vorlesung bereits andeutet, ist es unabdingbar, die Inhalte der Linearen Algebra I zu beherrschen, um die Lineare Algebra II verstehen zu können. Lücken in der Linearen Algebra I sollten Sie also zügig füllen.

Anmerkung zum Lernen (Fingerübungen)**.** Dieses Vorlesungsskript enthält einige Selbsttests und Fingerübungen, deren Feedback teilweise in die PDF-Datei integriert ist. Diese Funktionalität beruht auf PDF Layers (nicht auf JavaScript) und wird von vielen PDF-Viewern unterstützt, z.B. Acrobat Reader, Evince, Foxit Reader, Okular, ... Einfacher Test, ob das funktioniert: Haben Sie auf "Nein" gedrückt?

Ja Nein

Sie sollten natürlich erst dann die Hinweise und Antworten ansehen, wenn Sie bereits über das Problem nachgedacht haben; man kann schließlich nie wissen, was passiert, wenn man voreilig auf irgendeinen Knopf drückt.

Literaturaufgabe (Bibliothek)**.** Wie finden Sie im Regensburger Katalog und in der Teilbibliothek Mathematik Literatur über die Themen der Vorlesung? Welche weiteren Informationsquellen könnten nützlich sein?

Zusätzliche Anregungen finden Sie auf S. ix.

Konvention. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthält 0.

1

Euklidische/Unitäre Vektorräume

Wir haben bereits gesehen, dass die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ geeignet sind, um Situationen der ebenen bzw. räumlichen Geometrie zu modellieren. Wir werden dies im folgenden vertiefen und erklären, wie man mithilfe von sogenannten Skalarprodukten grundlegende geometrische Größen wie Längen und Winkel beschreiben kann. Insbesondere werden wir den Orthogonalitätsbegriff und Isometrien von $\mathbb{R}^n$ eingehend untersuchen. Zusätzlich leiten wir Spektralsätze her, die in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle spielen.

Überblick über dieses Kapitel.

1.1 Euklidische und unitäre Vektorräume 6
1.2 Orthogonalität 25
1.3 Spektralsätze 39

1.1 Euklidische und unitäre Vektorräume

Wir werden uns im folgenden mit der Geometrie reeller bzw. komplexer Vektorräume befassen; daher werden wir uns meistens auf die Grundkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ einschränken. Die fundamentale geometrische Größe in $\mathbb{R}^n$ ist der euklidische Abstand von Punkten zum Ursprung; dieser Abstand ist in Anlehnung an den Satz von Pythagoras durch folgende Abbildung (die *euklidische Norm*) definiert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \end{aligned}$$

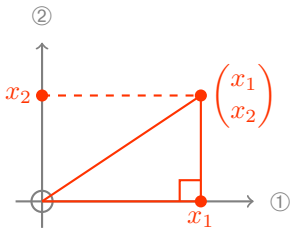


Abbildung 1.1.: Der Abstand vom Ursprung und der Satz von Pythagoras

Selbst wenn man die Wurzel ignoriert, ist diese Abbildung weit davon entfernt, linear zu sein. Mit einem kleinen Trick wird diese Abbildung zugänglich für die Methoden aus der linearen Algebra: Statt der Abbildung $\|\cdot\|_2$ betrachten wir allgemeiner die, zunächst komplizierter wirkende, Abbildung (das *Standardskalarprodukt*)

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j. \end{aligned}$$

Auch diese Abbildung ist nicht linear im eigentlichen Sinne, aber immerhin bilinear (d.h. linear in jedem Argument). Und wegen

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x,x\rangle_2}$$

ist es plausibel, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ dafür geeignet ist, euklidische Abstände zu untersuchen. Auch wenn unser Hauptinteresse dieser konkreten Abbildung gilt, zahlt es sich aus, die Theorie allgemeiner für sogenannte Skalarprodukte aufzuziehen.

1.1.1 Bilinearformen und Skalarprodukte

Wir führen zunächst die grundlegenden Begriffe für Skalarprodukte ein.

Definition 1.1.1 (Bilinearform, symmetrische Bilinearform)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

- Eine *Bilinearform auf* V ist eine bilineare Abbildung $V \times V \longrightarrow K$. Eine Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt dabei *bilinear*, wenn für jedes $x \in V$ die Abbildungen

$$b(\,\cdot\,, x)\colon V \longrightarrow K$$
$$b(x,\,\cdot\,)\colon V \longrightarrow K$$

  (über K) linear sind.

- Eine Bilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$b(x, y) = b(y, x)$$

  für alle $x, y \in V$ gilt.

Anmerkung zum Lernen (Form)**.** In der Linearen Algebra bezeichnen ... formen im Normalfall Abbildungen, deren Wertebereich im Grundkörper liegt.

Anmerkung zum Lernen (Determinante)**.** Erinnern Sie sich noch an die Eigenschaften von Determinanten? Vergleichen Sie diese mit der obigen Definition!

Definition 1.1.2 (Definitheit)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Die Bilinearform b heißt

positiv definit,	wenn: $\forall_{x \in V \setminus \{0\}} \quad b(x, x) > 0$.
negativ definit,	wenn: $\forall_{x \in V \setminus \{0\}} \quad b(x, x) < 0$.
positiv semidefinit,	wenn: $\forall_{x \in V} \quad b(x, x) \geq 0$.
negativ semidefinit,	wenn: $\forall_{x \in V} \quad b(x, x) \leq 0$.
indefinit,	wenn es $x, y \in V$ mit $b(x, x) > 0$ und $b(y, y) < 0$ gibt.

Definition 1.1.3 (Skalarprodukt)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt auf* V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V.

Der Name „Skalarprodukt“ erinnert daran, dass die Werte Skalare (d.h. Elemente aus dem Grundkörper) sind. Dies darf nicht mit der Skalarmultiplikation (aus der Vektorraumstruktur) verwechselt werden!

Caveat 1.1.4. Skalarprodukte werden oft durch spitze Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notiert. In LaTeX sollte das auf keinen Fall durch die binären Operatoren „<“ bzw. „>“ dargestellt werden, sondern immer durch vernünftige Klammern, wie zum Beispiel \langle und \rangle (aus dem Paket amsmath).

Beispiel 1.1.5.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j = x^{\mathsf{T}} \cdot y \end{aligned}$$

  ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$. Dieses wird auch als *euklidisches Skalarprodukt* bezeichnet.

  Dass es sich dabei tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt, ist schnell nachgerechnet: Die Bilinearität folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition I.4.2.14). Die Symmetrie folgt aus der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ und die positive Definitheit aus der Tatsache, dass ?

- Analog erhält man, indem man Summation durch allgemeine Integration ersetzt, das L^2-Skalarprodukt auf gewissen Funktionenräumen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} C\big([0,1], \mathbb{R}\big) \times C\big([0,1], \mathbb{R}\big) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx \end{aligned}$$

  ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C([0,1], \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ (nachrechnen).

  Auf ähnliche Weise erhält man auch ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren Folgen (s. Analysis I/II).

Würde man auf $\mathbb{C}^n$ analog zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ eine bilineare Abbildung definieren, so erhielte man keine positive Definitheit (da Quadrate komplexer Zahlen im allgemeinen keine positiven reellen Zahlen sind). Daher bringt man die komplexe Konjugation ins Spiel (Bemerkung A.2.9).

Definition 1.1.6 (hermitesches Skalarprodukt)**.** Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein *hermitesches Skalarprodukt auf* V ist eine hermitesche,[1] positiv definite Sesquilinearform auf V. Die Begriffe haben dabei die folgende Bedeutung:

[1] benannt nach Charles Hermite (1822–1901), einem französischen Mathematiker

- Eine Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine *Sesquilinearform*, wenn
  - für jedes $x \in V$ die Abbildung
    $$b(x, \cdot)\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$
    $\mathbb{C}$-linear ist
  - und die Abbildung
    $$b(\cdot, x)\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$
    $\mathbb{R}$-linear ist und
    $$\forall_{y\in V} \quad \forall_{\lambda\in\mathbb{C}} \quad b(\lambda \cdot y, x) = \overline{\lambda} \cdot b(y, x)$$
    erfüllt.
- Eine Sesquilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ist *hermitesch*, wenn
  $$\forall_{x,y\in V} \quad b(x, y) = \overline{b(y, x)}$$
  gilt; dabei ist $\overline{\cdot}$ die komplexe Konjugation. Insbesondere gilt in diesem Fall für alle $x \in V$, dass $b(x, x) = \overline{b(x, x)}$ ist, d.h., dass $b(x, x)$ reell ist.
- Eine hermitesche Sesquilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv definit*, wenn
  $$\forall_{x\in V\setminus\{0\}} \quad b(x, x) > 0.$$

Caveat 1.1.7. In manchen Quellen wird komplexe Linearität im ersten Argument und konjugierte Linearität im zweiten Argument gefordert. Dies führt natürlich letztendlich zur selben Theorie. Wir haben uns für die obige Variante entschieden, da diese gut mit dem Operator $\cdot^{\mathsf{H}}$ (s.u.) kompatibel ist.

Beispiel 1.1.8.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist
  $$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_2\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot y_j = (\overline{x})^{\mathsf{T}} \cdot y = x^{\mathsf{H}} \cdot y\end{aligned}$$
  ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, nämlich das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$. Dabei bezeichnet A^{H} für komplexe Matrizen A die Matrix, die man erhält, indem man A transponiert und alle Koeffizienten komplex konjugiert.

  Dass es sich dabei tatsächlich um ein hermitisches Skalarprodukt handelt, ist schnell nachgerechnet: Die Sesquilinearität folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition I.4.2.14) und der komplexen Konjugation. Dass die Abbildung hermitesch ist, folgt aus der

Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ und der Multiplikativität der komplexen Konjugation. Die positive Definitheit erhalten wir aus der Tatsache, dass $\overline{x} \cdot x = (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2$ für jede komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ eine Summe reeller Quadrate ist und Quadrate von reellen Zahlen ungleich Null stets positiv sind.

- Analog erhält man, indem man Summation durch allgemeine Integration ersetzt, das L^2-Skalarprodukt auf gewissen Funktionenräumen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} C\big([0,1],\mathbb{C}\big) \times C\big([0,1],\mathbb{C}\big) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx \end{aligned}$$

  ein hermitesches Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $C([0,1],\mathbb{C})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (nachrechnen).

  Auf ähnliche Weise erhält man auch ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{C})$ der quadratsummierbaren komplexwertigen Folgen (s. Analysis I/II).

Definition 1.1.9 (euklidischer/unitärer Vektorraum)**.**

- Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle$, bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.
- Ein *unitärer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einem hermiteschen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Beispiel 1.1.10. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ein euklidischer Vektorraum und $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ein unitärer Vektorraum.

1.1.2 Längen und Winkel

Wir kehren zu unserem eigentlichen Ziel zurück, nämlich zur Beschreibung geometrischer Größen wie Längen und Winkel. Wir beginnen mit Längen bzw. Abständen; diese Begriffe passen in den Kontext normierter Vektorräume, wobei Normen die „Länge“ von Vektoren (d.h. den Abstand zum Nullpunkt) messen.

Definition 1.1.11 (Norm, normierter Vektorraum)**.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Norm auf V* ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| \colon V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

  mit den folgenden Eigenschaften:

  - *Homogenität.* Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $x \in V$ ist $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, wobei $|\cdot|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ bezeichnet.
  - *Definitheit.* Für alle $x \in V$ ist $\|x\| \geq 0$ und Gleichheit tritt nur für $x = 0$ ein.
  - *Dreiecksungleichung.* Für alle $x, y \in V$ ist

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

- Ein *normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V.

Fingerübung 1.1.12. Die in der Definition von Normen geforderten Eigenschaften haben direkte geometrische Entsprechungen. Welche sind dies? Skizzieren Sie!

Definition 1.1.13 (induzierte Norm)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Dann definieren wir durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

die *von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm auf V*.

Fingerübung 1.1.14. Wenn man zeigen möchte, dass von Skalarprodukten induzierte „Normen“ tatsächlich Normen im Sinne von Definition 1.1.11 sind, sind mehrere Dinge nachzuweisen.

- Welche ?
- Welche Eigenschaft ist am schwierigsten zu zeigen ?

Um nachzuweisen, dass diese Konstruktion die Dreiecksungleichung erfüllt, verwenden wir das folgende Hilfsmittel:

Satz 1.1.15 (Ungleichung von Cauchy–Schwarz)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit induzierter „Norm“ $\|\cdot\|$ und seien $x, y \in V$. Dann gilt*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Ist $y = 0$, so sieht man leicht, dass die Behauptung gilt. Im folgenden nehmen wir daher $y \neq 0$ an. Die Idee ist, den Term $\langle x - \lambda \cdot y, x - \lambda \cdot y\rangle$ (der ja nicht-negativ ist!) für ein geeignetes λ besser zu verstehen. Wir betrachten dazu

$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2} \in \mathbb{C};$$

im euklidischen Fall ist dabei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt (sowohl im euklidischen als auch im unitären Fall!)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x - \lambda \cdot y, x - \lambda \cdot y \rangle && (\text{?}) \\
&= \langle x, x \rangle - \langle x, \lambda \cdot y \rangle - \langle \lambda \cdot y, x \rangle + \langle \lambda \cdot y, \lambda \cdot y \rangle && (\text{?}) \\
&= \langle x, x \rangle + \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot \langle y, y \rangle - \lambda \cdot \langle x, y \rangle - \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle x, y \rangle} && (\text{?}) \\
&= \|x\|^2 + \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \left|\langle x, y \rangle\right|^2 - 2 \cdot \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \left|\langle x, y \rangle\right|^2 \quad (\text{?}) \\
&= \|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \cdot \left|\langle x, y \rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\left|\langle x, y \rangle\right|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Aus dieser Ungleichung folgt mit der Monotonie der Wurzel und der Nicht-Negativität von $\|\cdot\|$ die gewünschte Ungleichung.

Aufgrund der positiven Definitheit tritt dabei Gleichheit genau dann auf, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$ ist. Man rechnet leicht nach, dass letztere Bedingung dazu äquivalent ist, dass x und y linear abhängig sind (Übungsaufgabe; diese Rechnung erklärt insbesondere auch, wie man auf die Definition von λ kommt ...). □

Korollar 1.1.16 (Normen aus Skalarprodukten)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit induzierter „Norm“ $\|\cdot\|$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V.*

Beweis. Die induzierte Norm ist wohldefiniert, da $\langle x, x \rangle$ für alle $x \in V$ reell und nicht-negativ ist.

Homogenität und Definitheit folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften des (hermiteschen) Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Es bleibt also die Dreiecksungleichung zu zeigen: Seien $x, y \in V$. Dann ist aufgrund der Bi-/Seqsuilinearität (sozusagen die binomische Formel für Skalarprodukte)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Da $\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2 \cdot \mathrm{Re}\langle x, y \rangle$ reell ist und nach oben durch $2 \cdot |\langle x, y \rangle|$ beschränkt ist, folgt daraus

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \left|\langle x, y \rangle\right| + \|y\|^2.$$

Mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung (Satz 1.1.15) erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2\\ &= \big(\|x\|+\|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

Mit der Monotonie der Wurzel und Positivität der Abbildung $\|\cdot\|$ folgt daraus $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, wie gewünscht. □

Beispiel 1.1.17 (euklidische Norm)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann schreiben wir $\|\cdot\|_2$ für die von $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Norm und bezeichnen diese als *euklidische Norm auf* $\mathbb{R}^n$.

Falls eine Norm von einem Skalarprodukt induziert wird, so kann man das Skalarprodukt aus der Norm zurückgewinnen:

Proposition 1.1.18 (Polarisierung)**.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm auf V.*

1. *Im euklidischen/reellen Fall gilt für alle $x, y \in V$:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\cdot\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$$

2. *Im unitären/komplexen Fall gilt für alle $x, y \in V$:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\cdot\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) - \frac{i}{4}\cdot\big(\|x+i\cdot y\|^2 - \|x-i\cdot y\|^2\big)$$

Beweis. Dies folgt durch direktes Nachrechnen, indem man die Terme auf der rechten Seite durch das Skalarprodukt ausdrückt und aus„multipliziert“ (Übungsaufgabe). □

Caveat 1.1.19 (Norm ohne Skalarprodukt)**.** Es gibt jedoch auch Normen, die *nicht* von Skalarprodukten induziert werden: Die Norm (nachrechnen!)

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\\ x &\longmapsto |x_1| + |x_2|\end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^2$ wird *nicht* von einem Skalarprodukt induziert: *Angenommen,* $\|\cdot\|_1$ wäre von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ induziert. Mit der Polarisierungsformel (Proposition 1.1.18) folgt dann für

$$x := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle_1 &= \frac{1}{2}\cdot(2^2 - 2^2 - 2^2) = -2\\ \langle x, -y\rangle_1 &= \frac{1}{2}\cdot(2^2 - 2^2 - 2^2) = -2 \neq -(-2),\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Also kann es ein solches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ nicht geben.

Bemerkung 1.1.20 (Norm $\rightsquigarrow$ Metrik)**.** Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

eine Metrik auf V (nachrechnen). Insbesondere erhalten wir so auf normierten Vektorräumen auch eine Topologie (d.h. offene bzw. abgeschlossene Mengen) und einen Begriff von Kompaktheit bzw. Stetigkeit (s. Analysis I/II).

Aus der Analysis ist bekannt, dass alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen im folgenden Sinne äquivalent sind. Im unendlich-dimensionalen Fall stimmt das im allgemeinen *nicht*!

Satz 1.1.21 (Äquivalenz von Normen im endlich-dimensionalen Fall)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum und seien $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|'$ Normen auf V. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit*

$$\forall_{x \in V} \quad \frac{1}{C} \cdot \|x\| \leq \|x\|' \leq C \cdot \|x\|.$$

Insbesondere induzieren $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ dieselbe Topologie auf V (d.h. dieselben offenen/abgeschlossenen Mengen, dieselben stetigen Abbildungen, ...).

Beweis. Diese Aussage kann man durch den Vergleich mit der 1-Norm und ein Kompaktheitsargument beweisen (s. Analysis I/II). □

Ausblick 1.1.22 (Banachräume, Hilberträume, Funktionalanalysis)**.** Die Funktionalanalysis beschäftigt sich systematisch mit der Theorie der stetigen linearen Abbildungen auf (unendlich-dimensionalen) normierten Vektorräumen. Vollständige normierte Vektorräume bezeichnet man als *Banachräume*; vollständige euklidische/unitäre Vektorräume bezeichnet man als *Hilberträume*.

Zusätzlich zu Abständen/Längen liefern Skalarprodukte auch einen Winkelbegriff auf euklidischen Vektorräumen:

Definition 1.1.23 (Winkel)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$ und seien $x, y \in V$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann ist der *Winkel zwischen x und y* definiert als

$$\sphericalangle(x, y) := \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0, \pi].$$

Dabei bezeichnet $\arccos\colon [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$ (Anhang A.3; Analysis I). Man beachte, dass das Argument von arccos in der

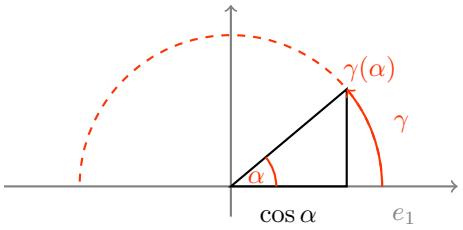


Abbildung 1.2.: Winkel, Bogenlänge und Ankathete

obigen Definition nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung (Satz 1.1.15) tatsächlich im Intervall $[-1, 1]$ liegt.

Wie kommt man auf diese Definition von Winkeln bzw., warum liefert diese Definition einen sinnvollen Winkelbegriff? In der euklidischen Ebene entspricht die obige Definition der Beschreibung des Winkels mithilfe des Kosinussatzes (via Polarisierung). Außerdem stimmt die obige Definition mit der klassischen Anschauung von Winkeln über Bogenlängen überein (Abbildung 1.2):

Bemerkung 1.1.24 (klassische Anschauung)**.** Dazu betrachten wir in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mithilfe geeigneter Integrale kann man die Länge von (glatten) Kurven bestimmen (Analysis II). In diesem Fall erhält man für alle $\alpha \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[0,\alpha]}) &= \int_0^\alpha \big\|\dot\gamma(t)\big\|_2 \, dt && \text{(Definition der Länge von Kurven)} \\ &= \alpha \\ &= \arccos\Big(\frac{\cos\alpha + 0}{1 \cdot 1}\Big) \\ &= \sphericalangle\big(e_1, \gamma(\alpha)\big). && \text{(Beispiel 1.1.25)} \end{aligned}$$

Anmerkung für Lehramtsstudenten (Winkel in der Schule)**.** Versuchen Sie zu verstehen, wie diese Begrifflichkeiten mit dem in der Schule unterrichteten Winkelbegriff zusammenhängen. Achten Sie dabei insbesondere darauf, welche mathematischen Konzepte dabei durch anschauliche Gegenstücke ersetzt werden!

Beispiel 1.1.25. In $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ gilt (so wie wir es auch aus der Anschauung erwarten würden)

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \arccos \frac{\langle e_1, e_2 \rangle_2}{\|e_1\|_2 \cdot \|e_2\|_2} = \text{?}$$

und für alle $\varphi \in [0, \pi]$:

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, e_1\right) = \text{?}$$

Beispiel 1.1.26 (senkrechte Vektoren)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V \setminus \{0\}$. Nach Definition des Winkels gilt genau dann $\sphericalangle(x, y) = \pi/2$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist. In diesem Fall nennt man die Vektoren x und y *orthogonal*. Dieses Konzept ist außerordentlich wichtig und wird ausführlich in Kapitel 1.2 behandelt.

Ausblick 1.1.27 (elementare ebene und räumliche Geometrie)**.** Wir haben alle Hilfsmittel beisammen, um die (elementare) ebene und räumliche Geometrie mithilfe der euklidischen Vektorräume $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ bzw. $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ zu modellieren und zu entwickeln. Zum Beispiel könnte man nun die Begriffe „Dreieck“ und „Kreis“ definieren und die Standardsätze darüber beweisen (z.B. die Invarianz der Winkelsumme in euklidischen Dreiecken etc.) [6]. Wir werden uns im folgenden auf andere, algebraischere, Aspekte konzentrieren.

1.1.3 Lineare Isometrien

Wir erinnern uns daran, dass zu einer mathematischen Theorie nicht nur Objekte, sondern immer auch strukturerhaltende Morphismen gehören. Im Fall der normierten Vektorräume sind dies die (linearen) Isometrien.

Definition 1.1.28 (lineare isometrische Einbettung, lineare Isometrie)**.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(V', \|\cdot\|')$ normierte Vektorräume.

- Eine *lineare isometrische Einbettung* $(V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V', \|\cdot\|')$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow V'$, die folgendes erfüllt:

$$\forall_{x \in V} \quad \big\|f(x)\big\|' = \|x\|$$

- Eine *lineare Isometrie* $(V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V', \|\cdot\|')$ ist eine lineare isometrische Einbettung $f\colon V \longrightarrow V'$, für die es eine lineare isometrische Einbettung $g\colon V' \longrightarrow V$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_{V'} \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_V$$

  gibt.

Caveat 1.1.29. Die Normen sind in diesem Kontext Teil der Struktur. Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ *verschiedene* Normen auf V, so ist $\mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ *keine* lineare isometrische Einbettung $(V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V, \|\cdot\|')$.

Bemerkung 1.1.30 (alternative Charakterisierung linearer Isometrien)**.** Jede lineare isometrische Einbettung ist injektiv (nachrechnen mithilfe der Definitheit der Normen).

Lineare isometrische Einbettungen zwischen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind also genau dann Isomorphismen, wenn die beiden Vektorräume dieselbe Dimension haben (Korollar I.4.4.14). Da in diesem Fall die inverse Abbildung auch automatisch eine isometrische Einbettung ist (nachrechnen), folgt: Lineare isometrische Einbettungen zwischen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind genau dann (lineare) Isometrien, wenn die beiden Vektorräume dieselbe Dimension haben.

Beispiel 1.1.31 (Isometrien in der euklidischen Ebene)**.**

- *Drehungen.* Wir erinnern an die Rotationsmatrizen: Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und sei

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

  Dann beschreibt $L(R(\varphi))\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Rotation um φ um den Nullpunkt (Abbildung 1.3).

  Die Abbildung $L(R(\varphi))\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist isometrisch bezüglich $\|\cdot\|_2$, denn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned} \|R(\varphi)\cdot x\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot x_1 - \sin\varphi\cdot x_2 \\ \sin\varphi\cdot x_1 + \cos\varphi\cdot x_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \cos^2\varphi\cdot x_1^2 - 2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot x_1\cdot x_2 + \sin^2\varphi\cdot x_2^2 \\ &+ \sin^2\varphi\cdot x_1^2 + 2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot x_1\cdot x_2 + \cos^2\varphi\cdot x_2^2 \\ &= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cdot(x_1^2 + x_2^2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 \qquad (\ ? \ ) \\ &= \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

- *Spiegelungen.* Die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}\cdot e_2$ wird durch die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

  beschrieben. Die Abbildung $L(S)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist isometrisch bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$, denn für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\|S\cdot x\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2.$$

- *Translationen.* Sei $a \in \mathbb{R}^2$ und sei

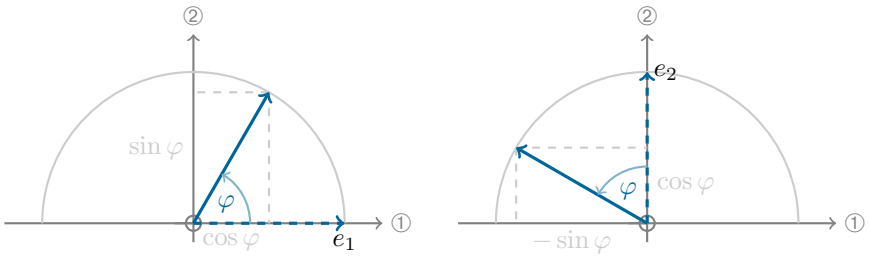


Bild von e_1 Bild von e_2

Abbildung 1.3.: Zusammenhang zwischen Rotation und Rotationsmatrix

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

die zugehörige Translationsabbildung. Dann ist f *nicht* linear (falls $a \neq 0$ ist), aber im folgenden Sinne abstandserhaltend bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Metrik: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\big\|f(x) - f(y)\big\|_2 = \|x - y\|_2.$$

- *Streckungen.* Streckungs-/Skalierungsabbildungen sind im allgemeine *keine* linearen Isometrien: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist die Streckungsabbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

ein Isomorphismus und genau dann bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ isometrisch, wenn $|\lambda| =$? ist.

Bemerkung 1.1.32 (allgemeine euklidische Isometrien)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die isometrisch bezüglich des euklidischen Abstands ist, die also

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n} \quad \big\|f(x) - f(y)\big\|_2 = \|x - y\|_2$$

erfüllt. Dann ist f bereits affin linear, d.h. die „verschobene“ Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) - f(0) \end{aligned}$$

ist $\mathbb{R}$-linear (und eine lineare Isometrie in unserem Sinne). Der Beweis dieser Tatsache ist elementar [6, Satz 2.5.1], würde uns aber von unseren eigentlichen Zielen zu weit entfernen. Es ist daher auch geometrisch (nicht nur aus dem Blickwinkel der Linearen Algebra) sinnvoll, sich auf lineare Isometrien einzuschränken.

Wir haben bisher nur Strukturerhaltung bezüglich der Norm gefordert. Im euklidischen und unitären Fall könnte man zusätzlich verlangen, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt. Tatsächlich muss man dies nicht zusätzlich verlangen, da dank Polarisierung der folgende Starrheitssatz gilt:

Proposition 1.1.33 (lineare Isometrien sind winkeltreu)**.** *Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ euklidische Vektorräume, sei $f\colon V \longrightarrow V'$ eine lineare Isometrie bezüglich den induzierten Normen und seien $x, y \in V$.*

1. *Dann gilt $\big\langle f(x), f(y) \big\rangle' = \langle x, y \rangle$.*
2. *Ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so gilt (wobei der Winkel auf der linken Seite über $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ definiert ist und der auf der rechten Seite über $\langle \cdot, \cdot \rangle$)*

$$\sphericalangle\big(f(x), f(y)\big) = \sphericalangle(x, y).$$

Beweis. Zu 1. Dies ergibt sich direkt aus der Polarisierungsgleichung (Proposition 1.1.18) und der Isometrieeigenschaft (nachrechnen).

Zu 2. Es gelte $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Da f ein Isomorphismus ist, ist dann auch $f(x) \neq 0$ und $f(y) \neq 0$; insbesondere ist der Winkel $\sphericalangle(f(x), f(y))$ definiert. Die Definition des Winkels durch das Skalarprodukt bzw. die Norm liefert mit dem ersten Teil, dass $\sphericalangle\big(f(x), f(y)\big) = \sphericalangle(x, y)$ (nachrechnen). □

Ein Spezialfall der Isomorphismen sind Automorphismen. Im Fall der linearen Isometrien erhält man so die Symmetriegruppe:

Definition 1.1.34 (Isometriegruppe)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann bildet

$$\mathrm{Isom}\big(V, \|\cdot\|\big) := \big\{ f \;\big|\; f\colon (V, \|\cdot\|) \longrightarrow (V, \|\cdot\|) \text{ ist eine lineare Isometrie} \big\}$$

eine Gruppe bezüglich Abbildungskomposition (nachrechnen) und id_V, die *Isometriegruppe von* $(V, \|\cdot\|)$.

Wir untersuchen in Kapitel 1.2.4 die Isometriegruppen der Anschauungsräume $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ bzw. $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ mithilfe des Orthogonalitätsbegriffs systematisch und erhalten so eine explizite Beschreibung aller Isometrien der euklidischen Ebene bzw. des euklidischen Raums. Aufbauend darauf könnte man zum Beispiel die Symmetriegruppen der platonischen Körper explizit berechnen.

1.1.4 Matrizenkalkül für Bilinearformen

Es stellt sich die natürliche Frage, wie man die Menge aller Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ oder allgemeiner der Bilinearformen (mit gewissen Eigenschaften) gut beschreiben und klassifizieren kann. Als Vorbereitung dafür überlegen wir uns, wie man diese Fragestellungen in der Sprache von Matrizen ausdrücken kann.

Da es etwas unübersichtlich ist, den reellen und den komplexen Fall gleichzeitig zu behandeln, konzentrieren wir uns zuerst auf den reellen Fall und geben im Anschluss die entsprechenden Resultate im komplexen Fall an (Kapitel 1.1.5).

Anmerkung zum Lernen. Erinnern Sie sich an den Matrizenkalkül für lineare Abbildungen?

Bemerkung 1.1.35 (der Raum der Bilinearformen)**.** Ist V ein Vektorraum über einem Körper K, so schreiben wir $\mathrm{Bil}_K(V)$ für die Menge aller Bilinearformen auf V. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation bildet $\mathrm{Bil}_K(V)$ einen K-Vektorraum (nachrechnen).

Bilinearformen lassen sich wie folgt durch Matrizen darstellen, unter Verwendung der Notation aus (Korollar I.4.3.3 und Kapitel I.5).

Proposition 1.1.36 (Bilinearformen aus Matrizen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Dann sind*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Bil}_K(V) &\longrightarrow \mathrm{M}_{n\times n}(K) \\ b &\longmapsto M_C(b) := \big(b(c_j, c_k)\big)_{j,k\in\{1,\ldots,n\}}, \\ \psi\colon \mathrm{M}_{n\times n}(K) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_K(V) \\ A &\longmapsto B_C(A) \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen. Dabei verwenden wir die folgende Notation: Für $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ sei

$$\begin{aligned} B_C(A)\colon V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto T_{C,E_n}(x)^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(y). \end{aligned}$$

Beweis. Zu φ: Eine einfache Rechnung zeigt, dass φ linear ist (nachrechnen).

Zu ψ: Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, so zeigen dieselben Überlegungen wie bei der Definition des euklidischen Skalarproduktes, dass $B_C(A)$ eine Bilinearform auf V ist. Außerdem ist ψ linear (nachrechnen).

Zu $\varphi \circ \psi$: Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann ist $\varphi \circ \psi(A) = A$, denn: Für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned}\big(\varphi\circ\psi(A)\big)_{j,k} &= \big(T_{C,E_n}(c_j)\big)^{\mathsf{T}}\cdot A\cdot T_{C,E_n}(c_k)\\ &= e_j^{\mathsf{T}}\cdot A\cdot e_k = A_{j,k}.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass Matrixmultiplikation mit den Standardeinheitsvektoren Zeilen bzw. Spalten extrahiert (Beispiel I.4.2.11).

Zu $\psi\circ\varphi$: Sei $b\in\mathrm{Bil}_K(V)$. Dann ist $\psi\circ\varphi(b)=b$, denn: Aufgrund der Bilinearität von $\psi\circ\varphi(b)$ und b genügt es zu zeigen, dass diese beiden Abbildungen auf Paaren von Basisvektoren aus C übereinstimmen (nachrechnen). Für alle $j,k\in\{1,\dots,n\}$ gilt nach Konstruktion

$$\big(\psi\circ\varphi(b)\big)(c_j,c_k) = e_j^{\mathsf{T}}\cdot M_C(b)\cdot e_k = \big(M_C(b)\big)_{j,k} = b(c_j,c_k).$$

Auch dabei haben wir wieder verwendet, dass Matrixmultiplikation mit den Standardeinheitsvektoren Zeilen bzw. Spalten extrahiert. □

Beispiel 1.1.37 (Standardskalarprodukt)**.** Sei K ein Körper. Ist $V=K^n$ und $C=E_n$ die Standardbasis, so schreiben wir kurz $M(b):=M_{E_n}(b)$ und $B(A):=B_{E_n}(A)$. Die Definition von $B(A)$ vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned}B(A)\colon K^n\times K^n &\longrightarrow K\\ (x,y) &\longmapsto x^{\mathsf{T}}\cdot A\cdot y.\end{aligned}$$

Ist $K=\mathbb{R}$, so ist $B(I_n)$ nichts anderes als ?

In Analogie zu Proposition I.5.3.19 und Proposition I.6.5.3 erhalten wir:

Proposition 1.1.38 (Basiswechsel und Matrizen von Bilinearformen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n\in\mathbb{N}$, sei $b\in\mathrm{Bil}_K(V)$, sei C eine Basis von V und sei $A\in\mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Matrix $S\in\mathrm{GL}_n(K)$ mit*
$$A = S^{\mathsf{T}}\cdot M_C(b)\cdot S.$$
2. *Es gibt eine Basis D von V mit $A=M_D(b)$.*

Beweis. Wir machen zunächst eine Vorüberlegung zum Basiswechsel: Ist D eine Basis von V und ist $S:=M_{D,C}\in\mathrm{GL}_n(K)$ die zugehörige Basiswechselmatrix, so erhalten wir

$$\begin{aligned}b(x,y) &= T_{C,E_n}(x)^{\mathsf{T}}\cdot M_C(b)\cdot T_{C,E_n}(y) && \text{(Definition von } M_C(b))\\ &= \big(S\cdot T_{D,E_n}(x)\big)^{\mathsf{T}}\cdot M_C(b)\cdot S\cdot T_{D,E_n}(y) && \text{(da } M_{D,C}\cdot T_{D,E_n}(x)=T_{C,E_n}(x))\\ &= T_{D,E_n}(x)^{\mathsf{T}}\cdot\big(S^{\mathsf{T}}\cdot M_C(b)\cdot S\big)\cdot T_{D,E_n}(y) && \text{(Eigenschaften von } \cdot^{\mathsf{T}})\end{aligned}$$

für alle $x, y \in V$. Mit Proposition 1.1.36 (angewendet auf die Basis D) folgt aus dieser Gleichung die Basiswechselformel

$$M_D(b) = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S.$$

Zu 2. $\Longrightarrow$ 1.*:* Es gebe eine Basis D von V mit $A = M_D(b)$. Die Vorüberlegung liefert $A = M_D(b) = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S$ für $S := M_{D,C} \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Zu 1. $\Longrightarrow$ 2.*:* Es gebe eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S$. Da S invertierbar ist, bilden die Spalten $(s_1, \ldots, s_n)$ von S eine Basis von K^n. Also ist

$$D := \big(T_{E_n,C}(s_1), \ldots, T_{E_n,C}(s_n)\big)$$

eine Basis von V und es gilt nach Konstruktion $M_{D,C} = S$ (nachrechnen!). Nach der Vorüberlegung ist somit $A = S^\mathsf{T} \cdot M_C(b) \cdot S = M_D(b)$. □

Caveat 1.1.39. Man beachte, dass sich die Basiswechselformel für Matrizen zu Bilinearformen von der Basiswechselformel für Matrizen zu linearen Abbildungen signifikant unterscheidet! Im bilinearen Fall involviert die Transformation das *Transponierte* der Basiswechselmatrix, im linearen Fall das *Inverse*.

Beispiel 1.1.40 (Basiswechselwunder für Bilinearformen)**.** Wir betrachten die Bilinearform

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 5 \cdot x_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x_1 \cdot y_2 + 3 \cdot x_2 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$M_{E_2}(b) = \text{?}$$

Für die Basis (nachrechnen!)

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M_C(b) &= M_C^\mathsf{T} \cdot M_{E_2}(b) \cdot M_C \qquad (\text{?}) \\ &= \text{?} \end{aligned}$$

Wie im Fall linearer Abbildungen kann also auch bei der Betrachtung von Bilinearformen der Übergang zu einer anderen Basis die Untersuchung erheblich vereinfachen.

Mithilfe von Proposition 1.1.36 und Proposition 1.1.38 können wir statt mit Bilinearformen auch mit Matrizen arbeiten. Es stellt sich daher die Frage,

wie sich Eigenschaften von Bilinearformen in entsprechende Eigenschaften von Matrizen übersetzen.

Proposition 1.1.41 (Symmetriekriterium)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, sei C eine Basis und sei $b\colon V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform auf K. Dann ist b genau dann symmetrisch, wenn die Matrix $M_C(b)$ symmetrisch ist.*

Beweis. Ist b symmetrisch, so folgt aus der Definition von $M_C(b)$, dass die Matrix $M_C(b)$ symmetrisch ist.

Sei umgekehrt $A := M_C(b)$ symmetrisch. Da 1×1-Matrizen symmetrisch sind, gilt $b(x,y) = b(x,y)^\mathsf{T}$ für alle $x, y \in V$. Mit Proposition 1.1.36 und der Kompatibilität von Transponieren und Matrixmultiplikation (nachrechnen) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(x,y)^\mathsf{T} && (\text{da } b(x,y) \in K \text{ ist}) \\ &= \big(B_C(A)(x,y)\big)^\mathsf{T} \\ &= \big(T_{C,E_n}(x)^\mathsf{T} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(y)\big)^\mathsf{T} \\ &= T_{C,E_n}(y)^\mathsf{T} \cdot A^\mathsf{T} \cdot (T_{C,E_n}(x)^\mathsf{T})^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Da A nach Voraussetzung symmetrisch ist, folgt

$$\begin{aligned} b(x,y) &= T_{C,E_n}(y)^\mathsf{T} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(x) \\ &= B_C(A)(y,x) \\ &= b(y,x). \end{aligned}$$

Also ist b symmetrisch. □

Um symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$ zu klassifizieren genügt es also, symmetrische Matrizen in $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ zu klassifizieren. Dies werden wir in Kapitel 1.3 genauer untersuchen.

Etwas komplizierter ist die Lage bei der Untersuchung von Definitheit.

Definition 1.1.42 (Definitheit von Matrizen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *positiv definit* wenn die Bilinearform $B(A)$ auf $\mathbb{R}^n$ positiv definit ist. Analog definert man negative Definitheit, ... für Matrizen.

Die Definitheit von symmetrischen Matrizen über $\mathbb{R}$ lässt sich an den Eigenwerten ablesen (Korollar 1.3.14).

Die Klassifikation der Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ erfolgt in Kapitel 1.2.2.

1.1.5 Matrizenkalkül für Sesquilinearformen

Analog können wir im komplexen Fall verfahren. Dazu ersetzen wir an den enstprechenden Stellen $\cdot^\mathsf{T}$ durch $\cdot^\mathsf{H}$.

Bemerkung 1.1.43 (der Raum der Sesquilinearformen)**.** Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so schreiben wir $\mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V)$ für die Menge aller Sesquilinearformen auf V. Bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation bildet $\mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V)$ einen $\mathbb{C}$-Vektorraum (nachrechnen).

Proposition 1.1.44 (Sesquilinearformen aus Matrizen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine Basis von V. Dann sind*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V) &\longrightarrow \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ b &\longmapsto M_C(b) = \big(b(c_j, c_k)\big)_{j,k\in\{1,\ldots,n\}}, \\ \psi\colon \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V) \\ A &\longmapsto B_C^{\mathbb{C}}(A) \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Dabei verwenden wir die folgende Notation: Für $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sei

$$\begin{aligned} B_C^{\mathbb{C}}(A)\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto T_{C,E_n}(x)^{\mathsf{H}} \cdot A \cdot T_{C,E_n}(y). \end{aligned}$$

Beweis. Dies zeigt man analog zu Proposition 1.1.36. □

Beispiel 1.1.45. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ erhält man in der obigen Notation als $B_{E_n}^{\mathbb{C}}(I_n)$.

Proposition 1.1.46 (Basiswechsel und Matrizen von Sesquilinearformen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei $b \in \mathrm{Sil}_{\mathbb{C}}(V)$, sei C eine Basis von V und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit*

$$A = S^{\mathsf{H}} \cdot M_C(b) \cdot S.$$

2. *Es gibt eine Basis D von V mit $A = M_D(b)$.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum reellen Fall (Proposition 1.1.38). □

Das komplexe Analogon zu symmetrischen Matrizen sind selbstadjungierte Matrizen.

Definition 1.1.47 (selbstadjungierte Matrix)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist *selbstadjungiert*, wenn $A^{\mathsf{H}} = A$ ist, d.h., wenn

$$\forall_{j,k\in\{1,\ldots,k\}} \quad \overline{A_{k,j}} = A_{j,k}.$$

Proposition 1.1.48 (hermitesche Sesquilinearformen aus selbstadjungierten Matrizen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, sei C eine Basis*

von V und sei $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Dann ist b genau dann hermitesch, wenn die Matrix $M_C(b)$ selbstadjungiert ist.

Beweis. Der Beweis ist analog zum reellen Fall (Proposition 1.1.41), wobei wir statt Transponieren den Operator $\cdot^{\mathsf{H}}$ verwenden. □

1.2 Orthogonalität

Der Winkelbegriff (zu einem gegebenen Skalarprodukt) liefert insbesondere auch eine Definition von Orthogonalität. Wir betrachten orthogonale Vektoren und zeigen, dass jeder euklidische Vektorraum eine sogenannte Orthonormalbasis besitzt. Orthonormalbasen liefern in vielen geometrischen Anwendungen bequeme Koordinaten.

1.2.1 Orthogonale Vektoren

Wir haben bereits gesehen, wie man den Winkel $\pi/2$ (der anschaulich zur Orthogonalität korrespondiert) mithilfe des Skalarprodukts charakterisieren kann (Beispiel 1.1.26). Es ist nützlich, diesen Begriff auch auf den Nullvektor auszudehnen:

Definition 1.2.1 (orthogonal)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum.

- Vektoren $x, y \in V$ heißen *orthogonal*, falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch
$$x \perp y.$$
- Allgemeiner nennen wir Teilmengen $A, B \subset V$ *orthogonal* (und schreiben dann $A \perp B$), wenn
$$\forall_{x \in A} \quad \forall_{y \in B} \quad x \perp y.$$
- Ist $A \subset V$, so nennen wir
$$A^{\perp} := \{y \in V \mid \forall_{x \in A} \quad x \perp y\}$$
das *orthogonale Komplement von A* in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Bemerkung 1.2.2 (Nullvektor)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Ist $x \in V$ und $x \perp x$, so ist aufgrund der positiven Definitheit $x = 0$. Insbesondere gilt:

- Es ist $V^{\perp} = \{0\}$.

- Ist $A \subset V$ und $A \neq \emptyset$, so gilt $A \cap A^\perp = \{0\}$.

Beispiel 1.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt in $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$:

$$e_j \perp e_k \iff j \neq k$$

Außerdem gilt zum Beispiel, dass e_1 *nicht* zu $e_1 + e_2$ orthogonal, aber es ist $(e_1 + e_2) \perp (e_1 - e_2)$. Außerdem ist

$$\{e_1\}^\perp = (\mathbb{R} \cdot e_1)^\perp = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_2, \dots, e_n\}.$$

Bemerkung 1.2.4 (Orthogonalität und Abstände)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum mit induzierter Norm $\| \cdot \|$ und seien $x, y \in V$ mit $x \perp y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle && (\text{?}) \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle && (\text{?}) \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 && (\text{?}) \\
&= \|x\|^2 + 0 + \overline{0} + \|y\|^2 && (\text{?}) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Der Satz des Pythagoras ist also in die Definition des Skalarprodukts bzw. der induzierten Norm eingebaut.

Mit demselben Argument erhält man auch die folgende Verallgemeinerung: Ist $(v_j)_{j \in \{1,\dots,n\}}$ eine Familie in V mit $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$ und ist $(\lambda_j)_{j \in J}$ eine Familie in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$), so gilt

$$\left\| \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j \right\| = \sqrt{\sum_{j \in J} |\lambda_j|^2}.$$

1.2.2 Orthonormalbasen

In euklidischen bzw. unitären Vektorräumen ist es oft nützlich, statt allgemeiner Basen sogenannte Orthonormalbasen zu betrachten. Zum Beispiel erlauben es Orthonormalbasen, Abstände bzw. Längen einfach auszudrücken (Bemerkung 1.2.4).

Definition 1.2.5 (Orthonormalbasis)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum.

1. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist ein *Orthonormalsystem*, wenn

$$\forall_{i,j \in I} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$$

(d.h. alle Vektoren der Familie haben Länge 1 und die Vektoren stehen alle orthogonal aufeinander).

2. Eine *Orthonormalbasis von* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Basis von V, die ein Orthonormalsystem ist.

Beispiel 1.2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Lemma 1.2.7 (Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Jedes Orthonormalsystem in V ist linear unabhängig (im euklidischen Fall über $\mathbb{R}$, im unitären Fall über $\mathbb{C}$).*

Beweis. Sei $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in V. Ist $J \subset I$ endlich und ist $(\lambda_j)_{j \in J}$ eine Familie in $\mathbb{R}$ (bzw. im unitären Fall in $\mathbb{C}$), mit $\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j = 0$, so folgt mit den Eigenschaften des Skalarprodukts und der Voraussetzung, dass ein Orthonormalsystem vorliegt, dass

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_k, 0 \rangle = \Big\langle v_k, \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j \Big\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle v_k, v_j \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \delta_{k,j} \\ = \lambda_k \end{aligned}$$

für alle $k \in J$ gilt. Also ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig. □

Jeder endlich-dimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis und eine solche kann mit dem folgenden Verfahren aus einer gewöhnlichen Basis konstruiert werden:

Satz 1.2.8 (Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum, sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall), sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $(w_1, \dots, w_n)$ in V mit*

$$\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \quad \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\big(\{w_1, \dots, w_k\}\big) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\big(\{v_1, \dots, v_k\}\big).$$

Genauer gilt: Die Familie $(w_1, \dots, w_n)$, die rekursiv durch

- $w_1 := \frac{1}{\|\widetilde{w}_1\|} \cdot \widetilde{w}_1$, *wobei* $\widetilde{w}_1 := v_1$, *und*
- $w_{k+1} := \frac{1}{\|\widetilde{w}_{k+1}\|} \cdot \widetilde{w}_{k+1}$, *wobei* $\widetilde{w}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v_{k+1} \rangle \cdot w_j$,

für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ definiert ist, hat diese Eigenschaft. Dabei bezeichnet $\| \cdot \|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V.

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, machen wir die Konstruktion anschaulich plausibel: Nach Konstruktion entsteht w_k jeweils aus $\widetilde{w}_k$ durch Normierung auf die Länge 1.

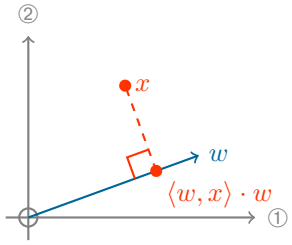


Abbildung 1.4.: Extraktion des w-Anteils

Ist $x \in V$ und $w \in V$ mit $\|w\| = 1$, so gibt $\langle w, x\rangle \cdot w$ den w-Anteil von x (im Sinne einer orthogonalen Zerlegung) an (Abbildung 1.4). In der rekursiven Definition

$$\widetilde{w}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot w_j$$

wird also der Anteil von v_{k+1} extrahiert, der nicht in Richtung der $w_1, \ldots, w_k$ liegt.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung folgendermaßen per Induktion:

Induktionsanfang. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, ist $v_1 \neq 0$. Insbesondere ist w_1 wohldefiniert und $\|w_1\| = 1$. Nach Konstruktion ist dabei $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1\}$.

Induktionsvoraussetzung. Sei $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und es sei bereits gezeigt, dass $(w_1, \ldots, w_k)$ ein Orthonormalsystem mit $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_k\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist.

Induktionsschritt. Wir zeigen, dass dann auch $(w_1, \ldots, w_{k+1})$ ein Orthonormalsystem mit $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ ist.

- Es ist $\widetilde{w}_{k+1} \neq 0$, denn: Nach Induktionsvoraussetzung ist die Linearkombination $\sum_{j=1}^{k} \langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot w_j \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine linear unabhängige Familie ist, folgt aus der Konstruktion von $\widetilde{w}_{k+1}$, dass $\widetilde{w}_{k+1} \neq 0$.

  Also ist w_{k+1} wohldefiniert und $\|w_{k+1}\| = 1$.

- Sei $\ell \in \{1, \ldots, k\}$. Dann ist $\langle w_\ell, w_{k+1}\rangle = 0$, denn: Es genügt dafür, $\langle w_\ell, \widetilde{w}_{k+1}\rangle = 0$ zu zeigen. Nach Konstruktion und Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}\langle w_\ell, \widetilde{w}_{k+1}\rangle &= \left\langle w_\ell, v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot w_j \right\rangle \\ &= \langle w_\ell, v_{k+1}\rangle - \sum_{j=1}^{k}\langle w_j, v_{k+1}\rangle \cdot \langle w_\ell, w_j\rangle \\ &= \langle w_\ell, v_{k+1}\rangle - \langle w_\ell, v_{k+1}\rangle \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Nach Konstruktion von w_{k+1} und nach Induktionsvoraussetzung ist $w_{k+1} \in \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ und $v_{k+1} \in \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich daraus die Gleichheit $\operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$. □

Beispiel 1.2.9. Wir betrachten die linear unabhängige Familie

$$\left(v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)$$

in $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$. Wenden wir das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt an, so erhalten wir Schritt für Schritt

- $\widetilde{w}_1 =$? und $w_1 =$?
- sowie

  $\widetilde{w}_2 =$?

  bzw.

  $$w_2 =$$?

Nach dem Orthonormalisierungsverfahren ist (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$.

Korollar 1.2.10. *Jeder endlich-dimensionale euklidische/unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Jeder (endlich-dimensionale) Vektorraum besitzt eine (endliche) Basis. Auf eine solche Basis können wir das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt anwenden (Satz 1.2.8) und erhalten so eine Orthonormalbasis. □

Als erste Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir, dass im endlich-dimensionalen Fall das Standardskalarprodukt (bis auf Isometrie) das einzige Skalarprodukt ist:

Korollar 1.2.11 (Klassifikation der endlich-dimensionalen euklidischen/unitären Vektorräume)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitären Vektorraum der endlichen Dimension $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall, $\mathbb{C}$ im komplexen Fall). Dann gibt es einen Isomorphismus $f\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ mit*

$$\forall_{x,y \in V} \quad \big\langle f(x), f(y) \big\rangle_2 = \langle x, y \rangle.$$

(Dies ist gleichbedeutend damit, dass f eine lineare Isometrie bezüglich der induzierten Normen ist.)

Beweis. Aufgrund des Orthonormalisierungsverfahrens besitzt V eine Orthonormalbasis B (Korollar 1.2.10). Aus dem Zusammenhang der Norm mit Orthonormalsystemen (Bemerkung 1.2.4) folgt, dass der Isomorphismus $T_{B,E_n}\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine lineare Isometrie ist. Da lineare Isometrien mit dem Skalarprodukt verträglich sind (Proposition 1.1.18 bzw. Proposition 1.1.33), folgt die Behauptung. □

1.2.3 Orthogonale Projektionen

Zu Unterräumen gibt es im allgemeinen viele Projektionen vom umgebenden Vektorraum auf diesen Unterraum bzw. viele komplementäre Untervektorräume. In endlich-dimensionalen euklidischen/unitären Vektorräumen gibt es zu jedem Untervektorraum eine geometrisch ausgezeichnete Projektion (die orthogonale Projektion) und einen geometrisch ausgezeichneten komplementären Untervektorraum (das orthogonale Komplement).

Korollar 1.2.12 (orthogonale Projektion)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $p_U\colon V \longrightarrow V$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gilt $\operatorname{im} p_U \subset U$*
2. *und es gilt $\operatorname{im}(p_U - \mathrm{id}_V) \subset U^\perp$.*

Man bezeichnet p_U als orthogonale Projektion von V auf U*. Außerdem gilt:*

3. *Es ist $p_U|_U = \mathrm{id}_U$.*
4. *Für alle $x \in V$ ist $p_U(x)$ die eindeutige Minimalstelle der Abbildung (wobei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm ist)*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ y &\longmapsto \|x - y\|. \end{aligned}$$

Beweis. Existenz einer orthogonalen Projektion. Nach dem Orthonormalisierungssatz (Satz 1.2.8) besitzt U eine Orthonormalbasis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ bezüglich dem von V eingeschränkten Skalarprodukt. Wir definieren

$$\begin{aligned} p_U \colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, x\rangle \cdot v_j. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist p_U linear und $\operatorname{im} p_U \subset U$. Wegen $v_j = p_U(v_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt sogar $p_U(x) = x$ für alle $x \in U$.

Außerdem gilt $\operatorname{im}(p_U - \mathrm{id}_V) \subset U^\perp$, denn: Sei $x \in V$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Nach Konstruktion von p_U gilt

$$\begin{aligned} \langle v_j, p_U(x) - x\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \langle v_j, \langle v_k, x\rangle \cdot v_k\rangle - \langle v_j, x\rangle && \text{(Linearität von } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ im zweiten Argument)} \\ &= \langle v_j, x\rangle \cdot \langle v_j, v_j\rangle - \langle v_j, x\rangle && ((v_1, \dots, v_n) \text{ ist eine ONB}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist $(p_U - \mathrm{id}_V)(x) \in \{v_1, \dots, v_n\}^\perp = U^\perp$.

Eindeutigkeit. (Übungsaufgabe).

Es bleibt noch die Aussage über die Abstände zu zeigen: Sei $x \in V$. Wegen $p_U(x) \in U$ ist $\|x - p_U(x)\| \geq \inf\{\|x - y\| \mid y \in U\}$. Für die umgekehrte Abschätzung sei $y \in U$. Dann ist

$$\|x = y\| = \big\|x - p_U(x) + p_U(x) - y\big\|.$$

Da y und $p_U(x)$ in U liegen ist auch $p_U(x) - y \in U$. Mit 2. folgt $(x - p_U(x)) \perp (p_U(y) - y)$, und damit (Bemerkung 1.2.4)

$$\begin{aligned} \|x = y\| &= \big\|x - p_U(x) + p_U(x) - y\big\| \\ &= \sqrt{\|x - p_U(x)\|^2 + \|p_U(x) - y\|^2} \\ &\geq \sqrt{\|x - p_U(x)\|^2} \\ &= \big\|x - p_U(x)\big\|. \end{aligned}$$

Also ist $\|x - p_U(x)\| \leq \inf\{\|x - y\| \mid y \in U\}$ und Gleichheit tritt nur für $y = p_U(x)$ ein. Wegen $p_U(x) \in U$ handelt es sich bei diesem Infimum um ein Minimum. □

Korollar 1.2.13 (orthogonale Komplemente). *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum.*

1. *Dann ist $U^\perp$ ein zu U komplementärer Untervektorraum.*
2. *Insbesondere ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} U^\perp &\longrightarrow V/U \\ x &\longmapsto x + U \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von reellen/komplexen Vektorräumen.

Beweis. Zu 1. Es ist $U^\perp$ ein Untervektorraum, denn: Man kann dies direkt nachrechnen. Mit der bereits gelernten Theorie können wir aber auch bequem wie folgt argumentieren. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{y \in V \mid \forall_{x\in U} \quad x \perp y\} \\ &= \{y \in V \mid \forall_{x\in U} \quad \langle x, y\rangle = 0\} \\ &= \bigcap_{x\in U} \ker\langle x, \cdot\rangle. \end{aligned}$$

Da Kerne von linearen Abbildungen Untervektorräume sind und Durchschnitte von Untervektorräumen Untervektorräume sind, folgt, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum ist.

Außerdem sind U und $U^\perp$ komplementär, denn:

- Es ist $U \cap U^\perp = \{0\}$ (Bemerkung 1.2.2).
- Es ist $U + U^\perp = V$, denn: Sei $x \in V$. Ist $p_U \colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf U (Korollar 1.2.12), so folgt

  $$x = -\big(p_U(x) - x\big) + p_U(x);$$

  der erste Term liegt in $U^\perp$, der zweite in U. Also ist $x \in U + U^\perp$.

Zu 2. Dies folgt aus dem ersten Teil und Bemerkung I.4.4.11. □

Die obigen Aussagen über die Existenz von Orthonormalbasen, orthogonale Projektionen, komplementäre Untervektorräume, ... gelten im allgemeinen *nicht*, wenn der betrachtete Untervektorraum unendlich-dimensional ist. Im unendlich-dimensionalen Fall werden zusätzlich noch Abgeschlossenheitseigenschaften bezüglich der induzierten Norm benötigt. Die Untersuchung solcher Fragen ist Gegenstand der Funktionalanalysis (Ausblick 1.1.22).

Ausblick 1.2.14 (Fouriertransformation)**.** Die zusammengesetzte Familie

$$\big(x \mapsto \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot x)\big)_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \cup \big(x \mapsto \sqrt{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist ein Orthonormalsystem in $C([0,1],\mathbb{R})$ (bezüglich dem L^2-Skalarprodukt aus Beispiel 1.1.5); dies folgt aus einer länglichen (aber elementaren) Berechnung der entsprechenden Integrale.

Es gilt sogar noch mehr: bezüglich der durch das L^2-Skalarprodukt induzierten Norm ist der von dieser Familie erzeugte Untervektorraum dicht im Untervektorraum der stetigen Funktionen $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$. Dies ist die Grundlage der sogenannten *Fouriertransformation*, bei der man periodische Funktionen als Reihe der obigen Sinus- und Kosinusfunktionen darstellt. Dadurch lassen sich Audioinformationen digital verarbeiten bzw. analysieren.

1.2.4 Die orthogonale Gruppe

Wir untersuchen die Symmetriegruppe der euklidischen Ebene bzw. des dreidimensionalen euklidischen Raums genauer. Dazu betrachten wir die folgenden Matrixgruppen:

Definition 1.2.15 (orthogonale Gruppe, unitäre Gruppe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man die folgenden Gruppen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}(n) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid L(A) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)\} && \textit{orthogonale Gruppe} \text{ von } \mathbb{R}^n \\
\mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\} && \textit{spezielle orthogonale Gruppe} \text{ von } \mathbb{R}^n \\
\mathrm{U}(n) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid L(A) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)\} && \textit{unitäre Gruppe} \text{ von } \mathbb{C}^n \\
\mathrm{SU}(n) &:= \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\} && \textit{spezielle unitäre Gruppe} \text{ von } \mathbb{C}^n
\end{aligned}
$$

Die Verträglichkeit von Abbildungskomposition mit Matrixmultiplikation und die Multplikativität der Determinante zeigen, dass es sich dabei tatsächlich um Gruppen handelt (nachrechnen).

An dieser Stelle sollte man sich daran erinnern, dass Automorphismen von $\mathbb{R}^n$ mit positiver Determinante orientierungserhaltend sind und solche mit negativer Determinante orientierungsumkehrend sind. Erstere können wir im dreidimensionalen euklidischen Raum praktisch realisieren, letztere im Normalfall nicht: Es ist einfach, sich in eine gewisse Richtung zu drehen; es ist (zum Glück!) nicht ohne weiteres möglich, sich als Ganzes an einer Ebene zu spiegeln – viele molekulare Strukturen haben nur in einer der beiden möglichen Orientierungen den gewünschten Effekt. Zum Beispiel enthält $\mathrm{O}(2)$ die Rotationen um den Ursprung und die Spiegelungen an den Geraden in $\mathbb{R}^2$ (Beispiel 1.1.31 bzw. Übungsaufgabe). In Satz 1.2.18 werden wir sehen, dass $\mathrm{O}(2)$ (wie wir auch aus der Anschauung erwarten würden!) keine weiteren Elemente enthält.

In der Praxis ist es bequem, die folgenden alternativen Beschreibungen dieser Gruppen zu verwenden. Die erste Eigenschaft erklärt auch die Bezeichnung als „orthogonale“ Gruppe.

Proposition 1.2.16. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

1. *Es ist f genau dann eine lineare Isometrie (bezüglich der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm auf V), wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Orthonormalbasis von V ist.*

2. *Ist f eine lineare Isometrie, so gilt im euklidischen Fall $M_{B,B}(f) \in \mathrm{O}(n)$ und im unitären Fall $M_{B,B}(f) \in \mathrm{U}(n)$.*

Beweis. Zu 1. Ist f eine lineare Isometrie, so ist f wegen Polarisierung mit dem Skalarprodukt verträglich (Proposition 1.1.18 und Proposition 1.1.33). Insbesondere bildet f also Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen ab.

Ist umgekehrt $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Orthonormalbasis von V, so ist f eine Isometrie (Bemerkung 1.2.4 und Beweis von Lemma 1.2.7).

Zu 2. Da B eine Orthonormalbasis ist, ist $T_{B,E_n} \colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ eine lineare Isometrie bezüglich dem euklidischen Abstand $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{K}^n$ (Beweis von Korollar 1.2.11); dabei bezeichnet $\mathbb{K}$ den Grundkörper. Also ist auch die Komposition

$$L\big(M_{B,B}(f)\big) = f_{B,B} = T_{B,E_n} \circ f \circ T_{B,E_n}^{-1} \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine lineare Isometrie bezüglich $\|\cdot\|_2$ (nachrechnen). Nach Definition ist somit $M_{B,B}(f)$ in der orthogonalen bzw. unitären Gruppe. □

Korollar 1.2.17 (alternative Beschreibung der orthogonalen/unitären Gruppe)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\mathrm{O}(n) = \big\{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\big|\; A^{\mathsf{T}} \cdot A = I_n\big\}$$

und

$$\mathrm{U}(n) = \big\{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \;\big|\; A^{\mathsf{H}} \cdot A = I_n\big\}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur im euklidischen Fall (der unitäre Fall geht analog): Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, so gilt nach Definition des Standardskalarprodukts genau dann $A^{\mathsf{T}} \cdot A = I_n$, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ bilden. Mit

- der Charakterisierung von Isometrien durch Orthonormalbasen (Proposition 1.2.16) und
- der Tatsache, dass die Spalten von A die Bilder der Standardeinheitsvektoren unter $L(A)$ sind,

folgt somit die Behauptung. □

Satz 1.2.18 (niedrigdimensionale orthogonale Gruppen)**.**

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt*

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup \big\{S \cdot A \;\big|\; A \in \mathrm{SO}(n)\big\},$$

wobei S die Spiegelungsmatrix

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n)$$

bezeichnet.

2. *Es gilt* $\mathrm{SO}(2) = \{R(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2 \cdot \pi)\}$. *D.h.* $\mathrm{SO}(2)$ *ist die Gruppe der Rotationen in* $\mathbb{R}^2$ *um den Ursprung.*

3. *Das Komplement* $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ *besteht genau aus der Menge aller Spiegelungen in* $\mathbb{R}^2$ *an Geraden. Genauer: Sei* $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*. Dann gilt genau dann* $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$*, wenn es* $B \in \mathrm{O}(2)$ *gibt mit*

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Die Gruppe* $\mathrm{SO}(3)$ *besteht genau aus den Drehungen in* $\mathbb{R}^3$ *um Geraden. Genauer: Sei* $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$*. Dann gilt genau dann* $A \in \mathrm{SO}(3)$*, wenn es* $B \in \mathrm{O}(3)$ *und* $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ *gibt mit*

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1.2.19 (über die Konjugation mit orthogonalen Matrizen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ist $B \in \mathrm{O}(n)$, so ist $B^{-1} \cdot A \cdot B$ die darstellende Matrix

- für die lineare Abbildung ?
- bezüglich ?

Der obige Satz besagt also, dass Isometrien der euklidischen Ebene bzw. des euklidischen Raums bezüglich geeigneter orthonormaler(!) Koordinatensysteme ein besonders einfache Gestalt haben.

Beweis. Zu 1. Offenbar ist die rechte Seite in der linken Seite enthalten (nachrechnen).

Sei umgekehrt $A \in \mathrm{O}(n)$. Mit der Multiplikativität der Determinante und der Invarianz der Determinante unter Transponieren (Korollar I.5.4.24) erhalten wir

$$1 = \det I_n = \det(A^{\mathsf{T}} \cdot A) = \det A^{\mathsf{T}} \cdot \det A = \det A \cdot \det A,$$

und damit $\det A \in \{-1, 1\}$. Wir behandeln die beiden Fälle einzeln:

- Ist $\det A = 1$, so gilt nach Definition $A \in \mathrm{SO}(n)$.
- Ist $\det A = -1$, so ist

  $$\det(S^{-1} \cdot A) = ?$$

  und damit $S^{-1} \cdot A \in \mathrm{SO}(n)$. Daher hat $A = S \cdot (S^{-1} \cdot A)$ die gewünschte Gestalt.

Zu 2. Ist $\varphi \in [0, 2\cdot\pi)$, so ist $R(\varphi) \in \mathrm{SO}(2)$ (Beispiel 1.1.31). Sei umgekehrt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2).$$

Die Bedingung $A \in \mathrm{SO}(2)$ liefert (mithilfe von Korollar 1.2.17) die folgenden Gleichungen:

$$a^2 + c^2 = (a, c) \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = 1 \tag{1.1}$$

$$b^2 + d^2 = (b, d) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 1 \tag{1.2}$$

$$a \cdot b + c \cdot d = (b, d) \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{1.3}$$

$$a \cdot b + c \cdot d = (a, c) \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

$$a \cdot d - b \cdot c = \det A = 1 \tag{1.5}$$

Wir multiplizieren Gleichung (1.4) mit b, Gleichung (1.5) mit d und addieren die entstehenden Gleichungen; dies liefert

$$d = a \cdot (b^2 + d^2) + b \cdot c \cdot d - b \cdot c \cdot d = a \cdot (b^2 + d^2).$$

Mit Gleichung (1.2) erhalten wir somit $a = d$. Analog zeigt man $b = -c$.

Aus der Analysis wissen wir außerdem wegen Gleichung (1.1), dass es ein $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ mit

$$a = \cos\varphi \quad \text{und} \quad c = \sin\varphi$$

gibt. Insgesamt folgt daher $A = R(\varphi)$.

Zu 3. Dies kann man durch eine geeignete Kombination der ersten beiden Teile sehen oder indem man den Beweis des zweiten Teils auf den Fall von Determinante -1 anpasst (Übungsaufgabe).

Zu 4. Eine Rechnung zeigt: Für alle $B \in \mathrm{O}(3)$ und alle $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ ist

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

ein Element von $\mathrm{SO}(3)$ (nachrechnen).

Um zu verstehen, warum alle Elemente von $\mathrm{SO}(3)$ von dieser Form sind, bietet es sich an, zunächst etwas Spektraltheorie für Isometrien zu entwickeln (Lemma 1.2.20). Sei $A \in \mathrm{SO}(3)$ und $f := L(A)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Die Idee ist, zuerst einen Kandidaten für die Rotationsachse zu finden und sich dann des zweiten bzw. dritten Teils zu bedienen.

- *Eine spezielle Gerade.* Der Endomorphismus f besitzt einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3$ zum Eigenwert 1 oder -1, denn: Das charakteristische Po-

lynom $\chi_f \in \mathbb{R}[T]$ von f ist ein Polynom dritten Grades mit Leitkoeffizient 1. Also gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \chi_f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \chi_f(x) = \infty;$$

mit dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass χ_f mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Somit besitzt f mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und insbesondere einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ. Nach Lemma 1.2.20 ist dabei $\lambda \in \{1, -1\}$. Indem wir statt v den normierten Vektor $1/\|v\| \cdot v$ betrachten, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|v\| = 1$ ist.

- *Reduktion auf den zweidimensionalen Fall.* Sei $U := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$ (Korollar 1.2.13). Sei (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von U. Somit ist (v, w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Da f als Isometrie Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen abbildet und $f(v) = \pm v$ ist, folgt $f(w_1), f(w_2) \in \{f(v)\}^\perp = (\mathbb{R} \cdot v)^\perp = U$ bzw. $f(U) \subset U$. Also ist $f|_U \in \mathrm{Isom}(U, \|\cdot\|_2)$. Daher ist (Proposition 1.2.16)

  $$A_U := M_{(w_1,w_2),(w_1,w_2)}(f|_U) \in \mathrm{O}(2)$$

  und (wie man an $M_{(v,w_1,w_2),(v,w_1,w_)}(f)$ ablesen kann)

  $$\det A_U = \boxed{?}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

- Ist $\lambda = 1$, so ist $A_U \in \mathrm{SO}(2)$ und es gibt nach dem zweiten Teil ein $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi)$ mit $A_U = R(\varphi)$; in anderen Worten: auf U wirkt f durch Rotation um φ. Wir betrachten dann die Matrix B, deren Spalten die Orthonormalbasis (v, w_1, w_2) bilden. Somit ist $B \in \mathrm{O}(3)$ und nach Konstruktion gilt

  $$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- Ist $\lambda = -1$, so ist $A_U \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ und es gibt nach dem dritten Teil eine Matrix $B_U \in \mathrm{O}(2)$ mit

  $$B_U^{-1} \cdot A_U \cdot B_U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

  in anderen Worten: auf U wirkt f als Spiegelung an einer Geraden in U. Mit der Matrix

  $$B := (v \mid w_1 \mid w_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_U \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3)$$

erhalten wir somit

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indem wir die erste und dritte Spalte von B tauschen, erhalten wir eine Matrix $C \in \mathrm{O}(3)$ mit

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\pi) \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Lemma 1.2.20 (grundlegende spektrale Eigenschaften von Isometrien)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{Isom}(V, \|\cdot\|)$, wobei $\|\cdot\|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm auf V bezeichnet. Im euklidischen Fall sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, im unitären Fall sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

1. *Dann ist $\sigma_{\mathbb{K}}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}$.*
2. *Sind $\lambda, \mu \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ mit $\lambda \neq \mu$, so gilt*

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \perp \mathrm{Eig}_\mu(f).$$

Insbesondere treffen diese Eigenschaften also auf Matrizen aus $\mathrm{O}(n)$ zu.

Beweis. Zu 1. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von f und sei $x \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Da f eine Isometrie ist, folgt

$$\|x\| = \big\|f(x)\big\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Wegen $x \neq 0$ ist somit $|\lambda| = 1$.

Zu 2. Seien $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von f und seien $x, y \in V$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ bzw. μ. Da f auch mit dem Skalarprodukt verträglich ist (wegen Polarisierung; Proposition 1.1.18), folgt dann

$$\langle x, y \rangle = \big\langle f(x), f(y) \big\rangle = \langle \lambda \cdot x, \mu \cdot y \rangle = \overline{\lambda} \cdot \mu \cdot \langle x, y \rangle.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ und $|\lambda| = 1 = |\mu|$ erhalten wir $\overline{\lambda} \cdot \mu \neq 1$, und damit $\langle x, y \rangle = 0$. Also ist $x \perp y$. □

Korollar 1.2.21. *Jede lineare Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ lässt sich als Komposition von einer oder zwei Spiegelungen schreiben.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.2.18 und einem kleinen geometrischen Argument (Übungsaufgabe). □

Beispiel 1.2.22 (kleine unitäre Gruppe)**.** Es gilt $\mathrm{U}(1) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ (nachrechnen). Man beachte dabei, dass $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ nichts anderes als der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ist.

1.3 Spektralsätze

Die Untersuchung von Endomorphismen auf Diagonalisierbarkeit ist sowohl in den Anwendungen der linearen Algebra als auch für die abstrakte Klassifikation von Endomorphismen von Bedeutung. Im euklidischen/unitären Fall stellt sich heraus, dass es eine große Klasse von Endomorphismen gibt, die sich besonders schön diagonalisieren lassen: Dies sind die sogenannten selbstadjungierten Endomorphismen.

Wir führen zunächst selbstadjungierte Endomorphismen ein und beweisen dann den Spektralsatz (also, dass solche Endomorphismen auf eine besonders schöne Weise diagonalisierbar sind). Als Anwendung erhält man zum Beispiel die Hauptachsentransformation, Definitheitskriterien für symmetrische Matrizen und den Sylvesterschen Trägheitssatz.

1.3.1 Selbstadjungierte Endomorphismen

Ein Endomorphismus eines euklidischen/unitären Vektorraums ist selbstadjungiert, wenn er sich „durch das Skalarprodukt durchziehen“ lässt.

Definition 1.3.1 (selbstadjungiert)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Ein Endomorphimus $f\colon V \longrightarrow V$ ist *selbstadjungiert*, wenn

$$\forall_{x,y \in V} \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle.$$

Wir erinnern daran, dass eine komplexe Matrix A selbstadjungiert heißt, wenn $A^{\mathsf{H}} = A$ ist. Sind alle Koeffizienten von A reell, so ist dies äquivalent dazu, dass A symmetrisch ist (also $A^{\mathsf{T}} = A$ gilt).

Proposition 1.3.2 (Selbstadjungiertheit via Matrizen)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum, sei B eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn die Matrix $M_{B,B}(f)$ selbstadjungiert ist.*

Beweis. Wir schreiben n für die Dimension von V und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ sowie $A := M_{B,B}(f)$. Da B eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$\langle v_j, f(v_k) \rangle = \left\langle v_j, \sum_{\ell=1}^{n} A_{\ell,k} \cdot v_\ell \right\rangle = \boxed{?}$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$; analog ist $\langle f(v_j), v_k \rangle = \overline{A_{k,j}}$.

Ist f selbstadjungiert, so folgt hieraus $A^{\mathsf{H}} = A$.

Ist umgekehrt $A^{\mathsf{H}} = A$, so liefert die obige Rechnung, dass $\langle v_j, f(v_k)\rangle = \langle f(v_j), v_k\rangle$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Mit der Bi-/Sesquilinearität des Skalarprodukts erhalten wir daraus, dass $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ für alle $x, y \in V$ gilt (nachrechnen). □

Die Charakterisierung aus Proposition 1.3.2 erlaubt es uns, auf einfache Weise Beispiele für Selbstadjungiertheit anzugeben:

Beispiel 1.3.3.

- Ist der Endomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2025 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

  bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ selbstadjungiert?

  Ja Nein

- Ist der Endomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 2025 \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

  bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ selbstadjungiert?

  Ja Nein

Die folgende Beobachtung erklärt den Begriff der *Selbst*adjungiertheit:

Proposition 1.3.4 (adjungierte Homomorphismen). *Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ und $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ endlich-dimensionale euklidische/unitäre Vektorräume und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$). Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f^{\mathsf{H}}\colon W \longrightarrow V$ mit*

$$\forall_{x \in V} \quad \forall_{y \in W} \quad \big\langle x, f^{\mathsf{H}}(y)\big\rangle_V = \big\langle f(x), y\big\rangle_W.$$

Man bezeichnet f^{H} als adjungierte Abbildung von f.

Beweis. Existenz. Sei n die Dimension von V, sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, sei m die Dimension von W und sei $C = (w_1, \dots, w_m)$ eine Orthonormalbasis von $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$. Sei $A := M_{B,C}(f)$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$f^{\mathsf{H}} := T^{-1}_{B,E_n} \circ L\big(A^{\mathsf{H}}\big) \circ T_{C,E_m}\colon W \longrightarrow V.$$

Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt nach Konstruktion

$$\langle v_j, f^{\mathsf{H}}(w_k)\rangle_V = A^{\mathsf{H}}_{j,k} = \overline{A_{k,j}} = \langle f(v_j), v_k\rangle_V.$$

Mit der Bi-/Sesquilinearität des Skalarprodukts folgt daraus $\langle x, f^{\mathsf{H}}(y)\rangle_V = \langle f(x), y\rangle_W$ für alle $x \in V$, $y \in W$.

Eindeutigkeit. Seien $F, G\colon W \longrightarrow V$ Endomorphismen mit

$$\forall_{x\in V} \quad \forall_{y\in W} \quad \langle x, F(y)\rangle_V = \langle f(x), y\rangle_W = \langle x, G(y)\rangle_V.$$

Sei $y \in W$. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$\begin{aligned}\langle x, F(y) - G(y)\rangle_V &= \langle x, F(y)\rangle_V - \langle x, G(y)\rangle_V \\ &= \langle f(x), y\rangle_W - \langle f(x), y\rangle_W \\ &= 0\end{aligned}$$

Mit der positiven Definitheit von $\langle \cdot, \cdot\rangle_V$ erhalten wir (durch Einsetzen von $x =$?), dass $F(y) - G(y) = 0$ bzw. $F(y) = G(y)$. Dies beweist die Eindeutigkeit. □

Korollar 1.3.5 (Selbst-Adjungiertheit)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn $f = f^{\mathsf{H}}$ gilt.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der vorigen Proposition 1.3.4. □

Caveat 1.3.6. Oft wird die adjungierte Abbildung von f in der Literatur auch mit f^* bezeichnet. Dies kann jedoch zu Verwechslungen mit der *dualen* Abbildung führen. Da die duale Abbildung bezüglich (dualer Basen) durch die transponierte Matrix dargestellt wird und da man mithilfe von Skalarprodukten auch Dualisieren kann, stimmen diese beiden Konstruktionen (im reellen Fall) sogar in einem gewissen Sinne überein. Wir werden davon im folgenden aber keinen Gebrauch machen und daher die adjungierte Abbildung mit f^{H} bezeichnen.

1.3.2 Der Spektralsatz

Satz 1.3.7 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)**.** *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Es bezeichne $\mathbb{K}$ den Grundkörper von V (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall). Dann gilt:*

1. *Alle Eigenwerte von f über $\mathbb{K}$ sind bereits reell, d.h. $\sigma_{\mathbb{K}}(f) \subset \mathbb{R}$.*
2. *Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.*
3. *Insbesondere ist f über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar.*

Wir werden den zweiten Teil dieses Satzes per Induktion über die Dimension des Vektorraums führen. Dazu benötigen wir zwei wesentliche Bausteine:

- Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen/unitären Vektorraums besitzt mindestens einen Eigenwert bzw. Eigenvektor.
- Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum von V mit $f(W) \subset W$, so gilt auch $f(W^\perp) \subset W^\perp$.

Kombinieren wir diese beiden Eigenschaften, so sehen wir, dass wir uns Dimension für Dimension nach unten (bis zur Dimension 0) hangeln können.

Anmerkung zum Lernen. Woher kennen Sie diese Beweisstrategie?

Beweis. Zu 1. Sei $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ und sei $v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Da f selbstadjungiert ist, folgt

$$\lambda \cdot \langle v, v\rangle = \big\langle v, f(v)\big\rangle = \big\langle f(v), v\big\rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle v, v\rangle.$$

Wegen $v \neq 0$ erhalten wir daraus $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. λ ist reell.

Zu 3. Der dritte Teil ist eine direkte Folgerung aus dem zweiten Teil.

Zu 2. Wir beweisen die zweite Behauptung durch Induktion über $\dim_{\mathbb{K}} V$:

Induktionsanfang. Im Fall $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ ist nichts zu zeigen.

Induktionsvoraussetzung. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und es sei bereits gezeigt, dass es zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus eines euklidischen/unitären Vektorraums der Dimension $n-1$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt.

Induktionsschritt. Sei $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ und sei $f\colon V \longrightarrow V$ selbstadjungiert.

- Dann besitzt f mindestens einen Eigenvektor $v \in V$, denn: Wegen $n > 0$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{K}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ (das Grad n hat) nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz I.6.4.8) mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist λ ein Eigenwert von f und nach dem ersten Teil $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so argumentieren wir wie folgt: Sei B eine Orthonormalbasis von V und sei $A := M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Da f selbstadjungiert ist, ist A symmetrisch bzw. selbstadjungiert (Proposition 1.3.2). Fassen wir A als Matrix in $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ auf, so zeigt das obige Argument im komplexen Fall für $L(A)\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, dass λ eine reelle(!) Nullstelle von $\chi_A = \chi_f$ ist (es macht keinen Unterschied, ob wir das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{C}$ oder über $\mathbb{R}$ berechnen). Somit ist λ auch ein Eigenwert der reellen Matrix A bzw. von f.

  Insbesondere besitzt f mindestens einen Eigenvektor $v \in V$.

- Sei $U := (\mathbb{K} \cdot v)^\perp \subset V$. Dann gilt $f(U) \subset U$, denn: Sei $x \in U$. Dann gilt (da f selbstadjungiert und v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist)

$$\big\langle f(x), v\big\rangle = \boxed{?}$$

und damit $f(x) \perp v$. Also ist auch $f(x) \in \{v\}^\perp = (\mathbb{K} \cdot v)^\perp = U$.

- Anwendung der Induktionsvoraussetzung: Da U komplementär zu $\mathbb{K} \cdot v$ ist (Korollar 1.2.13), ist

  $$\dim_{\mathbb{C}} U = ?$$

  Die Einschränkung $f|_U \colon U \longrightarrow U$ ist nach dem vorigen Schritt tatsächlich ein Endomorphismus von U und nach Konstruktion selbstadjungiert (bezüglich dem von V auf U eingeschränkten Skalarprodukt).

  Nach Induktionsvoraussetzung besitzt somit U eine Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ aus Eigenvektoren von $f|_U$.

Dann ist $(1/\|v\| \cdot v, u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. □

Korollar 1.3.8 (Spektralsatz für symmetrische Matrizen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, d.h. $A = A^\mathsf{T}$. Dann ist A (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar. Genauer gilt sogar: Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit der Eigenschaft, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Diagonalgestalt ist.*

Beweis. Da die Matrix A symmetrisch ist, ist $f := L(A) \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ selbstadjungiert (Proposition 1.3.2). Also können wir den Spektralsatz (Satz 1.3.7) auf f anwenden und erhalten so eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von f bzw. A besteht.

Dann hat die Matrix $S :=$? die Eigenschaft, dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Diagonalgestalt ist. Da B eine Orthonormalbasis ist, gilt dabei außerdem $S \in \mathrm{O}(n)$. □

Bemerkung 1.3.9. Mit den bereits entwickelten Techniken können wir für reelle symmetrische Matrizen A solche Transformationsmatrizen S wie in Korollar 1.3.8 bestimmen:

- Wir bestimmen die Eigenwerte von A über das charakteristische Polynom χ_A (Proposition I.6.4.13).
- Wir bestimmen mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren Basen für die Eigenräume von A (Bemerkung I.6.1.6).
- Wir werden das Orthonormalisierungsverfahren auf jede dieser Basen an (Satz 1.2.8).
- Wir setzen diese Basen zu einer Basis des Gesamtraums zusammen und verwenden diese Basisvektoren als Spalten von S.

Die Spalten von S bilden tatsächlich eine Orthonormalbasis, denn: Nach dem Spektralsatz (alternativ: über eine einfache Rechnung) sind die Eigenräume orthogonal zueinander. Somit lassen sich Orthonormalbasen der Eigenräume zu einer Orthonormalbasis des gesamten Raums zusammensetzen.

Korollar 1.3.10 (Wurzeln aus „nicht-negativen“ symmetrischen Matrizen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit*

$$B^2 = A.$$

Beweis. Wir wenden den Konjugationstrick an (Proposition I.6.3.2): Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.8) ist A diagonalisierbar. Wegen $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ existieren somit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ mit

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1},$$

wobei

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten dann die Matrix $B := S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot S \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, wobei wir die suggestive Notation

$$\sqrt{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

vewenden. Nach Konstruktion gilt (Proposition I.6.3.2)

$$\begin{aligned} B^2 &= S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot S \cdot S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot S \\ &= S^{-1} \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot S \\ &= S^{-1} \cdot D \cdot S \\ &= A, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Ausblick 1.3.11 (Spektralkalkül)**.** Allgemeiner kann man auf diagonalisierbare (insbesondere auf symmetrische) Matrizen mit demselben Trick auch andere Funktionen sinnvoll anwenden. Die systematische Betrachtung solcher Konstruktion führt zum *Spektralkalkül* bzw. *Funktionalkalkül* in der Funktionalanalysis.

Bemerkung 1.3.12 (Spektralsatz für normale Operatoren)**.** Allgemeiner gilt auch ein leicht modifizerter Spektralsatz für sogenannte *normale Operatoren*, d.h. für Endomorphismen f mit $f^{\mathsf{H}} \circ f = f \circ f^{\mathsf{H}}$ (mit einem ähnlichen Beweis). Neben den selbstadjungierten Endomorphismen sind auch Endomorphismen, die lineare Isometrien sind, normal. Das Konzept der normalen Operatoren

erlaubt es also, die spektralen Eigenschaften von selbstadjungierten und isometrischen Endomorphismen gleichzeitig zu behandeln.

Bemerkung 1.3.13 (Verzicht auf den Fundementalsatz der Algebra)**.** Im reellen Fall kann man auch ohne den Fundamentalsatz der Algebra auskommen. Man kann nämlich mit dem folgenden analytischen Trick auf die Existenz eines reellen Eigenwertes schließen:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} R\colon S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, A\cdot x\rangle_2 \end{aligned}$$

wobei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ ist. Wir zeigen, dass diese Abbildung ein Minimum λ besitzt und dass Minimalstellen Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind:

- *Existenz eines Minimums:* Die Abbildung R ist stetig (sogar glatt) und S^{n-1} ist kompakt. Also besitzt R ein Minimum $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Das Minimum ist ein Eigenwert von A:* Sei $v \in S^{n-1}$ eine Minimalstelle von R. Mithilfe der Methode der Lagrangemultiplikatoren für die Bestimmung von Extrema der glatten Funktion R (die sich auch glatt auf eine Umgebung von S^{n-1} fortsetzen lässt) unter Nebenbedingungen (Analysis II) sieht man dann, dass $A\cdot v = \lambda\cdot v$ ist.

Analog kann man auch mit Maxima verfahren. Im Rückblick stellt sich heraus, dass die Operatornorm $\|A\|$ der größte Eigenwert von A ist.

Aus dem Spektralsatz erhalten wir zudem das folgende Kriterium für positive Definitheit symmetrischer Matrizen:

Korollar 1.3.14 (Definitheitskriterium für symmetrische Matrizen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann ist die Matrix A*

genau dann positiv definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{>0}$
genau dann positiv semi-definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$
genau dann negativ definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{<0}$
genau dann negativ semi-definit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_{\leq 0}$
genau dann indefinit,	*wenn* $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset \neq \sigma_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathbb{R}_{<0}$.

Beweis. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.8) gibt es $S \in \mathrm{O}(n)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$S^{-1}\cdot A\cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D;$$

insbesondere ist $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Da die Matrix S orthogonal ist, folgt $A = S \cdot D \cdot S^{-1} = \cdot D \cdot S^{\mathsf{T}}$.

Wir zeigen nur das Kriterium für positive Definitheit (die anderen Fälle gehen analog):

Sei A positiv definit und $j \in \{1, \dots, n\}$. Mit $v_j := S \cdot e_j$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &< v_j^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot v_j && (A \text{ ist positiv definit}) \\
&= v_j^{\mathsf{T}} \cdot S \cdot D \cdot S^{\mathsf{T}} \cdot v_j && (\text{Diagonalisierung von } A) \\
&= (S^{\mathsf{T}} \cdot v_j)^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot (S^{\mathsf{T}} \cdot v_j) && (\text{Transposition und Multiplikation}) \\
&= e_j^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot e_j && (\text{Definition von } v_j \text{ und } S \in \mathrm{O}(n)) \\
&= \lambda_j. && (\text{Die Spalten/Zeilen } \dots)
\end{aligned}$$

Es gelte umgekehrt $\lambda_j > 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $y := S^{\mathsf{T}} \cdot x$. Wegen $A = S \cdot D \cdot S^{\mathsf{T}}$ folgt

$$\begin{aligned}
x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x &= (S^{\mathsf{T}} \cdot x)^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot (S^{\mathsf{T}} \cdot x) = y^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot y \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot y_j^2.
\end{aligned}$$

Ist $x \neq 0$, so ist $y \neq 0$ und es gibt ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $y_j \neq 0$. Wegen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{>0}$ erhalten wir somit

$$x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot y_k^2 \geq \lambda_j \cdot y_j^2 > 0.$$

Also ist A positiv definit. □

Symmetrische Matrizen treten zum Beispiel auf natürliche Weise in der mehrdimensionalen Analysis auf (als Hesse-Matrizen gutartiger Funktionen) oder in der algebraischen Topologie (im Kontext von Schnittformen).

Ausblick 1.3.15 (Hesse-Matrix)**.** Definitheitskriterien sind (analog zum eindimensionalen Fall) in der mehrdimensionalen Analysis bei der Suche nach lokalen Extrema nützlich:

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine lokale Extremalstelle von f, so gilt $f'(x) = 0$. Dies ist also eine notwendige Bedingung für lokale Extremalstellen.

- Ist $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f'(x) = 0$, so gibt es das folgende hinreichende Kriterium: Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Ist diese positiv definit, so ist x eine isolierte lokale Minimalstelle. Ist $f''(x)$ negativ definit, so ist x eine isolierte lokale Maximalstelle. Ist $f''(x)$ indefinit, so ist x *keine* lokale Extremalstelle.

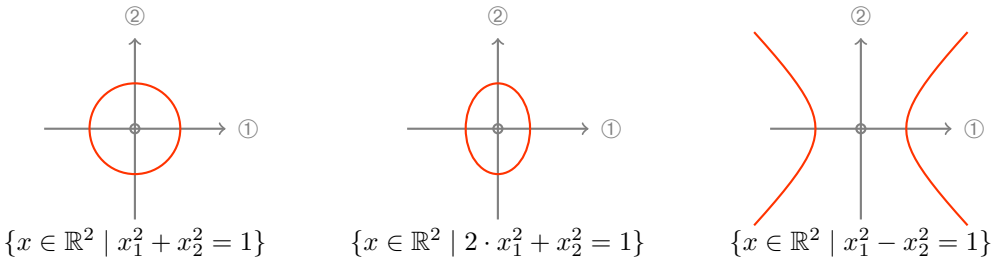


Abbildung 1.5.: Beispiele für ebene Quadriken

Indem man eine Matrix zu $f''(x)$ mithilfe der partiellen Ableitungen berechnet (sogenannte *Hesse-Matrix*) und nutzt, dass solche Matrizen symmetrisch sind, kann man Definitheitskriterien für symmetrische Matrizen anwenden.

1.3.3 Hauptachsentransformation

Eine schöne geometrische Anwendung des Spektralsatzes für symmetrische Matrizen ist die Hauptachsentransformation. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf „zentrierte“ Quadriken; der allgemeine Fall kann daraus aber durch quadratischer Ergänzung erhalten werden und braucht keine weiteren theoretischen Hilfsmittel. Quadriken sind Lösungsmengen von (homogenen) quadratischen Gleichungen:

Definition 1.3.16 (Quadrik)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die zugehörige *Quadrik* definiert als

$$Q(A, c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\mathsf{T} \cdot A \cdot x = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 1.3.17. Einfache Beispiele für ebene Quadriken sind (Abbildung 1.5):

$$Q\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{?} \qquad \text{(Einheitskreis)}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{?} \qquad \text{(eine Ellipse)}$$

$$Q\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 1\right) = \text{?} \qquad \text{(eine Hyperbel)}$$

Mithilfe des Spektralsatzes für symmetrische Matrizen lassen sich Quadriken vollständig klassifizieren. Insbesondere liefert dies auch eine Klassifikation der sogenannten Kegelschnitte.

Korollar 1.3.18 (Hauptachsentransformation). *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und eine lineare Isometrie $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ mit*

$$Q(A,c) = f\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_j^2 = c\right\}\right).$$

Man bezeichnet in dieser Situation die Geraden $f(\mathbb{R}\cdot e_1), \dots, f(\mathbb{R}\cdot e_n)$ (die paarweise orthogonal zueinander stehen) als Hauptachsen *von $Q(A,c)$.*

Beweis. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.8) gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{O}(n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$S^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D.$$

Sei $f := L(S) = L(S^{\mathsf{T}})^{-1} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist f eine lineare Isometrie bezüglich der euklidischen Norm und

$$\begin{aligned} Q(A,c) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x = c\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \cdot (S \cdot D \cdot S^{\mathsf{T}}) \cdot x = c\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (S^{\mathsf{T}} \cdot x)^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot (S^{\mathsf{T}} \cdot x) = c\right\} \\ &= f\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot x = c\right\}\right). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.3.19. Sei

$$Q := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{5}{4} \cdot x_1^2 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{4} \cdot x_2^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Um zu verstehen, was dies für ein geometrisches Gebilde ist, führen wir die Hauptachsentransformation durch: Als ersten Schritt schreiben wir Q als Quadrik einer geeigneten symmetrischen Matrix: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \cdot \sqrt{3} \\ -3/4 \cdot \sqrt{3} & -1/4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dann ist A symmetrisch und

$$Q = Q(A, 1).$$

Als nächsten Schritt bestimmen wir Hauptachsen für Q. Dazu bestimmen wir eine Eigenbasis von A. Mithilfe des charakteristischen Polynoms etc. findet man heraus, dass

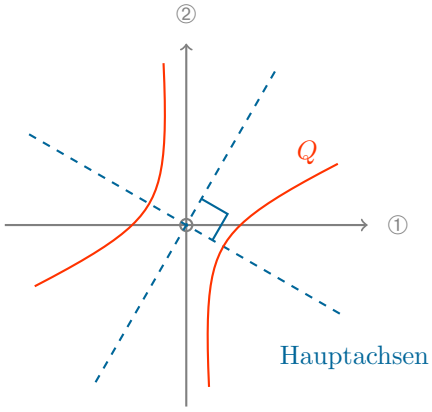


Abbildung 1.6.: Eine Hyperbel und ihre Hauptachsen

$$\left(v_1 := \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right)$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A ist. Die Eigenwerte sind dabei 2 bzw. -1. Also sind $\mathbb{R} \cdot v_1$ und $\mathbb{R} \cdot v_2$ Hauptachsen von Q und wir erhalten

$$Q = f\big(\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 - x_2^2 = 1\}\big)$$

mit $f := L((v_1 \mid v_2))$. Es handelt sich daher um eine Hyperbel (Abbildung 1.6). Dies lässt sich auch mit einem Computeralgebrasystem illustrieren.

Ausblick 1.3.20 (Trägheitsmomente/Deviationsmomente)**.** In der Physik werden Trägheitsmomente durch Tensoren beschrieben. Diese Tensoren kann man durch reelle Matrizen darstellen, die in dieser Situation symmetrisch sind. Mithilfe der Hauptachsentransformation lassen sich (orthogonale) Koordinaten finden, für die die zugehörige Trägheitsmomentenmatrix eine Diagonalmatrix ist (d.h. in diesen Koordinaten verschwinden die sogenannten Deviationsmomente). Solche Koordinaten sind z.B. bei der analytischen Untersuchung von Kreiseln hilfreich.

1.3.4 Der Trägheitssatz und die Signatur

Nach dem Spektralsatz sind reelle symmetrische Matrizen diagonalisierbar und man kann solche Diagonalisierungen durch orthogonale Matrizen realisieren. Insbesondere ist dies also beim Basiswechsel für Matrizen von symmetrischen Bilinearformen hilfreich. Allgemeiner gilt für solche Basiswechsel sogar:

Satz 1.3.21 (Trägheitssatz von Sylvester). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch.*

1. *Dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $r, k \in \mathbb{N}$ mit*

$$S^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Ist $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ wie im ersten Teil, so gilt $r = n_+$ und $k = n_-$, wobei*

$$\begin{aligned} n_+ := \max\big\{ \dim_{\mathbb{R}} U \;\big|\; & U \subset \mathbb{R}^n \text{ ist ein Untervektorraum} \\ & \text{und für alle } x \in U \setminus \{0\} \text{ ist } x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x > 0 \big\}, \\ n_- := \max\big\{ \dim_{\mathbb{R}} U \;\big|\; & U \subset \mathbb{R}^n \text{ ist ein Untervektorraum} \\ & \text{und für alle } x \in U \setminus \{0\} \text{ ist } x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot x < 0 \big\} \end{aligned}$$

   Insbesondere sind die Zahlen r und k im ersten Teil unabhängig von S.

Man bezeichnet die Differenz $n_+ - n_-$ als Signatur von A.

Beweis. Zu 1. Nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Korollar 1.3.8) gibt es $S \in \mathrm{O}(n)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$S^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D.$$

Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass die Eigenwerte wie folgt sortiert sind (ansonsten tauschen wir die Spalten von S entsprechend):

$$\begin{aligned} \lambda_1, \ldots, \lambda_r &> 0, \\ \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+k} &< 0, \\ \lambda_{r+k+1}, \ldots, \lambda_n &= 0. \end{aligned}$$

Dann hat die Matrix

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot s_1 \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \cdot s_r \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} \cdot s_{r+1} \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+k}}} \cdot s_{r+k} \;\Big|\; s_{r+k+1} \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; s_n \Big),$$

die man durch Reskalieren der Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von S erhält, die gewünschte Eigenschaft (nachrechnen).

Zu 2. Sei

$$\begin{aligned} b := B(A) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

die von A induzierte symmetrische Bilinearform und sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ wie im ersten Teil des Satzes.

Wir zeigen, dass $r = n_+$ ist (der Beweis von $k = n_-$ geht analog):

- Es gilt $r \leq n_+$, denn: Sei $U := L(S)(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_1, \ldots, e_r\}))$. Dann ist $\dim_{\mathbb{R}} U = r$ (da $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) und b ist auf U positiv definit (nachrechnen). Nach Definition von n_+ folgt somit $r \leq n_+$.
- Es gilt $r \geq n_+$, denn: *Angenommen,* es wäre $r < n_+$. Also gibt es einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim_{\mathbb{R}} W > r$, auf dem b positiv definit ist. Sei $V := L(S)(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{e_{r+1}, \ldots, e_r\}))$. Dann ist $\dim_{\mathbb{R}} V = n - r$ und b ist auf V negativ semi-definit (nachrechnen). Aus der Dimensionsformel für Untervektorräume (Satz I.3.5.7) erhalten wir

  $$\dim_{\mathbb{R}}(W \cap V) > 0.$$

  Insbesondere gibt es ein $x \in W \cap V$ mit $x \neq 0$. Dann gilt
  - $b(x, x) > 0$ wegen $x \in W$ und
  - $b(x, x) \leq 0$ wegen $x \in V$.

  Dies ist ein Widerspruch. Also ist $r \geq n_+$.

Insgesamt folgt $r = n_+$, wie behauptet. □

Die Bezeichnung des Satzes als Trägheitssatz geht auf die Originalarbeit von Sylvester zurück (da die Zahlen n_+ und n_- zu träge sind, sich unter Basiswechsel für Bilinearformen zu ändern).

Beispiel 1.3.22. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \cdot \sqrt{3} \\ -3/4 \cdot \sqrt{3} & -1/4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

aus hat nach den Berechnungen in Beispiel 1.3.19 die Signatur $1 - 1 = 0$.

Ausblick 1.3.23 (die Signatur in der Topologie)**.** Der Sylvestersche Trägheitssatz zeigt, dass auch die Signatur von symmetrischen Bilinearformen auf endlich-dimensionalen reellen Vektorräume wohldefiniert ist (da sie unter Basiswechsel invariant ist).

Diese Invariante wird zum Beispiel in der algebraischen Topologie verwendet: Dort treten auf natürliche Weise bei Mannigfaltigkeiten symmetrische Bilinearformen (die sogenannte Schnittform) auf. Da es auf dem entsprechenden endlich-dimensionalen reellen Vektorraum jedoch keine ausgezeichnete Basis gibt, benötigt man eine Invariante von symmetrischen Bilinearformen, die nicht auf die Wahl einer Basis angewiesen ist. Die Signatur ist eine solche Invariante und führt zur Signatur von Mannigfaltigkeiten.

2

Normalformen II: Moduln über Hauptidealringen

Wir kehren zum Klassifikationsproblem für Endomorphismen bzw. von Matrizen bis auf Ähnlichkeit zurück. Das Hauptziel ist dabei, die Existenz der Jordanschen Normalform zu beweisen. Wir werden dieses Problem durch einen algebraischen Trick auf ein anderes Klassifikationsproblem zurückführen, das eine schöne und auch auf andere Probleme anwendbare Lösung besitzt: die Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen.

In diesem Kapitel lernen wir die Grundlagen über Ringe (einer Verallgemeinerung von Körpern) und Moduln (das Analogon von Vektorräumen aber für Ringe) kennen und führen die Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen durch.

Überblick über dieses Kapitel.

2.1	Zerlegung von Endomorphismen und Moduln	54
2.2	Ringe	56
2.3	Moduln	62
2.4	Hauptidealringe	80
2.5	Moduln über Hauptidealringen	95

2.1 Zerlegung von Endomorphismen und Moduln

Um die Strategie für die Klassifikation von Endomorphismen geeignet formulieren zu können, führen wir etwas Terminologie für Endomorphismen ein bzw. Zerlegungen von Vektorräumen mit Endomorphismen in kleinere Bausteine.

Definition 2.1.1 (invariant, zyklisch, irreduzibel)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

- Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist *f-invariant*, wenn $f(U) \subset U$ gilt.
- Der Vektorraum U ist *f-zyklisch*, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt, für den $\{f^n(v) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Erzeugendensystem von U ist.
- Der Vektorraum V ist *f-reduzibel*, wenn es nicht-triviale komplementäre f-invariante Untervektorräume $U, W \subset V$ gibt (d.h. es gilt $f(U) \subset U$, $f(W) \subset W$ sowie $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$, aber $U \neq \{0\}$ und $W \neq \{0\}$).
- Der Vektorraum V ist *f-irreduzibel*, wenn er nicht f-reduzibel ist.

Beispiel 2.1.2 (diagonalisierbarer Endomorphismus)**.** Sei K ein Körper, seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und sei

$$\begin{aligned} f\colon K^2 &\longrightarrow K^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

Die Untervektorräume $K \cdot e_1$ und $K \cdot e_2$ sind f-invariant und komplementär. Also ist K^2 ein f-reduzibler Vektorraum.

- Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist K^2 *nicht* f-zyklisch (denn für alle $v \in K^2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $f^n(v) \in K \cdot v$).
- Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist K^2 ein f-zyklischer Vektorraum, denn $(e_1 + e_2, f(e_1 + e_2) = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2)$ ist eine Basis von K^2.

Beispiel 2.1.3 (Jordanblock)**.** Sei K ein Körper, sei $\lambda \in K$ und sei

$$\begin{aligned} f\colon K^2 &\longrightarrow K^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot x. \end{aligned}$$

Der Untervektorraum $K \cdot e_1 \subset K^2$ ist f-invariant (da e_1 ein Eigenvektor von f ist), aber der Vektorraum K^2 ist f-irreduzibel (nicht-triviale Untervektorräume von K^2 sind eindimensional; eindimensionale f-invariante Untervektorräume sind Eigenräume; die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von f ist nur 1). Außerdem ist K^2 ein f-zyklischer Vektorraum, denn $(e_2, f(e_2))$ ist eine Basis von K^2.

Bei der Untersuchung orthogonaler bzw. selbstadjungierter Matrizen hat uns das Standardskalarprodukt via Orthogonalität für jeden invarianten Unterraum einen invarianten komplementären Unterraum geliefert. Im allgemeinen Fall besitzt jedoch *nicht* jeder invariante Unterraum einen invarianten komplementären Unterraum, wie dieses Jordanblock-Beispiel zeigt.

Beispiel 2.1.4 (Endomorphismus ohne Eigenwerte)**.** Sei $\varphi \in (0, 2 \cdot \pi) \setminus \{\pi\}$ und sei

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto R(\varphi) \cdot x. \end{aligned}$$

Dann besitzt der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ *keine* eindimensionalen f-invarianten Untervektorräume (da f keine reellen Eigenwerte besitzt). Also ist $\mathbb{R}^2$ ein f-irreduzibler Vektorraum. Außerdem ist $(e_1, f(e_1))$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, d.h. der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist f-zyklisch. Aber f kann *nicht* durch eine Jordanblock dargestellt werden (da f keine reellen Eigenwerte besitzt).

Um die *Existenz* der Jordanschen Normalform (Satz I.6.5.12) für komplexe Matrizen zu beweisen, genügt es also (in Kombination mit einer Induktion über die Dimension des unterliegenden Vektorraums) die folgenden Aussagen für Endomorphismen $f \colon V \longrightarrow V$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V zu zeigen:

- Ist V ein f-irreduzibler Vektorraum, so ist V bereits f-zyklisch.
- Ist V ein f-irreduzibler (und damit f-zyklischer) Vektorraum, so kann f bezüglich einer geeigneten Basis durch einen Jordanblock dargestellt werden.

Für die *Eindeutigkeit* müssen wir zusätzlich nachweisen, dass diese Zerlegungen im wesentlichen eindeutig sind.

Die Schlüsselidee ist, Endomorphismen $f \colon V \longrightarrow V$ eines K-Vektorraums V mit dem folgenden Trick in eine andere algebraische Struktur zu übersetzen: Dazu betrachten wir die „Skalarmultiplikation“

$$\begin{aligned} K[T] \times V &\longrightarrow V \\ \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot T^j, x \right) &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot f^j(x) \end{aligned}$$

von $K[T]$ auf V (dabei bezeichnet f^j die j-fache Komposition von f mit sich selbst). Nun ist $K[T]$ zwar kein Körper, aber immer noch gut genug für das Klassifikationsziel. Durch diese Konstruktion wird V zu einem Modul über dem Ring $K[T]$. Die wesentliche Beobachtung ist dabei, dass sich die grundlegenden Eigenschaften von $f\colon V \longrightarrow V$ wie Irreduzibilität etc. an Eigenschaften des $K[T]$-Moduls V ablesen lassen, die sich wiederum durch Berechnungen mit Polynomen bestimmen lassen. Diese Theorie lernen wir in den folgenden Abschnitten kennen.

2.2 Ringe

Ringe sind algebraische Strukturen mit einer verträglichen Addition und Multiplikation. Grob gesagt sind Ringe eine Verallgemeinerung von Körpern, wobei man auf die Existenz von multiplikativen Inversen (und manchmal auch auf die Kommutativität der Multiplikation oder gar auf die Existenz eines neutralen Elements bezüglich Multiplikation) verzichtet.

2.2.1 Ringe

Wir führen die grundsätzlichen Begriffe über Ringe ein; wir schränken uns der Einfachheit halber auf Ringe mit Eins ein.

Definition 2.2.1 (Ring)**.** Ein *Ring* ist ein Quintupel $(R, +, \cdot, 0, 1)$ bestehend aus einer Menge R, Abbildungen $+, \cdot : R \times R \longrightarrow R$ (*Addition* bzw. *Multiplikation*) und Elementen $0, 1 \in R$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Tripel $(R, +, 0)$ bildet eine abelsche Gruppe.
- das Tripel $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid.
- Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. für alle $x, y, z \in R$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Ein Ring $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ist *kommutativ*, wenn

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Wie im Falle anderer algebraischer Strukturen werden wir auch einfach „Sei R ein Ring.“ etc. schreiben, wenn die restliche Struktur/Notation aus dem Kontext klar ist.

Beispiel 2.2.2 (Ringe)**.**

- Alle Körper sind kommutative Ringe.

- Der *Nullring* besteht aus der Menge $\{0\}$ mit der einzig möglichen Addition bzw. Multiplikation; in diesem Fall ist $1 = 0$.
- Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation sowie den gewöhnlichen Elementen $0, 1 \in \mathbb{Z}$ einen kommutativen Ring.
- Ist $n \in \mathbb{N}$, so bildet $\mathbb{Z}/n$ bezüglich der repräsentantenweisen Addition bzw. Multiplikation (und den Elementen $[0]$ bzw. $[1]$) einen kommutativen Ring (Beispiel I.2.2.20).
- Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ bezüglich der Polynomaddition bzw. Polynommultiplikation (und den konstanten Polynomen 0 und 1) ein kommutativer Ring (Kapitel I.6.4.1).
- Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum, so ist der K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ aller K-linearen Abbildungen $V \longrightarrow V$ ein Ring (bezüglich punktweiser Addition bzw. Abbildungskomposition als Multiplikation); das neutrale Element der Addition ist der Nullhomomorphismus $V \longrightarrow V$ und das neutrale Element der Multiplikation ist dabei id_V. Ist $\dim_K V \geq 2$, so ist dieser Ring *nicht* kommutativ.

  Insbesondere bildet auch für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ bezüglich Matrixaddition/-multiplikation (und der Null- bzw. Einheitsmatrix) einen Ring.

Allgemeine Ringe sind zu wild, um vernünftig damit arbeiten zu können. Wir werden uns daher im folgenden zumeist auf algebraisch gutartige Ringe einschränken.

Definition 2.2.3 (Integritätsring)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Man bezeichnet den Ring R als *Integritätsring*, wenn er *nullteilerfrei* ist, d.h., wenn folgendes gilt:

$$\forall_{x,y\in R} \quad x \cdot y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$$

Beispiel 2.2.4.

- Sind Körper Integritätsringe?

  Ja Nein
- Ist $\mathbb{Z}$ ein Integritätsring?

  Ja Nein
- Ist $\mathbb{Z}/2025$ ein Integritätsring?

  Ja Nein

- Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet mit komponentenweiser Addition bzw. Multiplikation und den Elementen $(0,0)$, $(1,1)$ einen kommutativen Ring. Handelt es sich dabei um einen Integritätsring?

  Ja Nein

- Sei K ein Körper. Ist $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ ein Integritätsring?

  Ja Nein

Proposition 2.2.5 (Nullteilerfreiheit von Polynomringen)**.** *Sei K ein Körper.*

1. *Für alle $f, g \in K[T]$ gilt* $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.
2. *Insbesondere ist $K[T]$ ein Integritätsring.*

Beweis. Zu 1. Es genügt, die Behauptung für $f \neq 0$ und $g \neq 0$ zu beweisen (wegen $\deg 0 = -\infty$ und den gewöhnlichen Rechenregeln für $-\infty$).

Sei $n := \deg f$ und $m := \deg g$. Also können wir f und g in der Form $f = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot T^j$ bzw. $g = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot T^j$ mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ schreiben. Nach Definition der Multiplikation von Polynomen ist

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot T^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot T^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{k=\max(0,j-m)}^{\min(n,j)} a_k \cdot b_{j-k} \right) \cdot T^j \\ &= (a_n \cdot b_m) \cdot T^{n+m} + \sum_{j=0}^{m+n-1} \left(\sum_{k=\max(0,j-m)}^{\min(n,j)} a_k \cdot b_{j-k} \right) \cdot T^j. \end{aligned}$$

Da K als Körper nullteilerfrei ist, ist $a_n \cdot b_m \neq 0$. Also ist $\deg(f \cdot g) = n + m = \deg f + \deg g$.

Zu 2. Wir wissen bereits, dass $K[T]$ ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$ ist. Es bleibt also nur die Nullteilerfreiheit zu zeigen: Seien $f, g \in K[T] \setminus \{0\}$. Dann ist $\deg f \geq 0$ und $\deg g \geq 0$. Mit dem ersten Teil folgt

$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g \geq 0,$$

und daher insbesondere $f \cdot g \neq 0$. □

Bemerkung 2.2.6. Allgemeiner kann man nicht nur Polynomringe mit Körperkoeffizienten, sondern mit Ringkoeffizienten betrachten. Die obige Proposition verallgemeinert sich entsprechend: Ist R ein Integritätsring, so ist auch der Polynomring $R[T]$ über R ein Integritätsring.

2.2.2 Ringhomomorphismen

Zu Objekten (in diesem Fall: Ringe) gehören Morphismen (in diesem Fall: Ringhomomorphismen):

Definition 2.2.7 (Ringhomomorphismus)**.** Seien R, S Ringe. Ein *Ringhomomorphismus* $R \longrightarrow S$ ist eine Abbildung $f\colon R \longrightarrow S$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildung f ist ein Gruppenhomomorphismus der unterliegenden additiven abelschen Gruppen, d.h. es gilt $f(0) = 0$ und

$$\forall_{x,y\in R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

- Die Abbildung f ist ein Monoidhomomorphismus der unterliegenden multiplikativen Monoide, d.h. es gilt $f(1) = 1$ und

$$\forall_{x,y\in R} \quad f(x\cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Analog zum Fall von Vektorräumen führt man den Begriff der *Ringisomorphismen* als Ringhomomorphismen ein, die einen inversen Ringhomomorphismus besitzen. Die Klasse der Ringe bildet zusammen mit den Ringhomomorphismen eine Kategorie (Anhang I.A.9).

Beispiel 2.2.8.

- Die Inklusionen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ sind Ringhomomorphismen.
- Ist R ein Ring, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow R$.
- Sei K ein Körper und sei $x \in K$. Dann ist der Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{aligned} K[T] &\longrightarrow K \\ p &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

  ein Ringhomomorphismus (nachrechnen).

  Ist $p \in K[T]$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto p(y) \end{aligned}$$

  im allgemeinen *kein* Ringhomomorphismus!

- Es gibt *keinen* Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (wohin soll $1/2$?) und *keinen* Ringhomomorphismus $\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{Q}$ (in $\mathbb{F}_2$ gilt $1+1 = 0$, nicht aber in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$) sowie *keinen* Ringhomomorphismus $\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ (in $\{0\}$ gilt $0 = 1$, aber in $\mathbb{Z}$ nicht).

Im folgenden erklären wir, wie man Polynomringe mithilfe von Homomorphismen durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren kann. Um die universelle Eigenschaft von Polynomringen formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Algebren bzw. Algebrahomomorphismen:

Bemerkung 2.2.9 (Algebren, Algebrenhomomorphismus)**.** Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* ist ein Paar $(A, *)$, bestehend aus einem Ring A und einer Abbildung $*\colon K \times A \longrightarrow A$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die unterliegende additive Gruppe von A bildet zusammen mit $*$ einen K-Vektorraum.
2. Die Skalarmultiplikation $*$ ist mit der Ringmultiplikation auf A verträglich, d.h. es gilt

$$\forall_{\lambda\in K} \quad \forall_{x,y\in A} \quad \lambda * (x \cdot y) = (\lambda * x) \cdot y = x \cdot (\lambda * y).$$

Im folgenden werden wir im Normalfall in Algebren sowohl die Skalar- als auch die Ringmultiplikation mit „$\cdot$“ bezeichnen.

Eine Abbildung zwischen K-Algebren ist ein *K-Algebrenhomomorphismus*, wenn sie gleichzeitig ein Ring- und ein K-Vektorraumhomomorphismus ist.

Wichtige Beispiele für K-Algebren sind der Körper K selbst (in diesem Fall stimmen die Ring- und die Skalarmultiplikation überein), der Polynomring $K[T]$ und die Endomorphismenringe $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ bzw. $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$, wobei V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$ ist, jeweils bezüglich der bereits bekannten Ring- und K-Vektorraumstruktur.

Satz 2.2.10 (universelle Eigenschaft des Polynomrings)**.** *Sei K ein Körper.*

1. *Ist A eine K-Algebra und $x \in A$, so gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon K[T] \longrightarrow A$ mit*

$$\varphi(T) = x.$$

   Ist $p \in K[T]$, so schreibt man auch kurz $p(x) := \varphi(p)$.

2. *Sei P eine K-Algebra und $t \in P$ mit folgender Eigenschaft: Ist A eine K-Algebra und $x \in A$, so gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon P \longrightarrow A$ mit $\varphi(t) = x$. Dann gibt es genau einen K-Algebrenisomorphismus $\varphi\colon K[T] \longrightarrow P$ mit $\varphi(T) = t$.*

Beweis. Zu 1. Sei A eine K-Algebra und sei $x \in A$.

Existenz. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi\colon K[T] &\longrightarrow A \\ \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j &\longmapsto \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Multiplikation auf $K[T]$ und den Verträglichkeitseigenschaften von Skalar- und Ringmultiplikation in A folgt, dass φ tatsächlich ein K-Algebrenhomomorphismus ist (nachrechnen). Nach Konstruktion gilt dabei $\varphi(T) = x$.

Eindeutigkeit. Seien $\varphi, \psi\colon K[T] \longrightarrow A$ Algebrenhomomorphismen mit der Eigenschaft $\varphi(T) = x = \psi(T)$. Dann gilt für alle $f = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j$ (mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_m \in K$), dass

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \varphi\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j\right) && \text{(Darstellung von } f\text{)} \\
&= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \varphi(T^j) && (\text{?} \qquad\qquad) \\
&= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \big(\varphi(T)\big)^j && (\text{?} \qquad\qquad) \\
&= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j && (\text{?} \qquad\qquad)
\end{aligned}$$

und ebenso auch $\psi(f) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j$. Insbesondere ist $\varphi(f) = \psi(f)$.

Zu 2. Dies folgt mit dem üblichen Trick für universelle Eigenschaften (Abbildung 2.2). Wir werden diesen später in einem anderen Kontext ausführlich diskutieren. □

Ausblick 2.2.11 (universelle Eigenschaften)**.** Universelle Eigenschaften sind das zentrale Werkzeug deklarativer Mathematik – sie erlauben es, konkrete Konstruktionen durch transparente Eigenschaften zu ersetzen. Die meisten universellen Eigenschaften (z.B. auch die universelle Eigenschaft von Quotienten, direkten Summen, Produkten, ...) sind von der obigen Form:

- Einerseits geben sie einem eine einfache Methode, um Morphismen zu konstruieren. Dabei lassen sich im Normalfall nur entweder Morphismen *aus* dem Objekt heraus oder Morphismen *in* das Objekt hinein einfach charakterisieren. Im Fall des Polynomrings ist es nach der universellen Eigenschaft leicht, Morphismen ? zu konstruieren.

- Andererseits die universellen Eigenschaften eine Methode, um das gegebene Objekt (bis kanonische Isomorphie) eindeutig zu charakterisieren und damit unter anderen Objekten wiederzuerkennen. Dieses Erkennungsprinzip erlaubt es, von konkreten Konstruktionen zu abstrahieren.

Diese Aspekte lassen sich im Rahmen der Kategorientheorie allgemeiner formalisieren.

Beispiel 2.2.12 (Endomorphismenpolynome)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi\colon K[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

mit $\varphi(T) = f$. Ist $p \in K[T]$, so schreiben wir kurz $p(f) := \varphi(p)$.

Expliziter gilt (nach dem Beweis von Satz 2.2.10): Ist $p = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j \in K[T]$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_m \in K$, so ist

$$p(f) = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot f^j,$$

wobei f^j die j-fache Komposition von f bezeichnet.

2.3 Moduln

Moduln über Ringen sind algebraische Strukturen, die analog zu Vektorräumen über Körpern gebildet werden. Viele grundlegende Eigenschaften von Vektorräumen übertragen sich auf Moduln (alles, wofür man keine multiplikativen Inversen von Skalaren oder die Kommutativität der Multiplikation benötigt). Im allgemeinen ist die Modultheorie jedoch viel verworrener als die Vektorraumtheorie, da Ringe viel wilder sein können als Körper.

2.3.1 Moduln

Wir orientieren uns bei der Definition von Moduln an der Definition von Vektorräumen:

Anmerkung zum Lernen. Dies ist eine gute Gelegenheit, Grundlagen zu Vektorräumen zu wiederholen und zu vergleichen.

Definition 2.3.1 (Modul, Untermodul)**.** Sei R ein Ring. Ein *R-Modul* ist ein Quadrupel $(V, +, \cdot, 0)$, bestehend aus

- einer Menge V,
- einer Abbildung $+\colon V \times V \longrightarrow V$,
- einer Abbildung $\cdot : R \times V \longrightarrow V$,
- einem Element $0 \in V$

mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $(V, +, 0)$ eine abelsche Gruppe.
- *Assoziativität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v \in V$ gilt
$$(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v).$$
- *Neutrale Skalarmultiplikation.* Für alle $v \in V$ gilt
$$1 \cdot v = v.$$
- *Distributivität.* Für alle $a, b \in R$ und alle $v, w \in V$ gilt
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad \text{und} \quad a \cdot (v + w) = a \cdot v + b \cdot w.$$

Ein *R-Untermodul von V* ist eine Teilmenge $U \subset V$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Abbildungen $+ \colon V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot \colon R \times V \longrightarrow V$ schränken sich zu Abbildungen $+ \colon U \times U \longrightarrow U$ und $\cdot \colon R \times U \longrightarrow U$ ein.
- Es ist $0 \in U$.
- Die Menge U bildet bezüglich dieser eingeschränkten Addition bzw. Skalarmultiplikation und 0 einen R-Modul.

Caveat 2.3.2. In diesem Zusammenhang heißt es im Singular „der Modul“ bzw. im Plural „die Moduln“ (jeweils mit Betonung auf der ersten Silbe).

Beispiel 2.3.3 (Moduln)**.**

- Ist K ein Körper und V ein K-Vektorraum, so ist V ein K-Modul. Man spricht in diesem Fall aber eigentlich immer von Vektorräumen und nicht von Moduln.
- Ist R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$, so bildet die Menge R^n der n-Tupel mit Koeffizienten aus R (geschrieben als Spaltenvektoren) einen R-Modul bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation (im Falle von Körpern: Proposition I.3.1.7).
- Ist R ein Ring und X eine Menge, so bildet die Menge $\mathrm{Abb}(X, R)$ aller Abbildungen $X \longrightarrow R$ einen R-Modul bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation (im Falle von Körpern: Beispiel I.3.1.10).
- Ist $(A, +, 0)$ eine abelsche Gruppe, so bildet A mit dieser Addition und der Skalarmultiplikation
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times A &\longrightarrow A \\ (n, v) &\longmapsto \begin{cases} \overbrace{v + \cdots + v}^{n \text{ mal}} & \text{falls } n > 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \\ -(\underbrace{v + \cdots + v}_{-n \text{ mal}}) & \text{falls } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

einen $\mathbb{Z}$-Modul. Umgekehrt liefert jeder $\mathbb{Z}$-Modul durch Vergessen der Skalarmultiplikation eine abelsche Gruppe (bezüglich der Addition des Moduls).

Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ wird auf diese Weise zum Beispiel die additive Gruppe von $\mathbb{Z}/n$ zu einem n-elementigen (!) $\mathbb{Z}$-Modul.

Bemerkung 2.3.4 (Rechnen in Moduln)**.** Die folgenden grundlegenden Eigenschaften übertragen sich wortwörtlich von Vektorräumen auf Moduln (indem man die Beweise direkt in die Sprache der Moduln übersetzt): Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul.

- *Grundlegende Rechnungen in Moduln.* Die Modulversion von Proposition I.3.1.11 lautet (siehe auch Caveat 2.3.5):
  1. Für alle $a \in R$ gilt $a \cdot 0 = 0$. Dabei bezeichnet 0 auf beiden Seiten das neutrale Element der Gruppe $(V, +, 0)$.
  2. Für alle $v \in V$ gilt $0 \cdot v = 0$. Dabei bezeichnet 0 auf der linken Seite das neutrale Element von $(R, +, 0)$ und auf der rechten Seite das neutrale Element von $(V, +, 0)$.
  3. Für alle $a \in R$, $v \in V$ gilt
  $$(-a) \cdot v = -(a \cdot v) = a \cdot (-v).$$

- *Charakterisierung von Untermoduln.* Die Modulversion von Proposition I.3.2.3 lautet: Sei $U \subset V$ eine nicht-leere Teilmenge. Dann ist U genau dann ein R-Untermodul von V, wenn folgende Bedingungen beide erfüllt sind:
  ① Für alle $u, v \in U$ gilt $u + v \in U$.
  ② Für alle $a \in R$ und alle $u \in U$ gilt $a \cdot u \in U$.

- *Durchschnitte.* Die Modulversion von Proposition I.3.2.9 lautet: Sind $U, W \subset V$ Untermoduln von V, so ist auch $U \cap W$ ein R-Untermodul von V.

  Allgemeiner gilt: Ist $Z \subset P(V)$ eine nicht-leere Menge von R-Untermoduln von V, so ist auch der Durchschnitt $\bigcap Z = \{v \mid \forall_{U \in Z} \quad v \in U\}$ ein R-Untermodul von V.

- *Erzeugte Untermoduln.* Sei $E \subset V$. Dann heißt der R-Untermodul
  $$\mathrm{Span}_R(E) := \bigcap_{U \in U_E(V)} U$$
  von E erzeugter R-Untermodul von V. Dabei bezeichnet $U_E(V) \subset P(V)$ die Menge aller R-Untermoduln U von V mit $E \subset U$ (insbesondere ist $V \in U_E(V)$).

Ist $\mathrm{Span}_R(E) = V$, so ist E ein *Erzeugendensystem von* V. Falls V ein endliches Erzeugendensystem besitzt, ist V ein *endlich erzeugter* R*-Modul*.

Analog zu Proposition I.3.2.12 erhalten wir die folgende explizite Beschreibung erzeugter Untermoduln: Ist $E \subset V$, so gilt

$$\mathrm{Span}_R(E) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot v_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in E, a_1, \dots, a_n \in R \right\}.$$

Caveat 2.3.5 (Torsion in Moduln)**.** Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Ist $a \in R$ und $v \in V$ mit $a \cdot v = 0$, so folgt im allgemeinen *nicht*, dass $a = 0$ oder $v = 0$ ist! Dies ist eine der wesentlichen Komplikationen der Modultheorie.

Zum Beispiel gilt in dem $\mathbb{Z}$-Modul, den wir aus der additiven Gruppe von $\mathbb{Z}/2$ erhalten, dass $2 \cdot 1 = 0$ ist, aber $2 \neq 0$ (in $\mathbb{Z}$) und $1 \neq 0$ (in $\mathbb{Z}/2$).

Unsere ursprüngliche Motivation Moduln zu untersuchen basiert auf dem folgenden zentralen Beispiel, das wir bereits in Kapitel 2.1 angedeutet haben; in Kapitel 3 werden wir die Modultheorie der folgenden Abschnitte auf solche Moduln zu Vektorraumendomorphismen anwenden.

Proposition 2.3.6 (Modul zu einem Endomorphismus)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann bildet V bezüglich der Vektorraumaddition, der Abbildung*

$$\begin{aligned} \cdot\colon K[T] \times V &\longrightarrow V \\ (p, x) &\longmapsto \big(p(f)\big)(x) \end{aligned}$$

und $0 \in V$ einen $K[T]$-Modul, den zu f assoziierten $K[T]$-Modul $V[f]$.

Beweis. Da V ein K-Vektorraum ist, bildet V bezüglich Addition und $0 \in V$ eine abelsche Gruppe. Es bleiben daher nur die Aussagen über die $K[T]$-Skalarmultiplikation zu zeigen. Diese zeigt man, indem man die beteiligten Definitionen Schritt für Schritt expandiert:

- *Assoziativität:* Seien $p, q \in K[T]$ und $v \in V$. Da der Einsetzungshomomorphismus $K[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, V)$ zu f (Beispiel 2.2.12) ein K-Algebrenhomomorphismus ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} (p \cdot q) \cdot v &= \big((p \cdot q)(f)\big)(v) && \text{(Definition der } K[T]\text{-Skalarmultiplikation zu } f) \\ &= \big(p(f) \circ q(f)\big)(v) && \text{(Multiplikation von Endomorphismen ist Komposition)} \\ &= \big(p(f)\big)\big(\big(q(f)\big)(v)\big) && \text{(Definition der Komposition)} \\ &= \big(p(f)\big)(q \cdot v) && \text{(Definition der } K[T]\text{-Skalarmultiplikation zu } f) \\ &= p \cdot (q \cdot v). && \text{(Definition der } K[T]\text{-Skalarmultiplikation zu } f) \end{aligned}$$

- *Neutrale Skalarmultiplikation:* Sei $v \in V$. Dann gilt für das Einspolynom $E := 1 = T^0 \in K[T]$ wegen $f^0 = \mathrm{id}_V$, dass

$$E \cdot v = \big(E(f)\big)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v.$$

- *Distributivität:* Seien $p, q \in K[T]$ und $v, w \in V$. Analog zur Assoziativität erhalten wir (da die Addition in $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ punktweise definiert ist)

$$\begin{aligned}(p+q) \cdot v &= \big((p+q)(f)\big)(v)\\ &= \big(p(f) + q(f)\big)(v)\\ &= \big(p(f)\big)(v) + \big(q(f)\big)(v)\\ &= p \cdot v + q \cdot v.\end{aligned}$$

  Da $p(f)$ eine lineare Abbildung ist, gilt außerdem auch

$$\begin{aligned}p \cdot (v+w) &= \big(p(f)\big)(v+w)\\ &= \big(p(f)\big)(v) + \big(p(f)\big)(w)\\ &= p \cdot v + p \cdot w.\end{aligned}$$

□

2.3.2 Modulhomomorphismen

Modulhomomorphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen Moduln:

Definition 2.3.7 (Modulhomomorphismus)**.** Sei R ein Ring und seien V und W Moduln über R. Eine *R-lineare Abbildung von V nach W* (oder ein *R-Modulhomomorphismus* von V nach W) ist eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Verträglichkeit mit der Addition.* Für alle $v, v' \in V$ gilt

$$f(v + v') = f(v) + f(v').$$

- *Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.* Für alle $v \in V$ und alle $a \in R$ gilt

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v).$$

Ein *R-Modulisomorphismus* ist ein Modulhomomorphismus, der einen bezüglich Komposition inversen Modulhomomorphismus besitzt. Wenn es einen R-Modulisomorphismus $V \longrightarrow W$ gibt, so nennen wir V und W *isomorph (als R-Moduln)* und schreiben dafür $V \cong_R W$.

Strukturell gesehen wäre es naheliegend, auch die Bedingung „$f(0) = 0$“ in der Definition zu fordern. Wir folgen hier der gebräuchlichen Konvention, dies in der Definition linearer Abbildungen nicht explizit zu fordern; diese Eigenschaft folgt bereits aus den anderen Eigenschaften (Proposition I.4.1.9).

Analog zum Fall von Vektorräumen gilt: Isomorphismen besitzen *eindeutige* inverse Isomorphismen.

Die Klasse der Moduln über einem gegebenen Ring bildet zusammen mit den Modulhomomorphismen eine Kategorie (Anhang I.A.9).

Beispiel 2.3.8 (Modulhomomorphismen)**.**

- Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen sind selbstverständlich auch Modulhomomorphismen.
- Gruppenhomomorphismen abelscher Gruppen (d.h. Abbildungen zwischen abelschen Gruppen, die mit der Addition und dem neutralen Element verträglich sind), sind $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen bezüglich der zugehörigen $\mathbb{Z}$-Modulstruktur aus Beispiel 2.3.3.
- Ist R ein Ring und $m, n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $\mathrm{M}_{m\times n}(R)$ für die Menge aller $\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$-indizierten Familien in R. Analog zum Fall von Matrizen über Körpern definieren wir die Matrixmultiplikation für Matrizen über Ringen.

  Ist R ein kommutativer Ring und ist $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$, so ist

  $$\begin{aligned} L(A)\colon R^n &\longrightarrow R^m \\ x &\longmapsto A\cdot x \end{aligned}$$

  ein R-Modulhomomorphismus (für die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation benötigt man die Kommutativität von R; alternativ kann man auch durch $x \longmapsto (x^{\mathsf{T}}\cdot A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ für allgemeine Ringe Modulhomomorphismen definieren).

Proposition 2.3.9 (Modulhomomorphismen zwischen Endomorphismenmoduln)**.** *Sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K und seien $f\colon V \longrightarrow V$ und $g\colon W \longrightarrow W$ Endomorphismen. Sei $F\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung F ist ein $K[T]$-Modulhomomorphismus $V[f] \longrightarrow W[g]$.*
2. *Es gilt $F\circ f = g\circ F$. In anderen Worten: Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ V & \xrightarrow[F]{} & W \end{array}$$

   ist kommutativ.

Beweis. Es sei F ein $K[T]$-Modulhomomorphismus $V[f] \longrightarrow W[g]$. Dann ist $F\circ f = g\circ F$, denn: Sei $v \in V$. Da F mit der $K[T]$-Skalarmultiplikation verträglich ist, folgt

$$\begin{aligned} g\big(F(v)\big) &= \big(T(g)\big)\big(F(v)\big) \\ &= T \cdot F(v) \\ &= F(T \cdot v) && (F \text{ ist } K[T]\text{-linear}) \\ &= F\big((T(f))(v)\big) \\ &= F\big(f(v)\big). \end{aligned}$$

Es gelte umgekehrt $F \circ f = g \circ F$. Dann ist F ein $K[T]$-Modulhomomorphismus, denn: Induktiv folgt aus der Voraussetzung, dass $F \circ f^j = g^j \circ F$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt (nachrechnen). Ist $p = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j \in K[T]$ mit $a_j, \dots, a_m \in K$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(p \cdot v) = F\big((p(f))(v)\big) = F\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot f^j(v)\right) &= \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot F\big(f^j(v)\big) \\ = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot g^j\big(F(v)\big) && (\text{da } F \circ f^j = g^j \circ F) \\ = p \cdot \big(F(v)\big). \end{aligned}$$

Da F als K-lineare Abbildung auch mit Addition verträglich ist, folgt die Behauptung. □

Insbesondere werden also zwei Endomorphismen von Vektorräumen genau dann durch einen Vektorraumisomorphismus ineinander übersetzt, wenn die zugehörigen Moduln über dem Polynomring isomorph sind.

Bemerkung 2.3.10 (Kerne von Modulhomomorphismen)**.** Sei R ein Ring und sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann bezeichnet man

$$\ker f := \big\{x \in V \;\big|\; f(x) = 0\big\} \subset V$$

als *Kern von* f. Es gilt (nachrechnen):

1. Der Kern von f ist ein R-Untermodul von V.
2. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ ist.

Beispiel 2.3.11 (die geraden Zahlen)**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ n &\longmapsto \begin{cases} [0] & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ [1] & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus (wobei wir $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2$ als abelsche Gruppen bezüglich Addition bzw. auf diese Weise als $\mathbb{Z}$-Moduln auffassen). Also ist $\ker f$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}$. Nach Definition gilt dabei

$$\ker f = \boxed{?}$$

2.3.3 Ideale

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Modul- und der Vektorraumtheorie ist die Tatsache, dass der R-Modul R im allgemeinen nicht-triviale R-Untermoduln besitzen kann. Es ist plausibel, dass solche Untermoduln eine wichtige Rolle bei der Klassifikation der R-Moduln spielen werden. Daher bekommen sie einen eigenen Namen:

Definition 2.3.12 (Ideal)**.** Sei R ein Ring. Ein *(linksseitiges) Ideal* in R ist ein R-Untermodul des R-Moduls R.

Beispiel 2.3.13 (Ideale)**.**

- Ist K ein Körper, so sind $\{0\}$ und K die einzigen Ideale in K (nachrechnen).
- Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind Ideale im Ring $\mathbb{Z}$?
  - $n \cdot \mathbb{Z} := \{a \cdot n \mid a \in \mathbb{Z}\}$ für $n \in \mathbb{Z}$?
    Ja Nein
  - $\mathbb{N}$
    Ja Nein
  - $\{0\} \cup \{2 \cdot k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
    Ja Nein
- Ist K ein Körper, ist V ein K-Vektorraum und ist $U \subset V$, so ist die Menge $\{f \in \mathrm{Hom}_K(V, V) \mid f|_U = 0\}$ ein (linksseitiges) Ideal im Endomorphismenring $\mathrm{Hom}_K(V, V)$.

Bemerkung 2.3.14 (Kerne als Ideale)**.** Seien R, S Ringe und sei $\varphi\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Dann bezeichnet man

$$\ker \varphi := \big\{x \in R \,\big|\, \varphi(x) = 0\big\} \subset R$$

als *Kern von* φ. Es gilt (nachrechnen!):

1. Der Kern von φ ist ein Ideal in R.
2. Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$ ist.

Ausblick 2.3.15. Ideale sind auch noch aus einem weiteren Grund in der Ringtheorie von Bedeutung: Ideale sind nämlich genau die Teilmengen von Ringen, die als Kerne von Ringhomomorphismen auftreten können, und können verwendet werden, um sogenannte Quotientenringe und Quotientenkörper zu konstruieren. Dies werden wir im Rahmen der Körpertheorie in der Algebra systematisch untersuchen.

2.3.4 Quotientenmoduln

Um Moduln insgesamt besser verstehen zu können, benötigen wir außer Untermoduln auch die bereits für Vektorräume bekannten Konstruktionstechniken der Quotientenmoduln und der direkten Summen.

Wir beginnen mit der Definition der Quotientenmoduln; dabei verwenden wir wie im Fall von Vektorräumen eine geeignete Äquivalenzrelation (die alles vergisst, was in dem gegebenen Untermodul passiert, Proposition I.3.5.15 und I.3.5.16):

Proposition 2.3.16 (Quotienten nach Untermoduln). *Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul, sei $U \subset V$ ein Untermodul und sei $\sim_U$ die Relation auf V, die durch*

$$\big\{(v,w) \in V \times V \;\big|\; v - w \in U\big\} \subset V \times V$$

definiert ist. Wir schreiben dann $V/U := V/\sim_U$.

1. *Für alle $v, w \in V$ gilt*

$$v \sim_U w \iff v + U = w + U$$

2. *Die Relation $\sim_U$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.*

3. *Ist $v \in V$, so ist die von v repräsentierte Äquivalenzklasse bezüglich $\sim_U$ der affine Untermodul $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$.*

Beweis. Der Beweis im Fall von Vektorräumen hat an keiner Stelle verwendet, dass die Skalare aus einem Körper stammen. Daher können wir den Beweis wörtlich übernehmen (Proposition I.3.5.15):

Zu 1. Seien $v, w \in V$. Gilt $v \sim_U w$, so ist $u := v - w \in U$, und damit

$$v + U = (w + u) + U = w + (u + U) = w + U.$$

Gilt umgekehrt $v + U = w + U$, so folgt insbesondere, dass es ein $u \in U$ mit $v + 0 = w + u$ gibt. Dann ist aber

$$v - w = u \in U.$$

Zu 2. Dies folgt direkt aus der Beschreibung im ersten Teil.

Zu 3. Dies ist eine einfach Rechnung (ähnlich zum ersten Teil). □

Proposition 2.3.17 (Quotientenmodul). *Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul, sei $U \subset V$ ein Untermodul.*

1. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \cdot\colon R \times V/U &\longrightarrow V/U \\ (a, v+U) &\longmapsto (a \cdot v) + U, \\ +\colon V/U \times V/U &\longrightarrow V/U \\ (v+U, w+U) &\longmapsto (v+w)+U \end{aligned}$$

sind wohldefiniert.

2. *Die Menge V/U bildet bezüglich der obigen Skalarmultiplikation, der obigen Addition und $0+U$ einen R-Modul.*

Man bezeichnet V/U mit dieser Struktur als Quotientenmodul von V nach U *oder auch als V* modulo U*.*

Beweis. Auch in diesem Fall lässt sich der Beweis von Vektorräumen (Proposition I.3.5.16) ohne Schwierigkeiten auf Moduln übertragen (nachrechnen). □

Beispiel 2.3.18. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist $n \cdot \mathbb{Z}$ ein Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$. Der Quotientenmodul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ stimmt mit dem $\mathbb{Z}$-Modul überein, den man aus der kanonischen $\mathbb{Z}$-Modulstruktur auf der additiven Gruppe von $\mathbb{Z}/n$ erhält. D.h. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ enthält genau n Elemente und die Addition bzw. Skalarmultiplikation erfolgt „modulo n“, d.h. es werden nur die Reste bezüglich Division durch n betrachtet.

Genauer: Es ist

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 + n \cdot \mathbb{Z}, 1 + n \cdot \mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n \cdot \mathbb{Z}\} = \{[0], \dots, [n-1]\}.$$

Sind $k, m \in \{0, \dots, n-1\}$ und $a \in \mathbb{Z}$, so gilt (im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$[k] + [m] = [k+m] = [r] \quad \text{und} \quad a \cdot [k] = [a \cdot k] = [s],$$

wobei r und s die Reste von $k+m$ bzw. $a \cdot k$ bei Division durch n sind.

Der Modul $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ kann verwendet werden, um die Arithmetik von Wochentagen zu simulieren, der Modul $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ kann verwendet werden, um die Arithmetik von Stunden oder Halbtönen (in der gleichstufigen Stimmung) zu modellieren (Abbildung 2.1).

Das Objekt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tritt an verschiedenen Stellen in der Algebra mit leicht unterschiedlichem Fokus auf: so wie hier als $\mathbb{Z}$-Modul oder als Baustein der Gruppentheorie (als abelsche Gruppe bezüglich Addition) oder als Ring (als Quotientenring des Ideals $n \cdot \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$).

Caveat 2.3.19. Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul und seien $U, W \subset V$ Untermoduln mit $U \cong_R W$. Dann folgt im allgemeinen *nicht*, dass die Quotientenmoduln V/U und V/W isomorph sind!

Zum Beispiel sind die Untermoduln $\mathbb{Z}$ und $2 \cdot \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln isomorph, aber $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ hat nur ein Element, wohingegen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ aus genau zwei Elementen besteht.

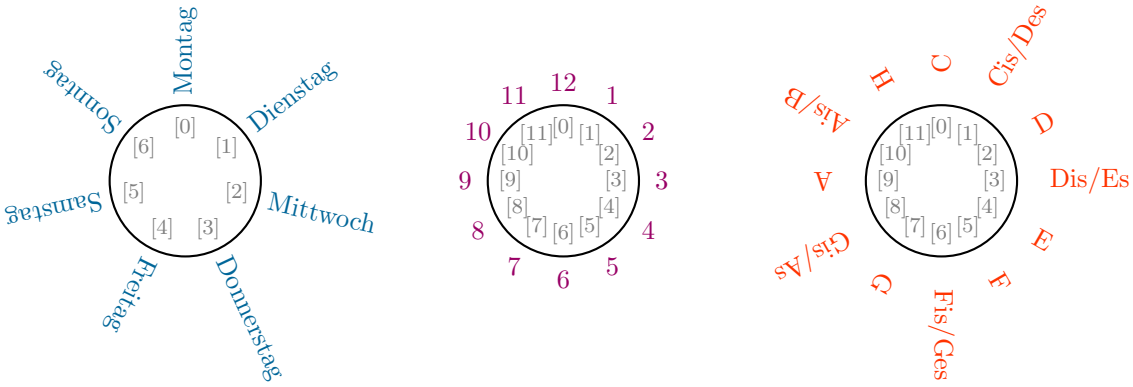


Abbildung 2.1.: Moduln im Alltag

Statt mit der Konstruktion von Quotientenmoduln bietet es sich oft an, deklarativer mit Quotientenmoduln zu arbeiten, d.h. mit der universellen Eigenschaft bzw. mit dem Homomorphiesatz.

Satz 2.3.20 (universelle Eigenschaft von Quotienten)**.** *Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul und sei $U \subset V$ ein R-Untermodul. Dann besitzt der Quotientenmodul V/U zusammen mit der kanonischen Projektion*

$$\begin{aligned} \pi_U \colon V &\longrightarrow V/U \\ v &\longmapsto v + U \end{aligned}$$

die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden R-Modul W und jeden Modulhomomorphismus $f \colon V \longrightarrow W$ mit $U \subset \ker f$ gibt es genau einen Modulhomomorphismus $\overline{f} \colon V/U \longrightarrow W$ mit

$$\overline{f} \circ \pi_U = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle \pi_U}\downarrow & \nearrow_{\exists!\ \overline{f}} & \\ V/U & & \end{array}$$

Beweis. Sei $f \colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus mit $U \subset \ker f$.

- *Existenz von $\overline{f}$:* Die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{f} \colon V/U &\longrightarrow W \\ v + U &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, denn: Seien $v, v' \in V$ mit $v + U = v' + U$. Dann ist $v - v' \in U$, und damit

$$\begin{aligned} f(v) - f(v') &= f(v - v') && (\text{?} \qquad) \\ &= 0. && (\text{?} \qquad) \end{aligned}$$

Also ist $f(v) = f(v')$. Außerdem ist $\overline{f}$ auch R-linear (nachrechnen). Nach Konstruktion gilt $\overline{f} \circ \pi_U = f$.

- *Eindeutigkeit von $\overline{f}$:* Die Eindeutigkeit folgt, da π_U surjektiv ist. □

Bemerkung 2.3.21 (universelle Eigenschaft von Quotienten, via Hom)**.** Die universelle Eigenschaft von Quotientenmoduln lässt sich kurz und knapp auch wie folgt zusammenfassen: Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul, sei $U \subset V$ ein R-Untermodul und sei $\pi_U \colon V \longrightarrow V/U$ die kanonische Projektion. Dann gilt: Für jeden R-Modul W ist die R-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(\pi_U, W) \colon \mathrm{Hom}_R(V/U, W) &\longrightarrow \left\{ f \in \mathrm{Hom}_R(V, W) \;\middle|\; f|_U = 0 \right\} \\ g &\longmapsto g \circ \pi_U \end{aligned}$$

zwischen den entsprechenden Homomorphismenräumen bijektiv (und somit ein Isomorphismus von R-Moduln).

Die Quotientenkonstruktion ist durch diese universelle Eigenschaft bereits eindeutig charakterisiert:

Proposition 2.3.22 (universelle Eigenschaft von Quotienten, Eindeutigkeit)**.** *Sei R ein Ring, sei V ein R-Modul, sei $U \subset V$ ein R-Untermodul und sei $\pi_U \colon V \longrightarrow V/U$ die kanonische Projektion.*

Sei Q ein R-Modul und $\pi \colon V \longrightarrow Q$ ein R-Modulhomomorphismus, die auch die universelle Eigenschaft des Quotienten V modulo U erfüllen, d.h.:

(∗) *Es gilt $U \subset \ker \pi$ und für jeden R-Modul W und jeden Modulhomomorphismus $f \colon V \longrightarrow W$ mit $U \subset \ker f$ gibt es genau einen Modulhomomorphismus $\overline{f} \colon Q \longrightarrow W$ mit*

$$\overline{f} \circ \pi = f.$$

Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\varphi \colon V/U \longrightarrow Q$ von R-Moduln mit $\varphi \circ \pi_U = \pi$.

Beweis. Es handelt sich hierbei um ein Standardargument, das für alle universellen Eigenschaften anwendbar ist.

1. Wir verwenden die Existenzaussage aus der universellen Eigenschaft, um geeignete Morphismen in beide Richtungen zu konstruieren.

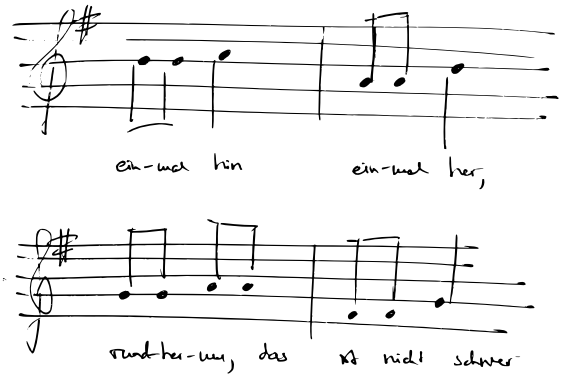



Abbildung 2.2.: Eindeutige Charakterisierung von Objekten mithilfe einer universellen Eigenschaft

2. Wir verwenden die Eindeutigkeitsaussage aus der universellen Eigenschaft, um zu zeigen, dass diese Morphismen invers zueinander sind.

Besonders leicht lässt sich dieses Vorgehen mit dem Kinderlied „Brüderchen, komm tanz mit mir“ merken (Abbildung 2.2).

1. *Einmal hin . . . :* Wegen $U \subset \ker \pi$ gibt es nach der universellen Eigenschaft des Quotienten V/U (Satz 2.3.20; angewendet auf $\pi\colon V \longrightarrow Q$) genau einen Modulhomomorphismus $\varphi\colon V/U \longrightarrow Q$ mit $\varphi \circ \pi_U = \pi$.

2. *. . . einmal her . . . :* Wegen $U \subset \ker \pi_U$ gibt es nach $(*)$, angewendet auf $\pi_U\colon V \longrightarrow V/U$ einen Modulhomomorphismus $\psi\colon Q \longrightarrow V/U$ mit $\psi \circ \pi = \pi_U$.

3. *. . . rundherum, das ist nicht schwer:* Nach Konstruktion ist

$$(\varphi \circ \psi) \circ \pi = \varphi \circ (\psi \circ \pi) = \varphi \circ \pi_U = \pi = \mathrm{id}_Q \circ \pi$$
$$(\psi \circ \varphi) \circ \pi_U = \psi \circ (\varphi \circ \pi_U) = \psi \circ \pi = \pi_U = \mathrm{id}_{V/U} \circ \pi_U .$$

Mit der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft des Quotienten V/U bzw. aus $(*)$ erhalten wir somit

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Q \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{V/U} . \qquad \square$$

Satz 2.3.23 (Homomorphiesatz für Moduln). *Sei R ein Ring und sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann ist $\operatorname{im} f := \{f(v) \mid v \in V\}$ ein R-Untermodul von W und*

$$V/\ker f \longrightarrow \operatorname{im} f$$
$$v + \ker f \longmapsto f(v)$$

ist ein (wohldefinierter!) Isomorphismus von R-Moduln.

Beweis. Dies können wir wie im Vektorraumfall beweisen (Satz I.4.4.12). □

Korollar 2.3.24 (zyklische Moduln)**.** *Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der R-Modul V ist* zyklisch*, d.h. von einem Element erzeugt.*
2. *Es gibt ein Ideal $A \subset R$ mit $V \cong_R R/A$.*

Beweis. Sei V zyklisch, d.h. es gibt ein $v \in V$ mit $V = \operatorname{Span}_R\{v\} = R \cdot v$. Also ist

$$f\colon R \longrightarrow V$$
$$a \longmapsto a \cdot v$$

ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Mit dem Homomorphiesatz für Moduln (Satz 2.3.23) folgt, dass das Ideal $A :=$? die Eigenschaft

$$R/A = R/\ker f \cong_R \operatorname{im} f = V$$

besitzt.

Es gebe umgekehrt ein Ideal $A \subset R$ mit $V \cong_R R/A$; sei $f\colon R/A \longrightarrow V$ ein R-Modulisomorphismus. Wegen $R/A = \operatorname{Span}_R\{1 + A\}$ ist R/A von einem Element erzeugt. Da f surjektiv und R-linear ist, ist dann auch das Bild $V = \operatorname{im} f = \operatorname{Span}_R\{f(1 + A)\}$ von einem Element erzeugt (und damit zyklisch). □

Der Begriff des zyklischen Moduls ist an das Beispiel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (Beispiel 2.3.18, Abbildung 2.1) angelehnt.

2.3.5 Direkte Summen

Wie Vektorräume lassen sich auch Moduln durch direkte Summen kombinieren. Statt nur die direkte Summe von zwei Moduln einzuführen, werden wir uns gleich mit allgemeinen direkten Summen befassen. Neben der Konstruktion gehen wir dabei auch auf die universelle Eigenschaft von direkten Summen ein.

Definition 2.3.25 (Produkt/direkte Summe)**.** Sei R ein Ring, sei I eine Menge und sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln.

- Die Menge

$$\prod_{i\in I} V_i := \Big\{ f \in \mathrm{Abb}\Big(I, \bigcup_{i\in I} V_i\Big) \;\Big|\; \forall_{i\in I} \quad f(i) \in V_i \Big\}$$

ist bezüglich komponentenweiser Addition bzw. Skalarmultiplikation ein R-Modul, das *Produkt der* $(V_i)_{i\in I}$. Die Elemente von $\prod_{i\in I} V_i$ notieren wir oft statt als Abbildungen auch als Familien $(x_i)_{i\in I}$ (wobei dann $x_i \in V_i$ für jedes $i \in I$ gilt).

Ist $j \in I$, so schreiben wir

$$\begin{aligned} \pi_j \colon \prod_{i\in I} V_i &\longrightarrow V_j \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

für die *Projektion auf den j-ten Faktor* und

$$\begin{aligned} i_j \colon V_j &\longmapsto \prod_{i\in I} V_i \\ x &\longmapsto \left(i \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \right) \end{aligned}$$

für die *Inklusion des j-ten Faktors*.

- Die Menge

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \Big\{ f \in \prod_{i\in I} V_i \;\Big|\; \text{es gibt eine endliche Menge } J \subset I \text{ mit } f|_{I\setminus J} = 0 \Big\}$$

ist ein R-Untermodul von $\prod_{i\in I} V_i$, die *direkte Summe der* $(V_i)_{i\in I}$.

Ist $j \in I$, so schreiben wir auch $i_j \colon V_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$ für die *Inklusion des j-ten Summanden*.

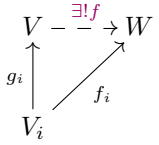
Beispiel 2.3.26 (triviale direkte Summe/triviales direktes Produkt)**.** Sei R ein Ring. Das leere direkte Produkt und die leere direkte Summe sind kanonisch isomorph zum trivialen R-Modul $\{0\}$ (nachrechnen; wieviele Abbildungen gibt es aus der leeren Menge in eine andere Menge?).

Ist die Indexmenge I eine zweielementige Menge, so erhalten wir im Vektorraumfall genau die Definition der direkten Summe zweier Vektorräume. Wir werden auch im Modulfall $V \oplus W$ für die direkte Summe zweier Moduln U und W (über demselben Grundring) schreiben.

Direkte Summen werden durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert, die es ermöglicht, Homomorphismen *aus* direkten Summen *heraus* zu konstruieren, indem man den Homomorphismus auf jedem Summanden vorgibt:

Satz 2.3.27 (universelle Eigenschaft der direkten Summe)**.** *Sei R ein Ring und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Wir sagen, dass ein Modul V zusammen mit Modulhomomorphismen $(g_i\colon V_i \to V)_{i\in I}$ die* universelle Eigenschaft der direkten Summe *$\bigoplus_{i\in I} V_i$ besitzt, wenn folgendes gilt: Für jeden R-Modul W und jede Familie $(f_i\colon V_i \to W)_{i\in I}$ von Modulhomomorphismen gibt es genau einen Modulhomomorphismus $f\colon V \longrightarrow W$ mit*

$$\forall_{i\in I} \quad f \circ g_i = f_i.$$



Dann gilt:

1. *Die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$ erfüllt zusammen mit den kanonischen Inklusionen $(i_j)_{j\in I}$ der Summanden die universelle Eigenschaft der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$.*
2. *Erfüllt ein R-Modul V zusammen mit Modulhomomorphismen $(g_i)_{i\in I}$ die universelle Eigenschaft der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$, so gibt es genau einen R-Modulisomorphismus $f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow V$ mit*

$$\forall_{j\in I} \quad f \circ i_j = g_j.$$

Beweis. Zu 1. Sei $(f_i\colon V_i \longrightarrow W)_{i\in V}$ eine Familie von R-Modulhomomorphismen.

- *Existenz von f:* Es ist

$$\begin{aligned} f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i &\longmapsto W \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} f_i(x_i) \end{aligned}$$

  ein wohldefinierter (man beachte, dass jede der Summen auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden ungleich Null besitzt!) R-Modulhomomorphismus. Nach Konstruktion gilt dabei für alle $j \in I$ und alle $x \in V_j$, dass

$$f \circ i_j(x) = f_j(x_i);$$

  also ist $f \circ i_j = f_j$.

- *Eindeutigkeit von f:* Da $\bigoplus_{i\in I} V_i$ nach Konstruktion von $\bigcup_{j\in I} \operatorname{im} i_j$ erzeugt wird, folgt die Eindeutigkeit.

Zu 2. Wir folgen dem allgemeinen Argument für die Eindeutigkeit (Beweis von Satz 2.3.20; Abbildung 2.2):

- *Einmal hin ...:* Da $\bigoplus_{i\in I} V_i$ (mit $(i_j)_{j\in I}$) die universelle Eigenschaft der direkten Summe erfüllt, gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus $f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow V$ mit

$$\forall_{j\in I} \quad f \circ i_j = g_j.$$

- *... einmal her ...:* Da V (mit $(g_i)_{i\in I}$) die universellen Eigenschaft der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} V$ erfüllt, gibt es einen R-Modulhomomorphismus $g\colon V \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$ mit

$$\forall_{j\in I} \quad g \circ g_j = i_j.$$

- *... rundherum, das ist nicht schwer:* Nach Konstruktion gilt für alle $j \in I$, dass

$$(f \circ g) \circ g_j = g_j = \mathrm{id}_V \circ g_j \quad \text{und} \quad (g \circ f) \circ i_j = i_j = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I} V_i} \circ i_j.$$

  Wenden wir die Eindeutigkeitsaussage aus der universellen Eigenschaft auf $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ an, so erhalten wir daraus

$$f \circ g = \mathrm{id}_V \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I} V_i}. \qquad \square$$

Bemerkung 2.3.28 (universelle Eigenschaft von direkten Summen, via Hom)**.** Die universelle Eigenschaft von direkten Summen lässt sich kurz und knapp auch wie folgt zusammenfassen: Sei R ein Ring, sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln und seien $(i_j)_{j\in I}$ die zugehörigen kanonischen Inklusionen. Dann gilt: Für jeden R-Modul W ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(V_i, W) \\ f &\longmapsto (f \circ i_j)_{j\in I} \end{aligned}$$

zwischen den entsprechenden Homomorphismenräumen bijektiv.

Ausblick 2.3.29 (Koprodukt)**.** Die universelle Eigenschaft der direkten Summe lässt sich nicht nur für Moduln, sondern auch in anderen Kategorien formulieren. Dies führt zum Begriff des Koprodukts.

Caveat 2.3.30 (Produkte vs. Summen)**.** Sei R ein Ring und sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Ist die Menge I unendlich, so unterscheidet sich die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$ vom Produkt $\prod_{i\in I} V_i$ im allgemeinen bereits in der Mächtigkeit, aber auch in der universellen Eigenschaft: Die universelle Eigenschaft des Produktes beschreibt Homomorphismen *in* das Produkt *hinein*. Homomorphismen aus Produkten heraus können nur in speziellen Situationen konstruiert werden.

Mithilfe der direkten Summen können wir einen Unzerlegbarkeitsbegriff für Moduln einführen:

Definition 2.3.31 (zerlegbarer/unzerlegbarer Modul)**.** Sei R ein Ring und V ein R-Modul.

- Der R-Modul V ist *zerlegbar*, wenn es R-Moduln U, W mit $U \ncong_R \{0\}$, $W \ncong_R \{0\}$ und
$$V \cong_R U \oplus W$$
gibt.
- Der R-Modul V ist *unzerlegbar*, wenn er nicht zerlegbar ist.

Beispiel 2.3.32. Vektorräume sind also genau dann unzerlegbar, wenn ihre Dimension ? ist.

Der Modulfall ist unübersichtlicher:

Caveat 2.3.33 (komplementäre Untermoduln)**.** Untermoduln besitzen im allgemeinen *keine* Komplemente bezüglich der direkten Summe: Ist R ein Ring, V ein R-Modul und $U \subset V$ ein Untermodul, so gibt es im allgemeinen *keinen* Untermodul $W \subset V$, so dass die Inklusionen einen Isomorphismus $U \oplus W \cong_R V$ induzieren.
Zum Beispiel besitzt der Untermodul $2 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ *kein* Komplement im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$.

Die universelle Eigenschaft der direkten Summe erinnert an die universelle Eigenschaft von Basen in Vektorräumen (Satz I.4.3.1).

Definition 2.3.34 (Basis eines Moduls, freier Modul)**.** Sei R ein Ring und V ein R-Modul.

- Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist *linear unabhängig (über R)*, wenn folgendes gilt: Für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ und alle Familien $(a_j)_{j\in J}$ in R mit $\sum_{j\in J} a_j \cdot v_j = 0$ folgt
$$\forall_{j\in J} \quad a_j = 0.$$
- Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist eine *R-Basis von V*, wenn sie über R linear unabhängig ist und (die unterliegende Menge) V als R-Modul erzeugt.
- Der R-Modul V ist *frei*, wenn er eine Basis besitzt.

Beispiel 2.3.35.

- Jeder Vektorraum ist ein freier Modul über seinem Grundkörper, da jeder Vektorraum eine Basis besitzt (Satz I.3.4.24).
- Ist R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$, so ist der R-Modul R^n frei (die Ringversion der Standardbasis ist eine R-Basis von R^n; nachrechnen).

- Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist *nicht* frei: Jeder nicht-triviale freie $\mathbb{Z}$-Modul muss mindestens $\#\mathbb{Z}$ Elemente enthalten. Aber $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besteht nur aus genau zwei Elementen.

Proposition 2.3.36 (freie Moduln als direkte Summen)**.** *Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul V ist frei.*
2. *Es gibt eine Menge I mit $V \cong_R \bigoplus_I R$.*

Beweis. Jede Basis von V kann für eine direkte Summenzerlegung verwendet werden; umgekehrt liefern die „Standardeinheitsvektoren“ in Moduln der Form $\bigoplus_I R$ eine Basis (Übungsaufgabe). □

Die Klassifikation der Vektorräume beruht auf dem Dimensionsbegriff. Für Moduln ist die Lage im allgemeinen deutlich komplizierter:

Caveat 2.3.37 (Dimension von Moduln)**.** Im allgemeinen gibt es *keine* vernünftige Dimensionstheorie für Moduln:

- Nicht jeder Modul ist frei! Zum Beispiel ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kein freier $\mathbb{Z}$-Modul.
- Es gibt über bestimmten Ringen freie Moduln, die Basen verschiedener Länge besitzen.

Anmerkung zum Lernen. Vergleichen Sie das, was Sie über Vektorräume wissen, mit der bereits entwickelten Modultheorie. Fällt es Ihnen jetzt leichter, die Konzepte, Konstruktionen und Beispiele aus der Linearen Algebra I zu verstehen?

2.4 Hauptidealringe

Allgemeine Ringe sind zu wild für eine sinnvolle vollständige Klassifikation ihrer Moduln. Da eine Klassifikation der Moduln auch ein gewisses Verständnis der Ideale des Grundrings mit einschließt, ist es naheliegend, sich auf Ringe einzuschränken, deren Ideale nicht zu kompliziert sind. Nach den Körpern die einfachste solche Klasse ist die Klasse der sogenannten Hauptidealringe.

2.4.1 Hauptidealringe

Definition 2.4.1 (erzeugtes Ideal, Hauptideal, Hauptidealring)**.** Sei R ein Ring.

- Die Ideale in R, die von einem einzelnen Element erzeugt werden, bezeichnet man als *Hauptideale*.

- Ein *Hauptidealring* ist ein Integritätsring, in dem alle Ideale Hauptideale sind.

Bemerkung 2.4.2 (einfache Beschreibung von (Haupt)Idealen)**.** Sei R ein Ring. Ist $S \subset R$ eine Teilmenge, so schreibt man auch kurz $(S) := \mathrm{Span}_R S$ für das *von S erzeugte Ideal in R*.

Ist $a \in R$, so ist das von a erzeugte Hauptideal in R nichts anderes als

$$(a) = \mathrm{Span}_R\{a\} = R \cdot a = \{s \cdot a \mid s \in R\},$$

d.h. die Menge aller (Links-)Vielfachen von a.

Beispiel 2.4.3 (Hauptidealringe)**.**

- Körper sind Hauptidealringe, denn: Ist K ein Körper, so sind $\{0\} = (\ ?\ )$ und $K = (\ ?\ )$ die einzigen Ideale in K.
- Wir werden sehen, dass $\mathbb{Z}$ und Polynomringe über Körpern Hauptidealringe sind (Kapitel 2.4.2).
- Der Polynomring $\mathbb{Z}[T]$ der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten ist *kein* Hauptidealring; zum Beispiel ist das Ideal $(2, T)$, das von 2 und T erzeugt wird, *kein* Hauptideal (nachrechnen).

2.4.2 Euklidische Ringe

Wie können wir beweisen, dass $\mathbb{Z}$ und Polynomringe über Körpern Hauptidealringe sind? Die grundlegende Idee ist, Division mit Rest zu nutzen. Wir können dies folgendermaßen formalisieren:

Definition 2.4.4 (euklidischer Ring)**.**

- Sei R ein Integritätsring. Eine *euklidische Gradfunktion* auf R ist eine Abbildung $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ mit: Für alle $a \in R$ und alle $b \in R \setminus \{0\}$ gibt es $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r \quad \text{und} \quad \big[\delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0\big].$$

- Ein *euklidischer Ring* ist ein Integritätsring, der eine euklidische Gradfunktion besitzt.

Da euklidische Ringe eine Verallgemeinerung großer Teile der elementaren Zahlentheorie (in $\mathbb{Z}$) erlauben, die auch von Euklid untersucht wurde, tragen auch diese allgemeinen Strukturen den Namen Euklids.

Beispiel 2.4.5 (die ganzen Zahlen als euklidischer Ring)**.** Die Abbildung (wobei $|\cdot|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ bezeichnet)

$$\begin{aligned}\delta\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N}\\ x &\longmapsto |x|\end{aligned}$$

ist eine euklidische Gradfunktion auf $\mathbb{Z}$, denn: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$. Wir betrachten nur den Fall $a, b > 0$ (die anderen Fälle gehen analog). Sei

$$s := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot b \leq a\}.$$

Warum ist dieses Maximum wohldefiniert? Wegen $b \neq 0$ ist die obige Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot b < a\}$ endlich; außerdem ist diese Menge nicht-leer, da sie 0 enthält. Das Maximum existiert somit.

Nach Konstruktion hat

$$r := a - s \cdot b$$

die Eigenschaft $r \in \{0, \ldots, b-1\}$ und daher ist die Darstellung $a = s \cdot b + r$ von der gewünschten Form.

Insbesondere zeigt dies auch rigoros, dass $\mathbb{Z}/n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt (Beispiel 2.3.18).

Proposition 2.4.6 (Polynomringe als euklidische Ringe)**.** *Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[T]$ ein euklidischer Ring bezüglich der modifizierten Gradabbildung* $\max(\deg, 0)\colon K[T] \longrightarrow \mathbb{N}$.

Beweis. Wir schreiben $\delta := \max(\deg, 0)\colon K[T] \longrightarrow \mathbb{N}$. Der Beweis, dass δ eine euklidische Gradfunktion ist, verwendet die *Polynomdivision*, die wie folgt algorithmisch durchgeführt werden kann:

Gegeben seien $a, b \in K[T]$ mit $b \neq 0$. Wir zeigen per Induktion über $\delta(a)$, dass es $r, s \in K[T]$ mit $a = s \cdot b + r$ und $\delta(r) < \delta(b)$ (oder sogar $r = 0$) gibt.

- *Induktionsanfang.* Sei $\delta(a) = 0$.
  - ① Ist $\delta(b) = 0$, so ist $b \in K \setminus \{0\}$. Daher ist $a =$? eine Darstellung der gewünschten Form.
  - ② Ist $\delta(b) > 0 = \delta(a)$, so ist $a =$? eine Darstellung der gewünschten Form.
- *Induktionsvoraussetzung.* Sei $\delta(a) > 0$ und für alle $a' \in K[T]$ mit $\delta(a') < \delta(a)$ gebe es $r', s' \in K[T]$ mit $a' = s' \cdot b + r'$ und $\delta(r') < \delta(b)$ (oder sogar $r' = 0$).
- *Induktionsschritt.* Ohne Einschränkung sei $\delta(b) \leq \delta(a)$ (sonst ist $a = 0 \cdot b + a$ eine Darstellung der gewünschten Form). Wir schreiben

  $$b = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot T^j \quad \text{und} \quad a = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot T^j$$

  mit $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in K$ und $a_m \neq 0 \neq b_n$. Wegen $b_n \neq 0$ und $m \leq n$ können wir das Polynom (Elimination der höchsten T-Potenz

aus a)

$$a' := a - \frac{a_m}{b_n} \cdot T^{m-n} \cdot b \in K[T]$$

definieren; nach Konstruktion ist $\delta(a') < m = \delta(a)$ und

$$a = a' + \frac{a_m}{b_n} \cdot T^{m-n} \cdot b.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $r', s' \in K[T]$ mit $a' = s' \cdot b + r'$ und $\delta(r') < \delta(b)$ (oder sogar $r' = 0$). Damit ist

$$a = \left(s' + \frac{a_m}{b_n} \cdot T^{m-n}\right) \cdot b + r'$$

eine Darstellung der gewünschten Form. □

Beispiel 2.4.7 (Polynomdivision)**.** Dividieren wir $T^3 - 1$ in $\mathbb{Q}[T]$ mit Rest durch $T + 2$, so erhalten wir $T^2 - 2 \cdot T + 4$ mit Rest -9, denn

$$T^3 - 1 = (T+2) \cdot (T^2 - 2 \cdot T + 4) - 9 \quad \text{und} \quad \deg(-9) = 0 < 1 = \deg(T+2).$$

Von Hand können wir dies wie folgt über Polynomdivision bestimmen:

$$\begin{array}{rl}
 & T^3 + 0 \cdot T^2 + 0 \cdot T - 1 = (T+2) \cdot (1 \cdot T^2 - 2 \cdot T + 4) - 9 \\
- & (T^3 + 2 \cdot T^2) \\
\hline
 & -2 \cdot T^2 + 0 \cdot T - 1 \\
- & (-2 \cdot T^2 - 4 \cdot T) \\
\hline
 & +4 \cdot T - 1 \\
- & (+4 \cdot T + 8) \\
\hline
 & -9
\end{array}$$

Proposition 2.4.8 (euklidische Ringe sind Hauptidealringe)**.** *Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.*

Beweis. Sei R ein euklidischer Ring mit eukildischer Gradfunktion $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$. Da R nach Definition ein Integritätsring ist, genügt es zu zeigen, dass jedes Ideal in R ein Hauptideal ist.

Sei $A \subset R$ ein Ideal. Ohne Einschränkung sei $A \neq \{0\}$. Wir betrachten ein Element $b \in A$ mit der Minimalitätseigenschaft

$$\delta(b) = \min\{\delta(a) \mid a \in A \setminus \{0\}\} \in \mathbb{N};$$

ein solches Element existiert, da $A \setminus \{0\}$ nicht-leer ist und $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist. Dann gilt

$$A = \mathrm{Span}_R\{b\},$$

denn:

- Da $b \in A$ und A ein Ideal ist, ist $\mathrm{Span}_R\{b\} \subset A$.
- Sei umgekehrt $a \in A$. Da δ eine euklidische Gradfunktion ist, gibt es $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r \quad \text{und} \quad \big[\delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0\big].$$

  Wegen $r = a - s \cdot b$ und $a, b \in A$ folgt auch $r \in A$. Aufgrund der Minimalität von b bezüglich δ erhalten wir daraus $r = 0$.

Also ist $a = s \cdot b \in \mathrm{Span}_R\{b\}$. □

Korollar 2.4.9.

1. *Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Hauptidealring.*
2. *Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ ein Hauptidealring.*

Beweis. Sowohl $\mathbb{Z}$ als auch $K[T]$ sind euklidische Ringe (Beispiel 2.4.5, Proposition 2.4.6). Also sind diese Ringe insbesondere auch Hauptidealringe (Proposition 2.4.8). □

Caveat 2.4.10. *Nicht* jeder Hauptidealring ist ein euklidischer Ring!

2.4.3 Teilbarkeit und Primfaktoren

Um Ideale und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Idealen in Hauptidealringen bzw. deren Quotientenmoduln besser zu verstehen, ist es hilfreich, sich mit der Teilbarkeit von Elementen auseinanderzusetzen.

Definition 2.4.11 (Einheit, assoziiert, teilt, irreduzibel, prim)**.** Sei R ein Integritätsring.

- Ein Element $a \in R$ ist eine *Einheit*, wenn es $b \in R$ mit $a \cdot b = 1$ (und $b \cdot a = 1$) gibt. Wir schreiben $R^\times$ für die Gruppe (bezüglich Multiplikation!) der Einheiten von R.
- Elemente $a, b \in R$ heißen *assoziiert*, wenn es eine Einheit $s \in R^\times$ mit $a = s \cdot b$ gibt.
- Ein Element $b \in R$ *teilt* ein Element a, wenn es ein $s \in R$ mit $a = s \cdot b$ gibt. In diesem Fall schreibt man auch kurz $b \mid a$ („b teilt a“).
- Ein Element $a \in R \setminus \{0\}$ ist *irreduzibel*, wenn a keine Einheit ist und folgendes gilt: Für alle $x, y \in R$ mit $a = x \cdot y$ ist $x \in R^\times$ oder $y \in R^\times$.
- Ein Element $p \in R \setminus \{0\}$ ist *prim*, wenn p keine Einheit ist und folgendes gilt:

$$\forall_{x,y \in R} \quad p \mid x \cdot y \Longrightarrow (p \mid x \vee p \mid y).$$

Caveat 2.4.12 (Primzahlen aus der Schule)**.** Die Definition von Primzahlen aus der Schule entspricht der obigen Definition von irreduziblen Elementen; wir werden sehen, dass dies im Fall der ganzen Zahlen zur obigen Definition von Primelementen äquivalent ist (Proposition 2.4.18). In allgemeinen Ringen ist dies jedoch nicht zutreffend. Der Grund für die obige Definition von Primelementen ist, dass sie die Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen liefert (Bemerkung 2.4.21).

Beispiel 2.4.13.

- Ist K ein Körper, so gilt $K = \{0\} \cup K^\times$. Also enthalten Körper *keine* Primelemente.
- Die Zahl $2025 \in \mathbb{Z}$ ist *nicht* irreduzibel, aber 2027 und 2029 sind irreduzibel (nachrechnen).
- Die Zahl $10 \in \mathbb{Z}$ ist *nicht* prim, denn $10 \mid 2 \cdot 5$, aber 10 teilt weder 2 noch 5.
- Das Polynom $T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$ ist irreduzibel (jeder nicht-triviale Teiler müsste aus Gradgründen linear sein, was aber zu reellen Nullstellen führen würde).

  In $\mathbb{C}[T]$ gilt
  $$T^2 + 1 = (T + i) \cdot (T - i)$$
  und $T + i, T - i \notin \mathbb{C}[T]^\times$; das Polynom $T^2 + 1$ ist also in $\mathbb{C}[T]$ *nicht* irreduzibel.
- Ist K ein Körper und $\lambda \in K$, so ist $T - \lambda$ in $K[T]$ irreduzibel (aus Gradgründen).

Proposition 2.4.14 (Nullstellen vs. Linearfaktoren)**.** *Sei K ein Körper, sei $f \in K[T]$ und sei $\lambda \in K$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist λ eine Nullstelle von f, d.h. $f(\lambda) = 0$.*
2. *Es gilt $(T - \lambda) \mid f$ in $K[T]$.*

Beweis. Sei λ eine Nullstelle von f. Dann ist $T - \lambda$ ein Teiler von f, denn: Mithilfe von Polynomdivision erhalten wir $r, s \in K[T]$ mit

$$f = s \cdot (T - \lambda) + r \quad \text{und} \quad \deg r < 1.$$

Also ist r ein konstantes Polynom. Wegen

$$0 = f(\lambda) = s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda) + r(\lambda) = r(\lambda)$$

ist somit $r = 0$. Also ist $T - \lambda$ ein Teiler von f.

Ist umgekehrt $T - \lambda$ ein Teiler von f, so gibt es ein $s \in K[T]$ mit $f = s \cdot (T - \lambda)$. Insbesondere ist

$$f(\lambda) = \boxed{?}$$

□

Bemerkung 2.4.15 (Bestimmung von Nullstellen)**.** Sei K ein Körper und sei $f \in K[T]$. Ist $f = g \cdot h$ mit $g, h \in K[T]$, so erhalten wir aufgrund der Nullteilerfreiheit von K für die Nullstellenmenge von f:

$$\{x \in K \mid f(x) = 0\} = \{x \in K \mid g(x) = 0\} \cup \{x \in K \mid h(x) = 0\}.$$

Insbesondere: Falls man bereits eine Nullstelle $\lambda \in K$ von f kennt, kann man per Polynomdivision ein Polynom $g \in K[T]$ mit

$$f = (T - \lambda) \cdot g$$

bestimmen. Für die Bestimmung der Nullstellen von f sind somit nur noch die Nullstellen des Polynoms g (von niedrigerem Grad!) zu bestimmen.

In der Praxis liefert dies oft einen Weg, induktiv Nullstellen von konkreten „einfachen“ Polynomen zu bestimmen. Im allgemeinen lassen sich die Nullstellen von f jedoch *nicht* algorithmisch exakt bestimmen, selbst wenn der Körper K gut algorithmisch behandelbar ist (dies betrifft etwa auch den Körper $\mathbb{Q}$).

Bemerkung 2.4.16 (Teilbarkeit und Ideale)**.** Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. Teilbarkeit und Assoziiertheit lassen sich dann wie folgt durch die zugehörigen Hauptideale (a) und (b) ausdrücken (nachrechnen):

1. Es gilt genau dann $b \mid a$, wenn $(a) \subset (b)$ ist.
2. Es gilt genau dann $(a) = (b)$, wenn a und b assoziiert sind.

Beispiel 2.4.17. Wir betrachten die Elemente $1, 2, 3, 6$ in $\mathbb{Z}$. Dann bestehen zwischen diesen Elementen genau die folgenden Teilbarkeitsrelationen:

?

Dies liefert entsprechende Inklusionsbeziehungen zwischen den zugehörigen Hauptidealen und kanonischen Projektionen zwischen den zugehörigen zyklischen Moduln (Abbildung 2.3) .

Die Definition von Primelementen ist in der Praxis nicht leicht nachzuprüfen. In Hauptidealringen ist prim zu sein äquivalent dazu irreduzibel zu sein. In vielen Fällen kann man so zeigen, dass gegebene Elemente prim sind.

Proposition 2.4.18 (irreduzibel vs. prim)**.** *Sei R ein Integritätsring und sei $a \in R \setminus \{0\}$ keine Einheit.*

1. *Ist a prim, so ist a auch irreduzibel.*
2. *Ist R ein Hauptidealring und ist a irreduzibel, so ist a bereits prim.*

Beispiel 2.4.19.

- Die Zahl $2025 \in \mathbb{Z}$ ist nicht irreduzibel und somit *nicht* prim in $\mathbb{Z}$.

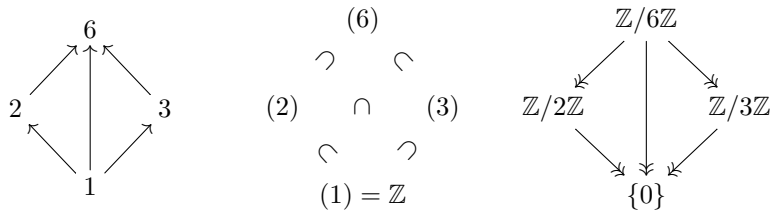


Abbildung 2.3.: Teilbarkeit, Idealinklusionen, kanonische Projektionen zwischen den zugehörigen zyklischen Moduln; links bedeuten dabei die Pfeile „ist ein Teiler von“.

- Die Zahlen 2027 und 2029 $\in \mathbb{Z}$ sind irreduzibel, und somit prim (da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist; Korollar 2.4.9).
- Das Polynom $T^2+1 \in \mathbb{R}[T]$ ist irreduzibel (aus Gradgründen müsste es sonst bereits eine reelle Nullstelle besitzen), und somit prim (da $\mathbb{R}[T]$ ein Hauptidealring ist; Korollar 2.4.9).

  Da das Polynom $T^2+1 \in \mathbb{C}[T]$ *nicht* irreduzibel ist, ist es insbesondere auch nicht prim.
- Ist K ein Körper und $\lambda \in K$, so ist das Polynom $T - \lambda \in K[T]$ aus Gradgründen irreduzibel, und somit prim (da $K[T]$ ein Hauptidealring ist; Korollar 2.4.9).

Literaturaufgabe (Primzahlen)**.** Die ersten (positiven) Primzahlen in $\mathbb{Z}$ lauten:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ \ldots$$

Bereits Euklid konnte rigoros nachweisen, dass es unendlich viele Primzahlen in $\mathbb{Z}$ gibt. Lesen Sie im Buch *Proofs from The Book* [1, Chapter 1] das Kapitel über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in $\mathbb{Z}$. Welcher Beweis gefällt Ihnen am besten?

Beweis (von Proposition 2.4.18). Zu 1. Sei a prim und seien $x, y \in R$ mit $a = x \cdot y$. Da a prim ist, folgt $a \mid x$ oder $a \mid y$. Ohne Einschränkung gelte $a \mid y$, d.h. es gibt ein $s \in R$ mit $y = s \cdot a$. Damit erhalten wir

$$a = x \cdot y = x \cdot s \cdot a.$$

Da R nullteilerfrei und $a \neq 0$ ist, folgt $x \cdot s = 1$ (nachrechnen!). Also ist x eine Einheit. Somit ist a irreduzibel.

Zu 2. Sei R ein Hauptidealring und sei a irreduzibel. Dann ist a bereits prim, denn: Seien $x, y \in R$ mit $a \mid x \cdot y$. Um die Voraussetzung, dass R ein Hauptidealring ist, nutzen zu können, liegt es nahe, ein geeignetes Ideal zu untersuchen. Wir betrachten das Ideal

$$A := (a, x) = \mathrm{Span}_R\{a, x\} \subset R.$$

Da R ein Hauptidealring ist, ist A ein Hauptideal; also gibt es ein $z \in R$ mit $A = (z) = R \cdot z$. Wegen $a \in A$ und $x \in A$ folgt

$$z \mid a \quad \text{und} \quad z \mid x.$$

Insbesondere gibt es ein $s \in R$ mit $a = s \cdot z$. Da a irreduzibel ist, ist s oder z eine Einheit. Wir betrachten diese beiden Fälle separat:

① Es sei s eine Einheit. Dann ist $z = s^{-1} \cdot a$. Wegen $z \mid x$ erhalten wir somit auch $a \mid x$.

② Es sei z eine Einheit. Dann ist

$$R = R \cdot z = (z) = A = \mathrm{Span}_R\{a, x\}.$$

Insbesondere gibt es also $r, t \in R$ mit

$$1 = r \cdot a + t \cdot x.$$

Multiplikation mit y liefert

$$y = 1 \cdot y = r \cdot a \cdot y + t \cdot x \cdot y.$$

Da a beide Summanden auf der rechten Seite teilt, ist a ein Teiler von y.

Insgesamt erhalten wir $a \mid x$ oder $a \mid y$. Es handelt sich bei a also um ein Primelement. □

In der elementaren Zahlentheorie (d.h. der Theorie der Arithmetik von $\mathbb{Z}$) sind die Primelemente die grundlegenden Bausteine: jede ganze Zahl außer 0, 1, -1 lässt sich (eindeutig) als Produkt von Primzahlen schreiben. Wir werden dies im folgenden ganz allgemein für jeden Hauptidealring beweisen.

Definition 2.4.20 (faktoriell)**.** Ein *faktorieller Ring* ist ein Integritätsring R, in dem sich jedes Element aus $R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$ als endliches Produkt von Primelementen schreiben lässt.

Bemerkung 2.4.21 (Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen)**.** Primfaktorzerlegungen sind (wenn sie existieren) im wesentlichen eindeutig (Übungsaufgabe): Sei R ein Integritätsring, seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m \in R$ Primelemente mit

$$\prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{j=1}^{m} q_j.$$

Dann folgt $n = m$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in R^\times$ mit

$$\forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \quad p_j = \varepsilon_j \cdot q_{\sigma(j)}.$$

Man kann diese Aussage per Induktion über n aus der definierenden Eigenschaft von Primelementen ableiten.

Satz 2.4.22 (Hauptidealringe sind faktoriell)**.** *Jeder Hauptidealring ist faktoriell. Jede nicht-triviale Nicht-Einheit in einem Hauptidealring besitzt also eine im wesentlichen eindeutige Primfaktorzerlegung.*

Die naheliegende Idee des Beweises ist, Elemente schrittweise in Primfaktoren zu zerlegen: Ist das betrachtete Element irreduzibel, so ist es (da wir uns in einem Hauptidealring befinden) bereits prim. Ist es nicht irreduzibel, so kann es als Produkt zweier Nicht-Einheiten geschrieben werden, die man nach demselben Verfahren weiter zerlegen kann. Es bleibt jedoch noch nachzuweisen, dass dieses Verfahren tatsächlich nach endlich vielen Schritten terminiert. Wir werden den Beweis etwas abstrakter wie folgt formulieren:

Beweis (von Satz 2.4.22). Sei R ein Hauptidealring. Sei $Q \subset R$ die Menge aller Elemente $a \in R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$, die *nicht* als endliches Produkt von Primelementen geschrieben werden können. Wir betrachten dann die Menge $S := \{(a) \mid a \in Q\}$ der zugehörigen Hauptideale und zeigen, dass $S = \emptyset$ ist:

Angenommen, S wäre nicht-leer. Aus Lemma 2.4.23 folgt, dass S Elemente enthält, die bezüglich Inklusion maximal sind, d.h. es gibt ein $A \in S$ mit:

$$\forall_{B \in S} \quad A \subset B \Longrightarrow A = B.$$

Etwas genauer: *Angenommen,* es gäbe kein maximales Element in $S \neq \emptyset$. Sei $A_0 \in S$. Da A_0 nicht maximal ist, existiert ein $A_1 \in S$ mit $A_0 \subset A_1$ und $A_1 \neq A_0$. Da auch A_1 nicht maximal ist, gibt es dann ein $A_2 \in S$ mit $\ldots$. Dies liefert eine echt aufsteigende Kette $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Idealen in R, im Widerspruch zu Lemma 2.4.23. Strenggenommen haben wir bei der Konstruktion der Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine etwas schwächere Variante des Auswahlaxioms, *Axiom of Dependent Choice*, verwendet. Also enthält S ein maximales Element A.

Nach Definition von S gibt es ein $a \in Q$ mit $A = (a)$. Wegen $a \in Q$ ist a insbesondere *kein* Primelement und daher (da R ein Hauptidealring ist) auch nicht irreduzibel. Es gibt also $x, y \in R \setminus R^\times$ mit

$$a = x \cdot y.$$

Wegen $a \in Q$ ist auch $x \in Q$ oder $y \in Q$. Ohne Einschränkung sei $x \in Q$. Aus $x \mid a$ erhalten wir aber $A = (a) \subset (x)$. Da A in S maximal ist, folgt $(a) = (x)$, und damit, dass a und x assoziiert sind (Bemerkung 2.4.16). Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass y keine Einheit ist. Also ist $S = \emptyset$, und damit auch $Q = \emptyset$. □

Lemma 2.4.23 (Hauptidealringe sind noethersch)**.** *Sei R ein Hauptidealring und sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Idealen in R, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$A_n \subset A_{n+1}.$$

Dann wird diese Kette stationär, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_{\geq N}} \quad A_n = A_N.$$

Beweis. Wir betrachten die Vereinigung

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset R.$$

Da es sich dabei um eine aufsteigende Vereinigung handelt, ist A ein Ideal in R (nachrechnen). Nach Voraussetzung ist R ein Hauptidealring; es gibt daher ein $a \in R$ mit $A = (a)$.

Nach Definition von A gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a \in A_N$. Also erhalten wir das Inklusionssandwich

$$A = (a) = R \cdot a \subset A_N \subset A_{N+1} \subset \cdots \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A,$$

und damit $A_n = A_N$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. □

Literaturaufgabe. Wer war Emmy Noether?

Korollar 2.4.24 (der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie)**.**

1. *Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist faktoriell.*
2. *Ist K ein Körper, so ist $K[T]$ faktoriell.*

Beweis. Nach Korollar 2.4.9 handelt es sich in beiden Fällen um Hauptidealringe; diese sind nach Satz 2.4.22 faktoriell. □

Beispiel 2.4.25.

- Eine/Die Primfaktorzerlegung von $12 \in \mathbb{Z}$ lautet

  $$12 = \boxed{?}$$

  Viele der klassischen Mengenangaben (Dutzend, Anzahl der Minuten pro Stunde, ...) beruhen auf Zahlen (12, 60, ...), die „viele“ Teiler besitzen, um viel Flexibilität bei der Aufteilung zu liefern.

- Eine/Die Primfaktorzerlegung von $T^3 - T^2 + T - 1 \in \mathbb{R}[T]$ lautet

  $$T^3 - T^2 + T - 1 = \boxed{?}$$

  Eine/Die Primfaktorzerlegung von $T^3 - T^2 + T - 1 \in \mathbb{C}[T]$ lautet

  $$T^3 - T^2 + T - 1 = \boxed{?}$$

Ausblick 2.4.26 (Primzahlen in der Praxis)**.** Primzahlen sind nicht nur in der Mathematik ein faszinierender Untersuchungsgegenstand, sondern sind auch aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken – ein Großteil der elektronischen Verschlüsselungs- und Authentifizierungstechnologie beruht auf zahlentheoretischen Eigenschaften von Primzahlen! Wir werden im Rahmen der Algebra-Vorlesung genauer auf solche Anwendungen eingehen.

2.4.4 Der größte gemeinsame Teiler

Der größte gemeinsame Teiler spielt in vielen arithmetischen Situationen eine wichtige Rolle. Unter anderem tritt er auch auf, wenn man mehrere Hauptideale zu neuen Idealen kombinieren möchte.

Definition 2.4.27 (größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches)**.** Sei R ein Integritätsring und sei $S \subset R$.

- Ein *größter gemeinsamer Teiler von S* ist ein Element $d \in R$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt $d \mid s$ für alle $s \in S$ und für alle $a \in R$ gilt
$$\big(\forall_{s\in S} \quad a \mid s\big) \Longrightarrow a \mid d.$$
- Ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches von S* ist ein Element $m \in R$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt $s \mid m$ für alle $s \in S$ und für alle $a \in R$ gilt
$$\big(\forall_{s\in S} \quad s \mid a\big) \Longrightarrow m \mid a.$$

Proposition 2.4.28 (Darstellungen des ggT)**.** *Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$.*

1. *Falls es in R einen größten gemeinsamen Teiler von a und b gibt, so ist dieser bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt; wir schreiben dann $\mathrm{ggT}(a, b)$ für einen/den größten gemeinsamen Teiler von a und b.*
2. *Gibt es ein $d \in R$ mit $(d) = (a, b)$, so ist d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.*
3. *Ist R ein Hauptidealring, so gibt es einen größten gemeinsamen Teiler von a und b und für jeden größten gemeinsamen Teiler d von a und b gilt $(d) = (a, b)$. Insbesondere gibt es $r, s \in R$ mit*
$$d = r \cdot a + s \cdot b.$$
4. *Ist R faktoriell, ist $P \subset R$ ein Repräsentantensystem aller Primelemente modulo Assoziiertheit, sind $a, b \notin \{0\} \cup R^\times$ und sind*
$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p\in P} p^{\nu_p(a)} \quad \text{und} \quad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p\in P} p^{\nu_p(b)}$$

die zugehörigen Primfaktorzerlegungen von a bzw. b (mit $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in R^\times$), so ist

$$\prod_{p \in P} p^{\min(\nu_p(a), \nu_p(b))}$$

der größte gemeinsame Teiler von a und b.

Beweis. Zu 1. Dies folgt aus der Definition größter gemeinsamer Teiler, da sich je zwei gößte gemeinsame Teiler c, d von a und b gegenseitig teilen.

Zu 2. Sei $d \in R$ mit $(d) = (a, b)$. Dann ist insbesondere $(a) \subset (d)$ und $(b) \subset (d)$ bzw. $d \mid a$ und $d \mid b$ (Bemerkung 2.4.16). Wegen $d \in (a, b)$ gibt es $r, s \in R$ mit $d = r \cdot a + s \cdot b$; daraus folgt, dass jedes Element, das a und b teilt, auch ein Teiler von d ist. Also ist d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.

Zu 3. Da R ein Hauptidealring ist, gibt es ein $c \in R$ mit $(c) = (a, b)$. Nach dem zweiten Teil handelt es sich dabei um einen/den größten gemeinsamen Teiler von a und b.

Ist $d \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler, so ist d nach dem ersten Teil zu c assoziiert. Somit folgt $(d) = (c) = (a, b) = \mathrm{Span}_R\{a, b\}$. Insbesondere gibt es $r, s \in R$ mit $d = r \cdot a + s \cdot b$.

Zu 4. Offenbar ist das angegebene Element ein Teiler von a und b. Betrachtet man die Primfaktorzerlegungen von Teilern von a und b, so sieht man, dass jeder dieser Teiler auch das angegebene Element teilt. □

In euklidischen Ringen können wir größte gemeinsame Teiler auf einfache Weise algorithmisch bestimmen. Dieses Verfahren geht auf Euklid zurück.

Algorithmus 2.4.29 (der euklidische Algorithmus)**.** Sei R ein euklidischer Ring mit der euklidischen Gradfunktion $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$. Außerdem sei ein Algorithmus für die Division mit Rest bezüglich δ gegeben. Seien $a, b \in R$. Wir berechnen nun daraus wie folgt ein Element von R:

- Ist $b = 0$, so beenden wir den Algorithmus und verwenden a als Ergebnis.
- Ist $b \neq 0$, so bestimmen wir durch Division mit Rest $r, s \in R$ mit

  $$a = s \cdot b + r \quad \text{und} \quad \big[\delta(r) < \delta(b) \text{ oder } r = 0\big]$$

  und wenden den Algorithmus rekursiv auf b und r an.

Proposition 2.4.30 (Analyse des euklidischen Algorithmus)**.** *Sei R ein euklidischer Ring und seien $a, b \in R$. Dann gilt: Wendet man den euklidischen Algorithmus auf a und b bzgl. einer euklidischen Gradfunktion $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ auf R an, so terminiert der Algorithmus und für das resultierende Element $c \in R$ gilt*

$$(a, b) = (c)$$

bzw. $c = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Beweis. Der Algorithmus terminiert, da in jedem Rekursionsschritt der δ-Wert des zweiten Elements sinkt (oder der Algorithmus im darauffolgenden Schritt terminiert).

Außerdem hat das berechnete Element die gewünschte Eigenschaft, denn:

- Ist $b = 0$, so ist $(a, b) = (a, 0) = (a)$.
- Ist $b \neq 0$ und sind $r, s \in R$ mit

$$a = s \cdot b + r,$$

so gilt $(a, b) = (b, r)$ (nachrechnen).

Induktiv folgt somit die Behauptung. □

Bemerkung 2.4.31 (der euklidische Algorithmus in Haskell)**.** In der funktionalen Programmiersprache Haskell (https://www.haskell.org) lässt sich der euklidische Algorithmus zum Beispiel wie folgt definieren:

```
gcd       :: (Integral a) => a -> a -> a
gcd x y   =  gcd' (abs x) (abs y)
             where gcd' a 0  =  a
                   gcd' a b  =  gcd' b (a `rem` b)
```

Beispiel 2.4.32. Wir bestimmen den größten gemeinsamen Teiler von 14 und 34 in $\mathbb{Z}$ mit dem euklidischen Algorithmus:

- Anwendung auf $(14, 34)$: Division mit Rest liefert $14 =$?
- Anwendung auf $(34, 14)$: Division mit Rest liefert $34 =$?
- Anwendung auf $(14, 6)$: Division mit Rest liefert $14 =$?
- Anwendung auf $(6, 2)$: Division mit Rest liefert $6 =$?
- Anwendung auf $(2, 0)$: Das Ergebnis ist 2.

Also ist 2 der größte gemeinsame Teiler von 14 und 34.

Indem wir rückwärts durch die Berechnungen durchgehen und jeweils geeignet auflösen, erhalten wir die folgende Darstellung des größten gemeinsamen Teilers durch die Ausgangszahlen:

$$\begin{aligned} 2 &= 14 - 2 \cdot 6 \\ &= 14 - 2 \cdot (34 - 2 \cdot 14) \\ &= 5 \cdot 14 - 2 \cdot 34. \end{aligned}$$

Ausblick 2.4.33 (Common Factor Attacks)**.** Die Tatsache, dass größte gemeinsame Teiler algorithmisch effizient berechnet werden können, hat praktische Konsequenzen. Zum Beispiel wurde dies genutzt, um erfolgreich private RSA-Schlüssel aus öffentlichen Schlüsseln zu berechnen (!), wenn bei der Schlüsselerzeugung „schlechte“ Zufallszahlen verwendet wurden [11].

Satz 2.4.34 (chinesischer Restsatz für Moduln)**.** *Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$ mit $(a, b) = (1)$ (dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn R ein Hauptidealring ist und $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ gilt). Seien $r, s \in R$ mit $r \cdot a + s \cdot b = 1$. Dann sind*

$$\begin{aligned} f\colon R/(a \cdot b) &\longrightarrow R/(a) \oplus R/(b) \\ [x] &\longmapsto \big([x], [x]\big) \\ g\colon R/(a) \oplus R/(b) &\longrightarrow R/(a \cdot b) \\ \big([x], [y]\big) &\longmapsto [s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot y] \end{aligned}$$

wohldefinierte zueinander inverse R-Modulisomorphismen.

Beweis. Wohldefiniertheit von f: Die Wohldefiniertheit von f folgt aus der Tatsache, dass $(a \cdot b) = (b \cdot a) \subset (a)$ und $(a \cdot b) \subset (b)$. Man kann dann eine direkte Rechnung durchführen oder die universelle Eigenschaft des freien Moduls R und die universelle Eigenschaft des Quotienten $R/(a \cdot b)$ verwenden.

Wohldefiniertheit von g: Dies ist eine einfache Rechnung (man beachte dabei auch, dass R kommutativ ist) oder man verwendet die universelle Eigenschaft der direkten Summe $R/(a) \oplus R/(b)$ und der Quotienten $R/(a)$ und $R/(b)$. Essentiell ist dabei, dass vor „x“ bzw. „y“ jeweils der komplementäre Skalar „b“ bzw. „a“ steht.

Die *R-Linearität von f bzw. g* kann man leicht nachrechnen.

Die *Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$:*

- Sei $[x] \in R/(a \cdot b)$. Dann ist (nach Definition von f, g, r, s)

$$\begin{aligned} g \circ f\big([x]\big) &= g\big([x], [x]\big) \\ &= [s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot x] \\ &= \big[(r \cdot a + s \cdot b) \cdot x\big] \\ &= [1 \cdot x] = [x]. \end{aligned}$$

- Sei umgekehrt $([x], [y]) \in R/(a) \oplus R/(b)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \circ g\big([x], [y]\big) &= f\big([s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot y]\big) \\ &= \big([s \cdot b \cdot x], [r \cdot a \cdot y]\big). \end{aligned}$$

Wegen $r \cdot a + s \cdot b = 1$ erhalten wir in $R/(a)$, dass

$$[s \cdot b \cdot x] = \big[(1 - r \cdot a) \cdot x\big] = [1 \cdot x] - [r \cdot a \cdot x] = [x] - [0] = [x]$$

und analog $[r \cdot a \cdot y] = [y]$ in $R/(b)$. Also ist

$$f \circ g\big([x],[y]\big) = \big([x],[y]\big).$$ □

Beispiel 2.4.35 (Flaschen)**.** Für welche Anzahlen von Flaschen bleiben

- beim Verpacken in Sechserkästen genau zwei Flaschen übrig und
- beim Verpacken in Elferkästen genau fünf Flaschen übrig?

Fragen dieser Art können mit dem chinesischen Restsatz beantwortet werden: Gesucht ist die Teilmenge $\{n \mid [n] = [2] \in \mathbb{Z}/6 \text{ und } [n] = [5] \in \mathbb{Z}/11\}$ von $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$. Wegen $\mathrm{ggT}(6, 11) = 1$ und $2 \cdot 6 - 11 = 1$ ist

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/11 &\longrightarrow \mathbb{Z}/66 \\ \big([x],[y]\big) &\longmapsto \boxed{?} \end{aligned}$$

nach dem chinesischen Restsatz (Satz 2.4.34) ein zu

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/66 &\longrightarrow \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/11 \\ [x] &\longmapsto \big([x],[x]\big) \end{aligned}$$

inverser Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln. Wegen

$$g\big([2],[5]\big) = \boxed{?}$$

(in $\mathbb{Z}/66$) ist $38 + 66\mathbb{Z}$ (bzw. $38 + 66 \cdot \mathbb{N}$) die gesuchte Menge von Anzahlen.

2.5 Moduln über Hauptidealringen

Vektorräume über einem gegebenen Grundkörper werden durch die Dimension bis auf Isomorphie klassifiziert. In der Modultheorie ist diese Klassifikation komplizierter – wie wir bereits anhand der behandelten Beispiele erahnen können. Für gewisse Klassen von Ringen ist eine Klassifikation noch möglich, z.B. für Hauptidealringe. Wir werden nun endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen klassifizieren.

Unsere Strategie ist dabei wie folgt:

- Wir beschreiben endlich erzeugte Moduln durch Matrizen mit Koeffizienten im Grundring (Kapitel 2.5.1).
- Wir beweisen dann ein Klassifikationsresultat für Matrizen, den Elementarteilersatz für Matrizen (Kapitel 2.5.2).
- Wir übersetzen diese Klassifikation in entsprechende Resultate für Moduln, den Elementarteilersatz für Moduln und den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Kapitel 2.5.3).

2.5.1 Präsentationen von Moduln

Als ersten Schritt beschreiben wir endlich erzeugte Moduln durch Matrizen. Wir beginnen mit einer fundamentalen Beobachtung:

Bemerkung 2.5.1. Sei R ein Ring und sei V ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und einen R-Modulhomomorphismus $f\colon R^m \longrightarrow V$, der surjektiv ist.

Genauer gilt: Ist $S \subset V$ ein endliches Erzeugendensystem und $m := \#S$ (etwa $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$), so gibt es nach der universellen Eigenschaft des freien R-Moduls R^m (bezüglich der Standardbasis) einen R-Modulhomomorphismus $f\colon R^m \longrightarrow V$ mit

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,m\}} \quad f(e_j) = v_j.$$

Da S ein Erzeugendensystem von V ist, ist f surjektiv.

Nach dem Homomorphiesatz für Moduln (Satz 2.3.23) ist insbesondere $V \cong_R R^m/\ker f$. Über allgemeinen Moduln ist es jedoch schwierig, genauere Aussagen über $\ker f$ zu treffen. Über Hauptidealringen hilft der folgende Satz.

Satz 2.5.2. *Sei R ein Hauptidealring, sei V ein endlich erzeugter R-Modul und sei $U \subset V$ ein Untermodul. Dann ist auch U endlich erzeugt.*

Beweis. Wir schreiben

$$d(V) := \min\{\#S \mid S \subset V \text{ ist ein endliches Erzeugendensystem von } V\};$$

da V nach Voraussetzung endlich erzeugt ist, handelt es sich bei $d(V)$ um eine wohldefinierte natürliche Zahl. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $d(V)$; genauer zeigen wir: Ist $U \subset V$ ein Untermodul, so gilt $d(U) \leq d(V)$.

- *Induktionsanfang.* Ist $d(V) = 0$, so ist $V \cong_R \{0\}$. Der einzige Untermodul U von V ist also V selbst (und damit insbesondere endlich erzeugt mit $d(U) = 0 = d(V)$).

- *Induktionsvoraussetzung.* Sei $m := d(V) > 0$ und es sei für alle endlich erzeugten R-Moduln V' mit $d(V') < m$ bereits gezeigt, dass jeder Untermodul U' von V' endlich erzeugt ist und $d(U') \leq d(V')$ erfüllt.

- *Induktionsschritt.* Sei S ein Erzeugendensystem von V mit $|S| = m$ und sei $U \subset V$ ein Untermodul. Als ersten Schritt zeigen wir, dass es genügt, den Fall zu betrachten, dass V ein freier Modul ist:

  Nach der obigen Beobachtung (Bemerkung 2.5.1) erhalten wir einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $f\colon R^m \longrightarrow V$. Sei

$$\widetilde{U} := f^{-1}(U) \subset R^m.$$

Dann ist $\widetilde{U}$ ein Untermodul von R^m und nach Konstruktion ist $f(\widetilde{U}) = U$. Es genügt also zu zeigen, dass $\widetilde{U}$ endlich erzeugt ist und $d(\widetilde{U}) \leq m = d(V)$ erfüllt.

Wir zerlegen das Problem: Dazu betrachten wir die Projektion

$$\begin{aligned} \pi\colon R^m &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto x_m \end{aligned}$$

auf die letzte Komponente (dies ist möglich, da $m \geq 1$ ist) und $K := \ker \pi =$? $\subset R^m$. Mithilfe von π können wir $\widetilde{U}$ zerlegen:

- Der Untermodul $\widetilde{K} := K \cap \widetilde{U} \subset K$ ist wegen $d(K) = d(R^{m-1}) \leq m-1$ nach Induktionsvoraussetzung endlich erzeugt und erfüllt

$$d(\widetilde{K}) \leq m - 1.$$

- Nach dem Homomorphiesatz für Moduln (Satz 2.3.23) ist

$$\widetilde{U}/\widetilde{K} = \widetilde{U}/\ker(\pi|_{\widetilde{U}}) \cong_R \pi(\widetilde{U}) \subset R.$$

  Da $\pi(\widetilde{U})$ ein Untermodul von R (d.h. ein Ideal) ist und R ein Hauptidealring ist, folgt

$$d(\widetilde{U}/\widetilde{K}) = d\big(\pi(\widetilde{U})\big) \leq 1.$$

Aus endlichen Erzeugendensystemen von $\widetilde{U}/\widetilde{K}$ und $\widetilde{K}$ können wir ein endliches Erzeugendensystem von $\widetilde{U}$ zusammensetzen: Sei $S \subset \widetilde{K}$ ein Erzeugendensystem von $\widetilde{K}$ und sei $Q \subset \pi(\widetilde{U})$ ein Erzeugendensystem von $\pi(\widetilde{U})$. Wir wählen eine Menge $\widetilde{Q} \subset \widetilde{U}$ mit $\pi(\widetilde{Q}) = Q$ und $\#\widetilde{Q} = \#Q$. Dann ist $S \cup \widetilde{Q}$ ein Erzeugendensystem von $\widetilde{U}$ (nachrechnen) und

$$\#(S \cup \widetilde{Q}) \leq \#S + \#\widetilde{Q} = \#S + \#Q.$$

Wir erhalten daher insgesamt

$$d(\widetilde{U}) \leq d(\widetilde{K}) + d(\widetilde{U}/\widetilde{K}) \leq m - 1 + 1 = m,$$

wie gewünscht. □

Anmerkung zum Lernen. Bei der Reduktion auf Untermoduln von freien Moduln haben wir eine Konstruktion verwendet, die an vielen Stellen in der (homologischen) Algebra auftritt: Man beschreibt Moduln als Bild von Homomorphismen von freien Moduln. Analog ist es in der Gruppentheorie oft günstig, Gruppen als Bild von Gruppenhomomorphismen von sogenannten

freien Gruppen anzusehen. An dieser Stelle zahlt sich also ein gutes Verhältnis zu universellen Eigenschaften aus, da diese – wie der Name schon sagt – universell einsetzbar sind.

Korollar 2.5.3 (endliche Präsentiertheit)**.** *Sei R ein Hauptidealring.*

1. *Ist $m \in \mathbb{N}$ und ist $U \subset R^m$ ein Untermodul, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$ mit $U = \operatorname{im} L(A)$.*
2. *Ist V ein endlich erzeugter R-Modul, so ist V* endlich präsentiert*, d.h. es gibt $m, n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$ mit*

$$V \cong_R R^m / \operatorname{im} L(A).$$

Beweis. Zu 1. Der Untermodul $U \subset R^m$ ist endlich erzeugt, da R ein Hauptidealring und R^m ein endlich erzeugter R-Modul ist (Satz 2.5.2).

Dann liefert die universelle Eigenschaft freier Moduln ein $n \in \mathbb{N}$ und einen R-Modulhomomorphismus $f\colon R^n \longrightarrow R^m$ mit $U = \operatorname{im} f$ (Bemerkung 2.5.1). Die Matrix $A := (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$ erfüllt $f = L(A)$ und somit

$$U = \operatorname{im} f = \operatorname{im} L(A).$$

Zu 2. Die universelle Eigenschaft freier Moduln liefert ein $m \in \mathbb{N}$ und einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $f\colon R^m \longrightarrow V$ (Bemerkung 2.5.1); nach dem Homomorphiesatz induziert f einen Isomorphismus $R^m/\ker f \cong_R V$.

Da $\ker f \subset R^m$ ein Untermodul ist, erhalten wir aus dem ersten Teil ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$ mit $\ker f = \operatorname{im} L(A)$. Also ist

$$V \cong_R R^m/\ker f = R^m/\operatorname{im} L(A). \qquad \square$$

Beispiel 2.5.4 (zyklische Moduln via Matrizen)**.** Sei R ein kommutativer Ring und sei $a \in R$. Dann ist $R/(a) \cong_R R/\operatorname{im} L(A)$, wobei $A \in \mathrm{M}_{1\times 1}(R)$ die 1×1-Matrix ist, deren einziger Koeffizient das gegebene Element a ist.

Wir können im folgenden also endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen mithilfe von Matrizen beschreiben. Wir werden daher zunächst Matrizen über Hauptidealringen genauer betrachten.

2.5.2 Der Elementarteilersatz

Der Gauß-Algorithmus erlaubt es, Matrizen über Körper in Zeilenstufenform zu transformieren (Satz I.5.2.8). Da in allgemeineren Ringen nicht jedes Element ungleich 0 eine Einheit ist, können wir dieses Verfahren nicht ohne weiteres auf allgemeine Ringe übertragen bzw. müssen damit rechnen, dass die erreichbaren Zeilenstufenformen kompliziertere Pivotelemente enthält. Dies führt zur Smith-Normalform und dem Elementarteilersatz für Matrizen:

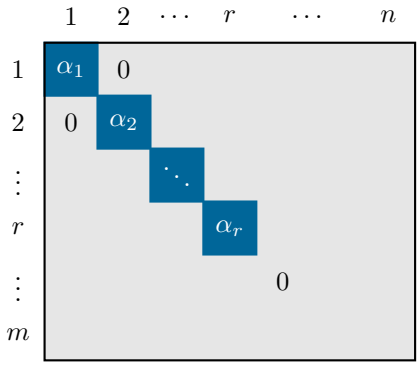


Abbildung 2.4.: Smith-Normalform; im grauen Bereich stehen nur Nullen.

Definition 2.5.5 (Smith-Normalform)**.** Sei R ein Integritätsring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$. Dann ist A in *Smith-Normalform*, wenn A von der Gestalt in Abbildung 2.4 ist, mit $r \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R \setminus \{0\}$, wobei

$$\alpha_j \mid \alpha_{j+1}$$

für alle $j \in \{1, \dots, r-1\}$ gilt. Die Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ heißen *Elementarteiler von A*.

Beispiel 2.5.6 (Smith-Normalform)**.**

- Sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ in Smith-Normalform?

  Ja Nein

- Sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ in Smith-Normalform?

  Ja Nein

Satz 2.5.7 (Elementarteilersatz für Matrizen)**.** *Sei R ein Hauptidealring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$.*

1. *Dann gibt es Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$, $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass*

$$B := S \cdot A \cdot T$$

in Smith-Normalform ist.

2. *Für die Elementarteiler $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ von B gilt:*

$$\forall_{k \in \{1,\ldots,\min(m,n)\}} \quad D_k(A) = \begin{cases} (\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_k) & \text{falls } k \leq r \\ \{0\} & \text{falls } k > r. \end{cases}$$

Insbesondere sind r und die Elementarteiler von B (bis auf Assoziiertheit) eindeutig durch A bestimmt; man bezeichnet sie daher auch als Elementarteiler von A.

Wir erklären die noch nicht definierten Begriffe $\mathrm{GL}_m(R)$ und $D_k(A)$, die in der obigen Formulierung des Elementarteilersatzes verwendet wurden:

Bemerkung 2.5.8 (Determinanten über Ringen)**.** Sei R ein kommutativer (!) Ring und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Analog zum Fall von Körpern können wir rekursiv durch Entwicklung nach der ersten Spalte eine Determinante

$$\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(R) \longrightarrow R$$

für Matrizen über R konstruieren (Satz I.5.4.3). Diese ist (in den Zeilen und Spalten) n-linear, alternierend und erfüllt $\det I_n = 1$.

Wie im Fall von Körpern erfüllt diese Determinante eine *Leibnizformel* (Satz I.5.4.17): Für alle $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)$ gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)}.$$

Außerdem gilt für alle $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Wir schreiben

$$\mathrm{GL}_n(R) := \left\{ A \in \mathrm{M}_{n\times n}(R) \;\middle|\; \exists_{B \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)} \quad A \cdot B = I_n = B \cdot A \right\}$$

für die Menge der (über R) invertierbaren $n \times n$-Matrizen über R. Mithilfe der Ring-Version der Cramerschen Regel (Satz I.5.4.9) erhalten wir dann

$$\mathrm{GL}_n(R) = \left\{ A \in \mathrm{M}_{n\times n}(R) \;\middle|\; \det A \in R^\times \right\};$$

man beachte dabei, dass im allgemeinen $R^\times \neq R \setminus \{0\}$ gilt.

Definition 2.5.9 (Determinantenideale)**.** Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$. Sei $r \in \{1, \ldots, \min(m,n)\}$.

- Eine $r \times r$-*Untermatrix von* A ist eine Matrix der Form $(A_{j,k})_{j\in J,k\in K}$, wobei $J \subset \{1,\dots,m\}$, $K \subset \{1,\dots,n\}$ mit $\#J = r = \#K$ sind.

  Strenggenommen sollten wir eigentlich die ordnungserhaltenden Bijektionen $f_J\colon \{1,\dots,r\} \longrightarrow J$ bzw. $f_K\colon \{1,\dots,r\} \longrightarrow K$ und die zugehörigen Matrizen $(A_{f_J(j),f_K(k)})_{j,k\in\{1,\dots,r\}}$ betrachten. Um die Notation etwas übersichtlicher zu halten, haben wir die obige Darstellung verwendet.

- Sei

  $$D_r(A) := \operatorname{Span}_R\bigl\{\det B \;\big|\; B \text{ ist eine } r\times r\text{-Untermatrix von } A\bigr\} \subset R$$

  das von der $r \times r$-Untermatrizen von A erzeugte Ideal in R.

Beweis (von Satz 2.5.7). Zu 1. Der Übersichtlichkeit halber beweisen wir die Existenz der Smith-Normalform nur in dem Fall, dass der Ring R euklidisch ist; der allgemeine Fall ist etwas aufwendiger (Bemerkung 2.5.11) und der euklidische Fall zeigt wie wir die für uns relevanten Fälle algorithmisch behandeln können.

Analog zum Gaußschen Eliminationsverfahren verwenden wir Zeilen- und Spaltenoperationen der folgenden Form:

- Vertauschen zweier Zeilen [bzw. zweier Spalten].
- Multiplikation einer Zeile [bzw. einer Spalte] mit einer Einheit aus R.
- Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile [bzw. Spalte] zu einer anderen Zeile [bzw. Spalte].

Wie im Fall von Zeilenoperationen auf Matrizen über Körpern können wir die obigen Zeilenoperationen als Multiplikation der gegebenen Matrix von links mit über R invertierbaren Matrizen auffassen; analog erhalten wir die obigen Spaltenoperationen durch Multiplikation der gegebenen Matrix von rechts mit über R invertierbaren Matrizen.

Es genügt daher zu zeigen, dass wir die gegebene Matrix A durch die obigen Zeilen-/Spaltenoperationen in Smith-Normalform überführen können. Sei $\delta\colon R \longrightarrow \mathbb{N}$ eine euklidische Gradfunktion für R. Die essentielle Größe, die das Verfahren steuert, ist

$$\Delta(A) := \min\bigl\{\delta(A_{j,k}) \;\big|\; j \in \{1,\dots,m\}, k \in \{1,\dots,n\}, A_{j,k} \neq 0\bigr\} \in \mathbb{N}$$

(sofern $A \neq 0$ ist). Wir gehen wie folgt vor:

- *Minimierung des ersten Eintrags einer Matrix A.*
  - Ist $A = 0 \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$ (oder $m = 0$ oder $n = 0$), so beenden wir den Algorithmus und verwenden A als **Ergebnis**.

– Ist $A \neq 0$, so wenden wir Zeilen- und Spaltenvertauschungen an, um $\delta(A_{1,1}) = \Delta(A)$ zu erreichen.

  Falls es mehrere Matrixeinträge gibt, die $\Delta(A)$ realisieren, kann man das Verfahren dadurch deterministisch gestalten, dass man den Eintrag mit dem kleinsten Spaltenindex und dann in dieser Spalte mit dem kleinsten Zeilenindex wählt und die zugehörigen Zeilen bzw. Spalten entsprechend tauscht. Analog kann man auch alle anderen Schritte dieses Algorithmus deterministisch beschreiben.

  Wir wenden auf die neue Matrix *Reduktion der ersten Zeile/Spalte* an.

- *Reduktion der ersten Zeile/Spalte einer Matrix A.*
  – Falls

$$\forall_{k\in\{2,\dots,n\}} \quad A_{1,1} \mid A_{1,k} \quad \text{und} \quad \forall_{j\in\{2,\dots,m\}} \quad A_{1,1} \mid A_{j,1}$$

  gilt, wenden wir *Ausräumen der ersten Zeile/Spalte* auf A an.

  – Falls es ein $j \in \{2,\dots,m\}$ mit $A_{1,1} \nmid A_{j,1}$ gibt, wenden wir Division mit Rest an und erhalten so $r, s \in R$ mit

$$A_{j,1} = s \cdot A_{1,1} + r \quad \text{und} \quad \delta(r) < \delta(A_{1,1}).$$

  Wir addieren das $-s$-fache der ersten Zeile von A zur j-ten Zeile von A. Der $(j,1)$-Eintrag der neuen Matrix ist also r.

  Dann wenden wir *Minimierung des ersten Eintrags* auf die entstandene Matrix an.

  [Man beachte, dass sich durch diesen Schritt der Δ-Wert der Matrix verringert; dieser Schritt kann also nur endlich oft auftreten.]

  – Falls es ein $k \in \{2,\dots,n\}$ mit $A_{1,1} \nmid A_{1,k}$ gibt (aber $A_{1,1}$ alle Einträge der ersten Spalte teilt), wenden wir Division mit Rest an und erhalten so $r, s \in R$ mit

$$A_{1,k} = s \cdot A_{1,1} + r \quad \text{und} \quad \delta(r) < \delta(A_{1,1}).$$

  Wir addieren das $-s$-fache der ersten Spalte von A zur k-ten Spalte von A. Der $(1,k)$-Eintrag der neuen Matrix ist also r.

  Dann wenden wir *Minimierung des ersten Eintrags* auf die entstandene Matrix an.

  [Man beachte, dass sich durch diesen Schritt der Δ-Wert der Matrix verringert; dieser Schritt kann also nur endlich oft auftreten.]

- *Ausräumen der ersten Zeile/Spalte einer Matrix A.*

  [Wir sind nun in der Situation, dass $A_{1,1}$ ein Teiler aller Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte von A ist.]

  1. Für jedes $j \in \{2, \dots, m\}$ addieren wir das $-q_{j,1}$-fache der ersten Zeile zur j-ten Zeile; dabei ist $q_{j,1} \in R$ das Element mit $A_{j,1} = q_{j,1} \cdot A_{1,1}$.
  2. Für jedes $k \in \{2, \dots, n\}$ addieren wir das $-q_{1,k}$-fache der ersten Spalte zur k-ten Spalte; dabei ist $q_{1,k} \in R$ mit $A_{1,k} = q_{1,k} \cdot A_{1,1}$.

  Sei A' die resultierende Matrix.

  [Wir sind nun in der Situation, dass in der ersten Zeile und der ersten Spalte außer an der Position $(1,1)$ nur Nullen stehen.]

  – Falls $A_{1,1}$ alle Matrixeinträge von A' teilt, so wenden wir *Minimierung des ersten Eintrags* (und alle damit verbundenen rekursiven Operationen) auf die verkleinerte Matrix

  $$B := (A_{j+1,k+1})_{(j,k) \in \{1,\dots,m-1\} \times \{1,\dots,n-1\}} \in \mathrm{M}_{m-1 \times n-1}(R)$$

  an und erhalten so eine Matrix B'. Dann verwenden wir

  $$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

  als **Ergebnis**.

  – Falls es $j \in \{2, \dots, m\}$ und $k \in \{2, \dots, n\}$ mit $A_{1,1} \nmid A'_{j,k}$ gibt, so addieren wir die j-te Zeile von A' zur ersten Zeile von A' (dabei bleibt der Eintrag an Position $(1,1)$ und der Δ-Wert der gesamten Matrix unverändert!) und wenden *Minimierung des ersten Eintrags* auf die entstandene Matrix an.

Dieser Algorithmus terminiert, da ein erneuter Durchlauf von *Minimierung des ersten Eintrags* nur nach/bei Verringerung des Δ-Werts oder einer Verkleinerung der Matrix auftritt.

Induktiv folgt, dass die erhaltene Matrix außerhalb der „Diagonalen“ nur Nullen enthält und sich die Diagonaleinträge in der richtigen Reihenfolge teilen. Das Ergebnis ist also in Smith-Normalform.

Zu 2. Nach Lemma 2.5.10 gilt

$$D_k(A) = D_k(S \cdot A \cdot T) = D_k(B)$$

für alle $k \in \{1, \dots, \min(m,n)\}$. Da die $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ aufsteigend nach Teilbarkeit sortiert sind, folgt daher

$$D_k(A) = D_k(B) = \begin{cases} (\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k) & \text{falls } k \leq r \\ \{0\} & \text{falls } k > r \end{cases}$$

für alle $k \in \{1, \ldots, \min(m,n)\}$.

Insbesondere können wir auf diese Weise rekursiv $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (bis auf Assoziiertheit) und r aus den Determinantenidealen $D_1(A), \ldots, D_{\min(m,n)}(A)$ von A bestimmen.

Alternativ kann man die Eindeutigkeit der Elementarteiler auch mithilfe der Verwendung geeigneter Quotienten-/Restklassenkörper und der Länge von Moduln oder Tensorprodukten beweisen [2, Kapitel 6.3]. □

Lemma 2.5.10 (Determinantenideale)**.** *Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$ und sei $k \in \{1, \ldots, \min(m,n)\}$.*

1. *Sind $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(R)$ und $T \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)$, so gilt*

$$D_k(S \cdot A) \subset D_k(A) \quad \text{und} \quad D_k(A \cdot T) \subset D_k(A).$$

2. *Sind $S \in \mathrm{GL}_{m\times m}(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_{n\times n}(R)$, so gilt*

$$D_k(S \cdot A \cdot T) = D_k(A).$$

Beweis. Der erste Teil folgt aus der Verträglichkeit der Determinante mit Produkten und einer geschickten Berechnung/Darstellung der Determinanten von Untermatrizen unter Transformationen (Übungsaufgabe).

Der zweite Teil ist eine direkte Konsequenz, indem man den ersten Teil auf die inversen Matrizen anwendet. □

Bemerkung 2.5.11 (der Fall allgemeiner Hauptidealringe)**.** Der Beweis der Existenz der Smith-Normalform über allgemeinen Hauptidealringen ist ähnlich zum euklidischen Fall, jedoch im Detail etwas aufwendiger [2, S. 210ff]:

- Als Größenmaß der Matrixkoeffizienten verwendet man die Länge der Primfaktorzerlegung statt einer euklidischen Gradfunktion.
- Statt Division mit Rest in *Reduktion der ersten Zeile/Spalte* verwendet man eine Darstellung des größten gemeinsamen Teilers der beiden betrachteten Matrixkoeffizienten; an dieser Stelle werden dann auch etwas kompliziertere Zeilen-/Spaltenoperationen nötig, um den gewünschten Eliminationseffekt zu erzielen.

Anmerkung zum Lernen (Vergleich des Elementarteilersatzes mit anderen Resultaten)**.** Was besagt der Elementarteilersatz für Matrizen in dem Fall, dass der Grundring ein Körper ist? Welchen Algorithmus erhält man, wenn man den Algorithmus im Beweis des Elementarteilersatzes auf eine 1×2-Matrix mit Koeffizienten in einem euklidischen Ring anwendet? (Hinweis: es ist ein alter Bekannter!)

Beispiel 2.5.12 (Berechnung der Elementarteiler)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

Was sind die Elementarteiler von A ? Da A eine „kleine“ Matrix ist, können wir dies mit dem zweiten Teil von Satz 2.5.7 bequem beantworten:

- Bestimmung von $D_1(A)$: Der größte gemeinsame Teiler aller Matrixeinträge ist 2; also ist $D_1(A) =$? .
- Bestimmung von $D_2(A)$: Die einzige 2×2-Untermatrix von A ist A selbst und
$$\det A = \text{?}$$
Also ist $D_2(A) = (96)$.

Somit sind 2 und $96/2 = 48$ die Elementarteiler von A.

Möchte man auch noch invertierbare Matrizen finden, die A in Smith-Normalform transformieren, so bietet es sich an, den im Beweis von Satz 2.5.7 beschriebenen Algorithmus anzuwenden:

- Minimierung des ersten Eintrags von A: Es ist $A \neq 0$ und $\Delta(A) = 4$ (bezüglich $\delta = |\cdot| \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$). Der erste Eintrag ist bereits Δ-minimal.
- Reduktion der ersten Zeile/Spalte von A: Alle Einträge der ersten Spalte sind durch 4 teilbar. Es gibt einen Eintrag ($6 = 1 \cdot 4 + 2$) in der ersten Zeile, der nicht durch 4 teilbar ist. Addition des -1-fachen der ersten Spalte zur zweiten Spalte liefert
$$A' := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}.$$
- Minimierung des ersten Eintrags von A': Wir tauschen dazu die erste und zweite Spalte. Dies liefert
$$A'' := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}.$$
- Reduktion der ersten Zeile/Spalte von A'': Der erste Eintrag (nämlich 2) teilt alle anderen Matrixeinträge in der ersten Zeile/Spalte.
- Ausräumen der ersten Zeile/Spalte von A'': Addition des -10-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile liefert
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}$$
Addition des -2-fachen der ersten Spalte dieser Matrix zur zweiten Spalte dieser Matrix liefert

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}.$$

Der erste Matrixeintrag teilt alle anderen Einträge. Wir wenden daher den Algorithmus auf die 1×1-Matrix -48 an; als Ergebnis erhalten wir die Matrix -48. Insgesamt liefert dies insgesamt als Ergebnis

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix}.$$

Indem wir die Zeilen- und Spaltenoperationen in der richtigen Reihenfolge sammeln und in Matrizen umschreiben, erhalten wir für (Zeilenoperationen: zweite Zeile minus 10-mal die erste Zeile)

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

und (Spaltenoperationen: erstens: zweite Spalte minus die erste Spalte; zweitens: Vertauschung der ersten und zweiten Spalte; drittens: zweite Spalte minus 2-mal die erste Spalte; Spaltenoperationen werden von rechts multipliziert!)

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

dass

$$B := S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix};$$

man beachte dabei, dass 48 und -48 in $\mathbb{Z}$ assoziiert sind!

Alternativ kann man die Berechnung von S und T auch mithilfe eines dreigeteilten Schemas (analog zum zweigeteilten Schema zur Berechnung von inversen Matrizen über Körpern) in den obigen Algorithmus integrieren (Abbildung 2.5). Auf die linke erweiterte Matrix wendet man dabei die Zeilenoperationen an, auf die obere die Spaltenoperationen.

Der Elementarteilersatz liefert analog zum Gaußschen Eliminationsverfahren insbesondere ein Lösungsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme über Hauptidealringen. Zum Beispiel kann man auf diese Weise lineare Gleichungssysteme (sogenannte lineare diophantische Gleichungen) über den ganzen Zahlen lösen.

Beispiel 2.5.13 (Lösung linearer Gleichungssysteme über Ringen)**.** Die Bestimmung der Transformationsmatrizen ist zum Beispiel dann relevant, wenn man lineare Gleichungssysteme lösen möchte: In Beispiel 2.5.12 können wir so die Menge

$$V := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 42 \text{ und } -8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 = 0 \right\}$$

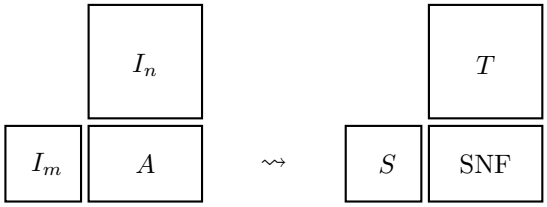


Abbildung 2.5.: Bestimmung der Smith-Normalform zusammen mit Transformationsmatrizen, schematisch

bestimmen: Es gilt (mit der Notation aus Beispiel 2.5.12)

$$
\begin{aligned}
V &= \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; A \cdot x = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; B \cdot T^{-1} \cdot x = S \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} && \text{(da } B = S \cdot A \cdot T \text{ und } S \text{ invertierbar)} \\
&= \left\{ T \cdot y \;\middle|\; y \in \mathbb{Z}^2,\ B \cdot y = S \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} && \text{(da } T \text{ invertierbar ist)} \\
&= \left\{ T \cdot y \;\middle|\; y \in \mathbb{Z}^2,\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 42 \\ -420 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ T \cdot y \;\middle|\; y \in \mathbb{Z}^2,\ 2 \cdot y_1 = 42 \text{ und } -48 \cdot y_2 = -420 \right\} \\
&= ?
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass -420 *nicht* durch -48 teilbar ist.

Analog zu den Gauß-Rezepten über Körpern können wir mithilfe des Elementarteilersatzes viele lineare Probleme in (freien) Moduln über Hauptidealringen lösen. Dies spielt zum Beispiel bei der algorithmischen Berechnung von Homologiegruppen in der Algebraischen Topologie eine Rolle [5].

2.5.3 Die Klassifikation endlich erzeugter Moduln

Indem wir endlich erzeugte Moduln durch Matrizen beschreiben und auf diese Matrizen den Elementarteilersatz für Matrizen anwenden, erhalten wir die gewünschte Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen. Insbesondere zeigen wir die Wohldefiniertheit des Rangs freier Moduln (Proposition 2.5.14), den Elementarteilersatz für Moduln (Satz 2.5.15) und den Klassifikationssatz für endlich erzeute Moduln (Satz 2.5.16).

Proposition 2.5.14 (Rang freier Moduln über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.*

1. *Gilt $n > m$ und ist $A \in M_{m\times n}(R)$, so ist $L(A)\colon R^n \longrightarrow R^m$* nicht *injektiv.*

2. *Insbesondere folgt*
$$R^m \cong_R R^n \iff m = n.$$

Beweis. Der erste Teil ist eine Folgerung aus dem Elementarteilersatz für Matrizen (Satz 2.5.7) (Übungsaufgabe); der zweite Teil ist eine direkte Konsequenz des ersten Teils. □

Satz 2.5.15 (Elementarteilersatz für Moduln)**.** *Sei R ein Hauptidealring, sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $U \subset R^m$ ein Untermodul.*

1. *Dann gibt es eine R-Basis $(v_1, \dots, v_m)$ von R^m sowie $r \in \{0, \dots, m\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R \setminus \{0\}$ mit*
$$U = \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\}$$
und $\alpha_j \mid \alpha_{j+1}$ für alle $j \in \{1, \dots, r-1\}$.

2. *Insbesondere ist U ein freier R-Modul.*

3. *Dabei sind r und $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (bis auf Assoziiertheit) im folgenden Sinne eindeutig durch U bestimmt: Ist $(v'_1, \dots, v'_m)$ eine R-Basis von R^m und gibt es $r' \in \{0, \dots, m\}$ sowie $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r \in R \setminus \{0\}$ mit $U = \operatorname{Span}_R\{\alpha'_1 \cdot v'_1, \dots, \alpha'_r \cdot v'_{r'}\}$, so gilt bereits $r = r'$ und für jedes $j \in \{1, \dots, r = r'\}$ ist α_j zu α'_j assoziiert.*

Man bezeichnet $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ als Elementarteiler von U.

Beweis. Zu 1. Wir beschreiben U durch eine Matrix: Nach Korollar 2.5.3 gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m\times n}(R)$ mit $U = \operatorname{im} L(A)$.

Aus dem Elementarteilersatz für Matrizen (Satz 2.5.7) erhalten wir Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass
$$B := S \cdot A \cdot T$$
in Smith-Normalform ist; sei $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Folge der Elementarteiler von B (bzw. A). Dann ist
$$A = S^{-1} \cdot B \cdot T^{-1}$$
und die Spalten $v_1, \dots, v_m$ von S^{-1} bilden eine R-Basis von R^m. Nach Konstruktion gilt dabei

$$\begin{aligned}
U &= \operatorname{im} L(A) && \text{(Konstruktion von } A\text{)}\\
&= \operatorname{im}\big(L(S^{-1} \cdot B) \circ L(T^{-1})\big) && \text{(wegen } A = S^{-1} \cdot B \cdot T^{-1}\text{)}\\
&= \operatorname{im} L(S^{-1} \cdot B) && \text{(da } L(T^{-1}) \text{ surjektiv ist)}\\
&= \operatorname{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\}. && \text{(Gestalt von } B\text{)}
\end{aligned}$$

Zu 2. Die Familie $(\alpha_1 \cdot v_1, \ldots, \alpha_r \cdot v_r)$ aus dem ersten Teil ist linear unabhängig über R (da $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R \setminus \{0\}$, die Familie $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig ist und R nullteilerfrei ist). Außerdem ist $\{\alpha_1 \cdot v_1, \ldots, \alpha_r \cdot v_r\}$ nach Konstruktion ein Erzeugendensystem von U. Also ist $(\alpha_1 \cdot v_1, \ldots, \alpha_r \cdot v_r)$ eine R-Basis von U; insbesondere ist U ein freier R-Modul.

Zu 3. Die Eindeutigkeitsaussage kann man wie folgt mithilfe der Elementarteiler bzw. Determinantenideale von Matrizen ableiten: Wir betrachten dazu die Matrizen

$$A := (\alpha_1 \cdot v_1 \mid \cdots \mid \alpha_r \cdot v_r \mid 0 \mid \cdots \mid 0) \in M_{m\times m}(R),$$
$$A' := (\alpha'_1 \cdot v'_1 \mid \cdots \mid \alpha'_{r'} \cdot v'_{r'} \mid 0 \mid \cdots \mid 0) \in M_{m\times m}(R).$$

Dann ist $\operatorname{im} L(A) = U = \operatorname{im} L(A')$. Zu $j \in \{1, \ldots, r\}$ gibt es also $w_j \in R^m$ mit $A' \cdot w_j = \alpha_j \cdot v_j$. Für $j \in \{r+1, \ldots, m\}$ setzen wir $w_j := 0$. Zusammengesetzt ergibt dies eine Matrix

$$T := (w_1 \mid \cdots \mid w_m) \in M_{m\times m}(R)$$

mit

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,m\}} \quad A' \cdot T = A$$

(die Spalten ...!). Also gilt (Lemma 2.5.10)

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,m\}} \quad D_j(A) = D_j(A' \cdot T) \subset D_j(A').$$

Indem wir die Rollen von A und A' vertauschen, erhalten wir auch die Inklusionen $D_j(A') \subset D_j(A)$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Wir übersetzen die Determinantenideale wieder zurück in Elementarteiler und erhalten so, dass $r = r'$ ist und dass α_j für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$ zu α'_j assoziiert ist. □

Anmerkung zum Lernen. Was besagt der Elementarteilersatz für Moduln im Fall von Vektorräumen? Wie haben wir dies in der Linearen Algebra I bewiesen?

Mit dem Chinesischen Restsatz können wir den Elementarteilersatz für Moduln wie folgt umformulieren:

Satz 2.5.16 (Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring und sei V ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primelemente $p_1, \ldots, p_k \in R$ und Zahlen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit*

$$V \cong_R R^d \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k\}} R/(p_j^{n_j}).$$

Dabei sind d, k, die Primelemente $p_1, \ldots, p_k$ (bis auf Assoziiertheit und Reihenfolge) und die zugehörigen Exponenten $n_1, \ldots, n_k$ eindeutig durch V bestimmt.

Beweis. Existenz der Zerlegung. Wir gehen wie im Beweis des Elementarteilersatzes für Untermoduln vor (alternativ könnte man ihn auch geschickt auf diese Situation anwenden): Da V endlich erzeugt ist, gibt es nach Korollar 2.5.3 Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ mit

$$V \cong_R R^m / \operatorname{im} L(A).$$

Nach dem Elementarteilersatz für Matrizen (Satz 2.5.7) gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so dass

$$B := S \cdot A \cdot T$$

in Smith-Normalform ist; seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R$ die Elementarteiler von A (bzw. B). Eine einfache Rechnung zeigt somit

$$\begin{aligned} V &\cong_R R^m / \operatorname{im} L(A) \\ &\cong_R R^m / \operatorname{im} L(B) && \text{(da } S \text{ und } T \text{ invertierbar sind)} \\ &\cong_R R^{m-r} \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,r\}} R/(\alpha_j). && \text{(nachrechnen)} \end{aligned}$$

Wir verwenden den Chinesischen Restsatz (Satz 2.4.34), um dies zur gewünschten Primpotenzform zu reorganisieren: Dazu zerlegen wir die Elementarteiler $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ in ihre Primfaktoren; dies ist möglich, da R als Hauptidealring faktoriell ist (Satz 2.4.22). Seien $q_1, \dots, q_\ell$ die in $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ auftretenden Primelemente; ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass $q_1, \dots, q_k$ paarweise nicht assoziiert sind bzw. dass $(q_s, q_t) = (1)$ für alle $s, t \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $s \neq t$ gilt. Ist $j \in \{1, \dots, r\}$, so schreiben wir

$$\alpha_j = \varepsilon_j \cdot q_1^{n_{j,1}} \cdot \dots \cdot q_\ell^{n_{j,\ell}}$$

mit $n_{j,1}, \dots, n_{j,k} \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_j \in R^\times$. Induktiv erhalten wir mit dem Chinesischen Restsatz (nachrechnen; dabei wird im Induktionsschritt die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung verwendet):

$$R/(\alpha_j) \cong_R \bigoplus_{s=1}^{\ell} R/(q_j^{n_{j,s}}) \cong_R \bigoplus_{s\in\{1,\dots,\ell\} \text{ mit } n_{j,s}\neq 0} R/(q_j^{n_{j,s}}).$$

Insgesamt liefert dies die gewünschte Beschreibung von V.

Eindeutigkeit der Terme in einer solchen Zerlegung. Wir skizzieren einen Beweis, der nur auf der bisher entwickelten Matrizen- und Modultheorie beruht. Mithilfe von geeigneten Quotientenkörpern und Tensorprodukten kann man auch einen Beweis führen, der das Problem in ein Dimensionsproblem von Vektorräumen übersetzt [2, Kapitel 6.3].

Sei etwa $V \cong_R R^{d'} \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k'\}} R/(p_j'^{n_k'})$ eine weitere solche Zerlegung. Insbesondere erhalten wir einen R-Modulisomorphismus

$$f\colon R^d \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k\}} R/(p_j^{n_j}) \longrightarrow R^{d'} \oplus \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k'\}} R/(p_j'^{n_j'})$$

- Dann gilt $d = d'$, denn: Die Komposition $R^d \longrightarrow R^{d'}$, die man aus f und der kanonischen Inklusion/Projektion erhält, ist injektiv (nachrechnen). Also ist $d' \leq d$ (Proposition 2.5.14). Mit dem Inversen von f erhält man $d \leq d'$. Also ist $d = d'$.

- Es gibt $s_1, \dots, s_k \in R^\times$ mit $\{s_1 \cdot p_1, \dots, s_k \cdot p_k\} = \{p_1', \dots, p_{k'}'\}$, denn: Ist $p \in R$ prim, so schreiben wir

  $$\operatorname{Tor}_1^R\big(V, R/(p)\big) := \{x \in V \mid p \cdot x = 0\} \subset V$$

  für den *p-Torsionsanteil von V*; dies ist ein Untermodul von V. Dann liefert f einen Isomorphismus (nachrechnen)

  $$\bigoplus_{j\in N_p} R/(p_j^{n_j}) \cong_R \operatorname{Tor}_1^R\big(V, R/(p)\big) \cong_R \bigoplus_{j\in N_p'} R/(p_j'^{n_j'}),$$

  wobei

  $$N_p := \big\{j \in \{1,\dots,k\} \;\big|\; p_j \text{ und } p \text{ sind assoziiert}\big\}$$
  $$N_p' := \big\{j \in \{1,\dots,k'\} \;\big|\; p_j' \text{ und } p \text{ sind assoziiert}\big\}.$$

  Damit folgt, dass N_p genau dann leer ist, wenn N_p' leer ist. Also stimmen $\{p_1, \dots, p_k\}$ und $\{p_1', \dots, p_{k'}'\}$ bis auf elementweise Assoziiertheit überein und wir können die p-Torsionsanteile einzeln untersuchen.

- Es gilt $k = k'$ und die Familien $((p_j, n_j))_{j\in\{1,\dots,k\}}$, $((p_j', n_j'))_{j\in\{1,\dots,k'\}}$ von Paaren stimmen bis auf die Reihenfolge und Assoziiertheit der Primelemente überein, denn: Nach dem letzten Schritt können wir ohne Einschränkung annehmen, dass nur ein einziger Primfaktor p auftritt. Wir betrachten also den Fall, dass ein R-Modulisomorphismus

  $$f\colon \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k\}} R/(p^{n_j}) \longrightarrow \bigoplus_{j\in\{1,\dots,k'\}} R/(p^{n_j'})$$

  vorliegt; dabei seien die Potenzen so sortiert, dass $n_1 \leq \dots \leq n_k$ und $n_1' \leq \dots \leq n_{k'}'$ gilt.

  Wir betrachten die Diagonalmatrizen

$$A := \begin{pmatrix} p^{n_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^{n_k} \end{pmatrix} \in M_{k\times k}(R) \quad \text{und} \quad A' := \begin{pmatrix} p^{n_1'} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p^{n_{k'}'} \end{pmatrix} \in M_{k'\times k'}(R).$$

$$\begin{array}{ccccc} R^k & \xrightarrow{L(A)} & R^k & \xrightarrow{\pi} & \bigoplus_{j=1}^{k} R/(p^{n_j}) \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \cong\downarrow{\scriptstyle f} \\ R^{k'} & \xrightarrow[L(A')]{} & R^{k'} & \xrightarrow[\pi']{} & \bigoplus_{j=1}^{k'} R/(p^{n'_j}) \end{array}$$

Abbildung 2.6.: Zerlegungen des p-Torsionsanteils eines Moduls

Da diese Matrizen in Smith-Normalform sind und p prim ist, genügt es also zu zeigen, dass diese beiden Matrizen dieselben Elementarteiler besitzen. Wir nutzen den Isomorphismus f, um diese Matrizen zu vergleichen:

Die kanonische Projektion $R^k \longrightarrow R^k/\operatorname{im} L(A)$ liefert einen surjektiven R-Modulhomomorphismus $\pi\colon R^k \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{k} R/(p^{n_j})$. Analog erhalten wir einen Epimorphismus $\pi'\colon R^k \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{k'} R/(p^{n'_j})$. Da f ein Isomorphismus ist, erhalten wir mit der universellen Eigenschaft des freien Moduls R^k Homomorphismen $g\colon R^k \longrightarrow R^{k'}$ und $h\colon R^k \longrightarrow R^{k'}$ mit

$$f \circ \pi = \pi' \circ g \quad \text{und} \quad g \circ L(A) = L(A') \circ h.$$

Betrachten wir den inversen Homomorphismus f' von f, so finden wir analog Homomorphismen $g', h'\colon R^{k'} \longrightarrow R^k$ mit

$$f' \circ \pi' = \pi \circ g' \quad \text{und} \quad g' \circ L(A') = L(A) \circ h'$$

(Abbildung 2.6).

Die Tatsache, dass f und f' invers zueinander sind, liefert zwar im allgemeinen *nicht*, dass g und g' invers zueinander sind, aber immerhin, dass sich die Kompositionen $g' \circ g$ und $g \circ g'$ nur um einen Homomorphismus mit Bild in $\operatorname{im} L(A)$ bzw. $\operatorname{im} L(A')$ von id_{R^k} bzw. $\mathrm{id}_{R^{k'}}$ unterscheiden. In anderen Worten: Schreiben wir

$$\begin{aligned} S &:= \big(g(e_1) \mid \cdots \mid g(e_k)\big) \in M_{k\times k'}(R) \\ S' &:= \big(g'(e_1) \mid \cdots \mid g'(e_{k'})\big) \in M_{k'\times k}(R) \\ T &:= \big(h(e_1) \mid \cdots \mid h(e_k)\big) \in M_{k\times k'}(R) \\ T' &:= \big(h'(e_1) \mid \cdots \mid h'(e_{k'})\big) \in M_{k'\times k}(R), \end{aligned}$$

so gibt es Matrizen $U \in M_{k\times k}(R)$ und $U' \in M_{k'\times k'}(R)$ mit

$$S' \cdot S = I_n + U \quad \text{und} \quad S \cdot S' = I_n + U'$$

und $\operatorname{im} L(U) \subset \operatorname{im} L(A)$, $\operatorname{im} L(U') \subset \operatorname{im} L(A')$. Nach Definition von A bzw. A' bedeutet dies insbesondere, dass alle Matrixeinträge von U bzw. U' durch p teilbar sind. Mit der Konstruktion der Determinante (oder der Leibnizformel) erhalten wir daher

$$\det(S' \cdot S) \in 1 + (p) \quad \text{und} \quad \det(S \cdot S') \in 1 + (p).$$

Dies hat zwei wichtige Konsequenzen: Erstens hat die Smith-Normalform von S bzw. S' keine Nullspalten; somit ist $k = k'$ und

$$\det S' \cdot \det S = \det(S' \cdot S) \in 1 + (p).$$

Zweitens ist keiner der Elementarteiler von S bzw. S' durch p teilbar.

Mit Lemma 2.5.10 und der Konstruktion von S und T erhalten wir

$$\forall_{j \in \{1,\dots,k=k'\}} \quad D_j(A') \supset D_j(A' \cdot T) = D_j(S \cdot A).$$

Alle Elementarteiler von A' sind also Teiler der entsprechenden Elementarteiler von $S \cdot A$. Nach Konstruktion von A' sind die Elementarteiler von A' genau die p-Potenzen $p^{n_1'}, \dots, p^{n_k'}$. Andererseits kann man mithilfe von Lemma 2.5.10 und der Smith-Normalform von S nachrechnen, dass eine p-Potenz p^m mit $m \in \mathbb{N}_{>0}$ nur dann ein Teiler eines Elementarteilers von $S \cdot A$ sein kann, wenn p^m den entsprechenden Elementarteiler von A teilt (da ja keiner der Elementarteiler von S durch p teilbar ist). Insgesamt folgt daher

$$\forall_{j \in \{1,\dots,k\}} \quad n_j' \leq n_j.$$

Analog erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung; also gilt $n_j' = n_j$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$, wie gewünscht. □

Insbesondere erhalten wir aus Satz 2.5.16 auch die Klassifikation der endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln (bzw. endlich erzeugten abelschen Gruppen):

Korollar 2.5.17 (Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen)**.** *Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primzahlen $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit*

$$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1,\dots,k\}} \mathbb{Z}/(p_j^{n_j}).$$

Dabei sind d, k, $p_1, \dots, p_k$ (bis auf die Reihenfolge) und $n_1, \dots, n_k$ eindeutig durch A bestimmt.

Beweis. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, können wir den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz 2.5.16) anwenden; man beachte dabei, dass jede Primzahl in $\mathbb{Z}$ zu genau einer Primzahl in $\mathbb{N}$ assoziert ist. □

Dieser Klassifikationssatz kann unter anderem dafür genutzt werden, endliche abelsche Gruppen zu klassifizieren. Dazu muss man nach Korollar 2.5.17 nur die Anzahl der Elemente der Gruppe in Primfaktoren zerlegen und überlegen, welche Kombinationsmöglichkeiten von Prim*potenzen* es gibt, um dasselbe Produkt zu erhalten.

Beispiel 2.5.18.

- Ist p prim, so gibt es bis auf Isomorphie genau eine abelsche Gruppe mit genau p Elementen, nämlich $\mathbb{Z}/p$.

  Genauer argumentiert man wie folgt: Es ist $\mathbb{Z}/p$ eine abelsche Gruppe mit genau p Elementen. Warum ist das bis auf Isomorphie die einzige Möglichkeit? Sei A eine abelsche Gruppe mit genau p Elementen; insbesondere ist A endlich erzeugt. Nach der Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen gibt es dann $d, k \in \mathbb{N}$, Primzahlen $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

  $$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1,\dots,k\}} \mathbb{Z}/p_j^{n_j}.$$

  Da A endlich ist, ist $d = 0$ und

  $$p = \#A = \prod_{j=1}^{k} \#\big(\mathbb{Z}/(p_j^{n_j})\big) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}.$$

  Da p prim ist, erhalten wir somit $k = 1$ und $p_1 = p$, $n_1 = 1$. Also bleibt in der direkten Summenzerlegung nur der Summand $\mathbb{Z}/p$ übrig, d.h. es ist $A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$.

- Es gibt bis auf Isomorphie genau eine abelsche Gruppe mit genau $10 = 2 \cdot 5$ Elementen, nämlich

  $$\mathbb{Z}/10 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/5.$$

- Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei abelsche Gruppen mit genau vier Elementen, nämlich (da $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$)

  $$\mathbb{Z}/4 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Anmerkung zum Lernen. Der Elementarteilersatz und der Klassifikationssatz der endlich erzeugten abelschen Gruppen treten regelmäßig im schriftlichen Staatsexamen auf. Es ist also sicher nicht verkehrt, diese Sätze (und ihre Anwendungen) gut zu beherrschen.

Unsere Hauptanwendung des Klassifikationssatzes (Satz 2.5.16) ist jedoch der Beweis der Existenz bzw. Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform für quadratische Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ (Kapitel 3).

3

Normalformen III: Die Jordansche Normalform

Wir beweisen mithilfe der Modultheorie aus Kapitel 2 den Satz über die Jordansche Normalform für Endomorphismen von endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

Dazu übersetzen wir die Begriffe über das Zerlegen von Endomorphismen in die Sprache der Moduln und erklären die Rolle des sogenannten Minimalpolynoms bzw. des charakteristischen Polynoms in diesem Kontext.

Außerdem lernen wir Verfahren kennen, um die Jordansche Normalform (und zugehörige Transformationen/Basen) zu bestimmen.

Überblick über dieses Kapitel.

3.1	Moduln zu Endomorphismen	116
3.2	Das Minimalpolynom	120
3.3	Die Jordansche Normalform	126

3.1 Moduln zu Endomorphismen

Wir wissen bereits, dass die Klassifikation von Endomorphismen von endlichdimensionalen Vektorräumen zur Klassifikation von quadratischen Matrizen bis auf Ähnlichkeit äquivalent ist (Kapitel I.6.5.1). Wir klassifzieren daher im folgenden quadratische Matrizen bis auf Ähnlichkeit. Genauer gesagt formulieren wir die Klassifikationsresultate für Matrizen, aber bei der Herleitung oft die Sprache der Endomorphismen verwenden – je nachdem, was in der gegebenen Situation bequemer ist.

Dazu analysieren wir zu einem Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$ von K-Vektorräumen den zugehörigen $K[T]$-Modul $V[f]$ (Proposition 2.3.6) mithilfe der Modultheorie über dem Hauptidealring $K[T]$.

3.1.1 Zerlegung von Endomorphismen: Modulversion

Als ersten Schritt überlegen wir uns, dass diese Modultheorie tatsächlich dazu geeignet ist, das vorliegende Klassifikationsproblem zu lösen.

Proposition 3.1.1 (Matrizenkalkül und Moduln)**.** *Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gilt $m = n$ und die Matrizen A und B sind ähnlich, d.h. es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.*
2. *Die $K[T]$-Moduln $K^m[L(A)]$ und $K^n[L(B)]$ sind isomorph.*

Beweis. Wir schreiben $f := L(A)$ und $g := L(B)$.

Sei $m = n$ und die Matrizen seien A und B ähnlich; sei etwa $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$. Mit $F := L(S^{-1})\colon K^n \longrightarrow K^n$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} F \circ f &= L(S^{-1}) \circ L(A) = L(S^{-1} \cdot A) = L(B \cdot S^{-1}) = L(B) \circ L(S^{-1}) \\ &= g \circ F. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.3.9 sind dann die $K[T]$-Moduln $K^n[f]$ und $K^n[g]$ isomorph.

Seien umgekehrt $K^m[L(A)]$ und $K^n[L(B)]$ isomorphe $K[T]$-Moduln, etwa durch einen $K[T]$-Isomorphismus $F\colon K^m[L(A)] \longrightarrow K^n[L(g)]$. Dann sind insbesondere die unterliegenden K-Vektorräume isomorph, und damit $m = n$. Die Matrix $S := M(F)^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ hat die Eigenschaft $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ (nach Proposition 2.3.9). Also sind A und B ähnlich. □

Mit dem folgenden Wörterbuch können wir außerdem die Zerlegung von Endomorphismen in die Zerlegung von Moduln übersetzen und umgekehrt:

Proposition 3.1.2 (Endomorphismenmodulnwörterbuch). *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

1. *Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist genau dann f-invariant, wenn U ein $K[T]$-Untermodul des $K[T]$-Moduls $V[f]$ ist.*
2. *Der K-Vektorraum V ist genau dann f-reduzibel, wenn der $K[T]$-Modul $V[f]$ zerlegbar ist.*
3. *Der K-Vektorraum V ist genau dann f-zyklisch, wenn der $K[T]$-Modul $V[f]$ zyklisch ist (d.h. als $K[T]$-Modul von einem Element erzeugt ist).*

Beweis. All diese Zusammenhänge kann man in wenigen Schritten aus den entsprechenden Definitionen ableiten (Übungsaufgabe). □

Aus dem Hauptsatz über endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen (in diesem Fall der Polynomring über dem Grundkörper; Korollar 2.4.9) erhalten wir:

Proposition 3.1.3 (Primzerlegung von Endomorphismenmoduln). *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.*

1. *Der Einsetzungshomomorphismus*

$$\begin{aligned} K[T] &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V,V) \\ p &\longmapsto p(f) \end{aligned}$$

   ist nicht *injektiv.*

   Mit anderen Worten: Es gibt ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $p(f) = 0$.

2. *Es gibt also $k \in \mathbb{N}$, Primpolynome $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit*

$$V[f] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k\}} K[T]/(p_j^{n_j})$$

   (und diese Daten sind bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit der Primpolynome eindeutig).

3. *Insbesondere gilt: Ist V ein f-irreduzibler Vektorraum, so ist V bereits f-zyklisch (und im Fall $V \ncong \{0\}$ gilt $V[f] \cong_{K[T]} K[T]/(p^n)$ für ein geeignetes Primpolynom p und ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_{>0}$).*

Beweis. Zu 1. Der K-Vektorraum $K[T]$ ist unendlich-dimensional, der Einsetzungshomomorphismus φ ist K-linear und der Endomorphismenraum $\operatorname{Hom}_K(V,V)$ ist endlich-dimensional (da V endlich-dimensional ist). Somit ist φ *nicht* injektiv. (Übungsaufgabe)

Zu 2. Wir wenden den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz 2.5.16) auf den $K[T]$-Modul $V[f]$ an (wegen $\dim_K V < \infty$ sieht man leicht, dass $V[f]$ als $K[T]$-Modul endlich erzeugt ist). Also gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primpolynome $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$V[f] \cong_{K[T]} K[T]^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1,\ldots,k\}} K[T]/(p_j^{n_j})$$

(und diese Daten sind bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit der Primpolynome eindeutig). Aus dem ersten Teil und der Konstruktion der $K[T]$-Modulstruktur auf $V[f]$ folgt, dass $d = 0$ ist. Somit erhalten wir die behauptete Beschreibung von $V[f]$.

Zu 3. Dies folgt aus der Beschreibung von $V[f]$ im zweiten Teil und dem Wörterbuch aus Proposition 3.1.2. □

3.1.2 Zerlegung von Endomorphismen: Matrizenversion

Bemerkung 3.1.4 (der allgemeine Klassifikationssatz für Matrizen)**.** Im Zusammenspiel von Proposition 3.1.3 mit Proposition 3.1.1 ergibt sich somit: Ist K ein Körper,

- ist $P \subset K[T]$ ein Repräsentantensystem der Primelemente in $K[T]$ modulo Assoziiertheit (ein solches existiert nach dem Auswahlaxiom) und
- ist $(A(p,n))_{p \in P, n \in \mathbb{N}_{>0}}$ eine Familie von Matrizen mit der Eigenschaft, dass der $K[T]$-Modul des Endomorphismus $L(A(p,n))$ zu $K[T]/(p^n)$ isomorph ist,

so ist jede quadratische Matrix über K zu einer Blockmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} A(p_1,n_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A(p_k,n_k) \end{pmatrix}$$

ähnlich, wobei $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in P$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$; diese Daten sind bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Eine Möglichkeit, Matrizen zu vorgegebenen zyklischen Moduln zu konstruieren, ist via der sogenannten Begleitmatrizen; zusammen mit Bemerkung 3.1.4 erhalten wir so eine Klassifikation von quadratischen Matrizen bis auf Ähnlichkeit über jedem gegebenen Grundkörper. Man beachte dabei jedoch, dass wir im Fall der komplexen Zahlen für Primpotenzen *nicht* die gewünschten Jordanblöcke als Matrizen erhalten, sondern andere Matrizen.

Proposition 3.1.5 (Begleitmatrizen). *Sei K ein Körper und sei $p = T^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot T^j \in K[T]$ (mit $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_m \in K$) ein normiertes Polynom. Dann hat die Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$$

(die sogenannte Begleitmatrix zu p*) die Eigenschaft, dass*

$$K^m\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} K[T]/(p).$$

Beweis. Man könnte den Beweis so führen, dass man zu A einfach den Modul $K^m[L(A)]$ bestimmt. Wir gehen jedoch umgekehrt vor, da dies auch erklärt, wie man überhaupt auf die Idee kommt, die obige Matrix A zu betrachten.

Allgemein gilt: Sei W ein $K[T]$-Modul und sei V der Vektorraum, den man aus W erhält, indem man nur Skalare aus K statt aus $K[T]$ operieren lässt. Dann ist

$$\begin{aligned} f\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto T \cdot x \end{aligned}$$

eine K-lineare Abbildung und $V[f] = W$ (nach Definition von $V[f]$).

Es genügt daher in unserem Fall von $W = K[T]/(p)$ zu zeigen, dass es eine K-Basis B des unterliegenden K-Vektorraums V mit $M_{B,B}(f) = A$ gibt (unter Verwendung von Proposition 2.3.9 bzw. 3.1.1). Dazu betrachten wir die Familie

$$B := \big([T^0], [T^1], \ldots, [T^{m-1}]\big)$$

in V. Diese Familie ist eine K-Basis von V, denn:

- Es ist $\mathrm{Span}_K B = V$, denn: Sei $q \in K[T]$. Durch Division mit Rest durch p erhalten wir $r, s \in K[T]$ mit $q = s \cdot p + r$ und $\deg r < \deg p = m$. Also erhalten wir in $K[T]/(p)$, dass

  $$[q] = [s \cdot p + r] = [r].$$

  Wegen $\deg r \leq m - 1$ ist dabei $[r] \in \mathrm{Span}_K B$.

- Die Familie B ist über K linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} \in K$ mit (in $K[T]/(p)$)

$$0 = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \cdot [T^j] = \left[\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \cdot T^j\right].$$

Also ist $\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \cdot T^j \in (p) = K[T] \cdot p$. Wegen $\deg p = m$ ist daher $\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \cdot T^j = 0$, und damit $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$.

Also ist B eine K-Basis von V.

An der Matrix A liest man leicht ab (die Spalten ...!), dass

$$M_{B,B}(f) = A$$

gilt; für die letzte Spalte verwendet man dabei, dass im Quotientenmodul $K[T]/(p)$ die Gleichung

$$\left[f(T^{m-1})\right] = [T \cdot T^{m-1}] = [T^m] = [T^m - p] = \left[-\sum_{j=1}^{m-1} a_j \cdot T^j\right]$$

gilt. □

Im Falle des Grundkörpers $\mathbb{C}$ müssen wir also

- alle Primpolynome in $\mathbb{C}[T]$ beschreiben und
- den Zusammenhang von Primpotenzen und Jordanblöcken verstehen.

Außerdem untersuchen wir, wie man für eine gegebene Matrix diese Zerlegung in Blöcke berechnen kann.

3.2 Das Minimalpolynom

Um zu verstehen, welche Polynome bei den zyklischen Anteilen eines gegebenen Endomorphismus auftreten und wie man diese berechnen kann, bietet es sich an, das Minimalpolynom von Endomorphismen/Matrizen genauer zu betrachten:

Proposition 3.2.1 (das Minimalpolynom eines Endomorphismus)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es genau ein normiertes Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ minimalen Grades mit $p(f) = 0$. Das Polynom p wird als* Minimalpolynom μ_f von f *bezeichnet.*

Beweis. Der Einsetzungshomomorphismus $\varphi\colon K[T] \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,V)$ zu f ist *nicht* injektiv (Proposition 3.1.3). Also ist das Ideal $\ker\varphi \subset K[T]$ *nicht* das Nullideal. Da $K[T]$ ein Hauptidealring ist, gibt es somit ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $(p) = \ker\varphi$; indem wir durch den höchsten Koeffizienten

dividieren, können wir annehmen, dass p normiert ist. Wegen $(p) = \ker \varphi$ ist insbesondere $p(f) = 0$.

Es bleiben Eindeutigkeit und Minimalität zu zeigen: Ist $q \in K[T] \setminus \{0\}$ ein normiertes Polynom mit $q(f) = 0$, so ist $q \in \ker \varphi$. Also gibt es ein $s \in K[T]$ mit

$$q = s \cdot p.$$

Wegen $q \neq 0$ ist $s \neq 0$. Mit der Additivität des Grades folgt

$$\deg q = \deg(s \cdot p) = \deg s + \deg p \geq \deg p;$$

Gleichheit liegt dabei genau dann vor, wenn $s =$? ist (Normiertheit von p und q). Dies zeigt die Minimalität des Grades von p und die Eindeutigkeit. □

Beispiel 3.2.2 (Minimalpolynom von Streckungen)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $V \ncong_K \{0\}$, sei $\lambda \in K$ und sei $f := \lambda \cdot \mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$. Dann ist

$$\mu_f = \text{?} \quad ,$$

denn: Es gilt $(T-\lambda)(f) = f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V = 0$, das Polynom $T - \lambda$ ist normiert und es gibt (wegen $\deg(T - \lambda) = 1$ und $V \ncong_K \{0\}$) kein normiertes Polynom p kleineren Grades mit $p(f) = 0$.

Bemerkung 3.2.3 (Minimalpolynom einer Matrix)**.** Sei K ein Körper, sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$. Dann nennt man

$$\mu_A := \mu_{L(A)} \in K[T]$$

das *Minimalpolynom von* A. Nach Konstruktion ist dabei klar, dass ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom besitzen (Konjugationstrick).

Rezept 3.2.4 (Bestimmung des Minimalpolynoms durch lineare Gleichungssysteme)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann liefert der Beweis von Proposition 3.2.1 das folgende Verfahren, um das Minimalpolynom $\mu_A \in K[T]$ zu bestimmen:

- Man berechnet induktiv die Potenzen $A^0, A^1, A^2, \ldots$ (so weit wie nötig).
- Man bestimmt die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die Familie $(A^0, A^1, \ldots, A^m)$ in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ über K linear abhängig ist (dies kann durch Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren überprüft werden).
- Man bestimmt (z.B. mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren) Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m \in K$ (die nicht alle 0 sind) mit

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot A^j = 0.$$

Aufgrund der Minimalität von m ist $a_m \neq 0$; dann ist

$$\mu_f = T^m + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j}{a_m} \cdot T^j \in K[T].$$

In der Praxis verwendet man häufig auch die folgende Beschreibung des Minimalpolynoms (vor allem im Zusammenspiel mit dem Satz von Cayley–Hamilton (Satz 3.2.12; Rezept 3.2.13)):

Proposition 3.2.5 (alternative Beschreibung des Minimalpolynoms)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist $p \in K[T]$ ein normiertes Polynom mit $p(f) = 0$ und gilt für alle Teiler $q \in K[T]$ von p mit $\deg q < \deg p$, dass $q(f) \neq 0$ ist, so ist p das Minimalpolynom von f.*

Beweis. Wegen $p(f) = 0$ ist (Division mit Rest oder Idealargument) μ_f ein Teiler von p. Nach Voraussetzung ist somit $\deg \mu_f \geq \deg p$. Da p normiert ist, folgt aus der Minimalität des Minimalpolynoms $p = \mu_f$. □

Beispiel 3.2.6 (Jordanblöcke)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda \in K$. Der Jordanblock

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

hat das Minimalpolynom $(T-\lambda)^n$, denn: Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \quad \big((T-\lambda)^n\big)\big(J_n(\lambda)\big) = \big(J_n(\lambda) - \lambda \cdot I_n\big)^k = 0 \Longleftrightarrow k \geq n$$

gilt (die Matrix $J_n(\lambda) - \lambda \cdot I_n$ trägt auf der Nebendiagonalen Einsen und sonst nur Nullen; wächst der Exponent um 1, so wandert diese Einserreihe eine Stufe weiter nach oben; nachrechnen). Mit Proposition 3.2.5 folgt daher

$$\mu_{J_n(\lambda)} = (T-\lambda)^n.$$

Beispiel 3.2.7 (Kombination zweier Blöcke)**.** Sei K ein Körper, seien $k, m \in \mathbb{N}$, seien $B \in \mathrm{M}_{k\times k}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$. Dann betrachten wir die Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

mit $n := k + m$. Mit Proposition 3.2.5 folgt, dass das Minimalpolynom μ_A das (normierte) kleinste gemeinsame Vielfache von μ_B und μ_C ist (Übungsaufgabe).

Beispiel 3.2.8 (Rotationsmatrix)**.** Sei

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

die Rotationsmatrix zur Rotation um $\pi/2$. Dann ist

$$(T^2 + 1)(R) = \boxed{?}$$

Da das Polynom T^2+1 normiert und in $\mathbb{R}[T]$ irreduzibel ist, gilt $\mu_R = T^2+1$ (Proposition 3.2.5; alternativ kann man auch über die Minimalität des Grades argumentieren).

Im zyklischen Fall weiß das Minimalpolynom alles über den zu einem Endomorphismus gehörenden Modul über dem Polynomring:

Proposition 3.2.9 (Minimalpolynome zyklischer Endomorphismen)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist V ein f-zyklischer K-Vektorraum, so gilt*

$$V[f] \cong_{K[T]} K[T]/(\mu_f).$$

Beweis. Da V als f-zyklisch vorausgesetzt ist, gibt es ein $v \in V$, für das der $K[T]$-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\colon K[T] &\longrightarrow V[f] \\ p &\longmapsto p \cdot v = \big(p(f)\big)(v) \end{aligned}$$

surjektiv ist. Wegen $\mu_f(f) = 0$ induziert dieser nach der universellen Eigenschaft des Quotientenmoduls $K[T]/(\mu_f)$ (Satz 2.3.20) einen wohldefinierten, surjektiven $K[T]$-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\colon K[T]/(\mu_f) &\longrightarrow V[f] \\ [p] &\longmapsto p \cdot v. \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\overline{\varphi}$ auch injektiv bzw., dass $\ker\varphi \subset (\mu_f)$, ist.

Sei $p \in \ker\varphi$. Also ist $p \cdot v = 0$. Daher gilt auch

$$\forall_{q\in K[T]} \quad 0 = q \cdot p \cdot v = p \cdot q \cdot v = p \cdot \varphi(q).$$

Da φ surjektiv ist, liefert dies

$$\forall_{x\in V} \quad 0 = p \cdot x = \big(p(f)\big)(x),$$

und damit $p(f) = 0$. Daher ist μ_f ein Teiler von p (Division mit Rest; Beweis von Proposition 3.2.5) bzw. $p \in (\mu_f)$. Somit ist $\ker \varphi \subset (\mu_f)$, wie gewünscht. □

Beispiel 3.2.10 (Moduln zu Jordanblöcken)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$K^n\big[J_n(\lambda)\big] \cong_{K[T]} K[T]/\big((T-\lambda)^n\big),$$

denn: Sei $f := L(J_n(\lambda))\colon K^n \longrightarrow K^n$. Der K-Vektorraum K^n ist f-zyklisch, denn

$$K^n = \mathrm{Span}_K\{e_1, \ldots, e_n\} = \mathrm{Span}_K\big\{e_n, f(e_n), \ldots, f^{n-1}(e_n)\big\}.$$

Wegen $\mu_f = (T-\lambda)^n$ (Beispiel 3.2.6) folgt die Behauptung aus Proposition 3.2.9.

Beispiel 3.2.11 (Minmalpolynom der Begleitmatrix)**.** Sei K ein Körper, sei $p \in K[T] \setminus K$ ein normiertes Polynom vom Grad m und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ die Begleitmatrix zu p. Dann ist $\mu_A = p$, denn: Sei $f := L(A)\colon K^m \longrightarrow K^m$. Nach Proposition 3.1.5 ist $K^m[f] \cong_{K[T]} K[T]/(p)$; somit ist K^m insbesondere f-zyklisch (Proposition 3.1.2) und mit Proposition 3.2.9 erhalten wir

$$K[T]/(p) \cong_{K[T]} K^m[f] \cong_{K[T]} K[T]/(\mu_A).$$

Wir faktorisieren p bzw. μ_A in Primpotenzen und wenden den chinesischen Restsatz sowie den Klassifikationssatz für endlich erzeugte Moduln über dem Hauptidealring $K[T]$ an. Dann liefert die Eindeutigkeitssausage, dass p und μ_A assoziiert sind; da beide Polynome normiert sind, folgt bereits $p = \mu_A$.

Alternativ kann man nachrechnen, dass $p(A) = 0$ ist und es kein Polynom $q \in K[T] \setminus K$ mit $\deg q < m$ und $q(A) = 0$ gibt.

Mithilfe der Begleitmatrizen und dem allgemeinen Klassifikationssatz für Matrizen (Bemerkung 3.1.4) erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom; wir formulieren den Satz nur für Matrizen; er gilt analog auch für Endomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen.

Satz 3.2.12 (der Satz von Cayley–Hamilton)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann gilt:*

1. *Das Minimalpolynom μ_A ist ein Teiler (in $K[T]$) des charakteristischen Polynoms χ_A.*
2. *Jeder Primfaktor von χ_A tritt auch in μ_A auf.*
3. *Insbesondere haben χ_A und μ_A dieselben Nullstellen.*

Beweis. Nach dem allgemeinen Klassifikationssatz (Bemerkung 3.1.4) und Proposition 3.1.5 gibt es $k \in \mathbb{N}$ und Primpotenzen $q_1, \dots, q_k \in K[T]$, so dass A zu der Blockmatrix

$$B := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

ähnlich ist, wobei $A_1, \dots, A_k$ die Begleitmatrizen zu $q_1, \dots, q_k$ sind. Wir können daher das charakteristische Polynom bzw. das Minimalpolynom von A durch die entsprechenden Polynome der Begleitmatrizen ausdrücken: Einerseits ist

$$\begin{aligned} \chi_A &= \chi_B && \text{(Ähnlichkeitsinvarianz des charakteristischen Polynoms)} \\ &= \prod_{j=1}^{k} \chi_{A_j} && \text{(charakteristisches Polynom von Blockmatrizen)} \\ &= \prod_{j=1}^{k} q_j. && \text{(nachrechnen)} \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mu_A &= \mu_B && \text{(Ähnlichkeitsinvarianz des Minimalpolynoms)} \\ &= \mathrm{kgV}(\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_k}) && \text{(Minimalpolynom von Blockmatrizen} \\ &= \mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_k). && \text{(Beispiel 3.2.11)} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet kgV hier das normierte kleinste Vielfache der angegebenen Polynome.

Insbesondere ist μ_A ein Teiler von χ_A und alle Primfaktoren von χ_A treten auch in μ_A auf. Die Aussage über die Nullstellen folgt daraus mit Proposition 2.4.14 und der Tatsache, dass Polynome vom Grad 1 in $K[T]$ prim sind. □

Rezept 3.2.13 (Bestimmung des Minimalpolynoms über das charakteristische Polynom)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann liefert der Satz von Cayley–Hamilton zusammen mit Proposition 3.2.5 das folgende Verfahren, um das Minimalpolynom $\mu_A \in K[T]$ zu bestimmen (das vor allem für „kleine“ Matrizen von Hand oft gut angewendet werden kann):

- Man berechnet $\chi_A = \det(T \cdot I_n - A) \in K[T]$.
- Man bestimmt die (normierte) Primfaktorzerlegung von χ_A in $K[T]$ (das ist im allgemeinen ein algorithmisch schwieriger Schritt!).

- Man sucht den (normierten) Teiler p kleinsten Grades von χ_A, der $p(A) = 0$ erfüllt, indem man entsprechende Potenzen der Primfaktoren von χ_A multipliziert. Nach Satz 3.2.12 gibt es einen solchen Teiler und nach Proposition 3.2.5 gilt $p = \mu_A$. Man beachte dabei, dass jeder Primfaktor von χ_A auch mindestens einmal in μ_A auftreten muss!

Proposition 3.2.14 (Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Matrix A ist diagonalisierbar.*
2. *Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und (paarweise) verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ mit*

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j).$$

Beweis. Ist A diagonalisierbar, so kann man μ_A mithilfe der Konjugationsinvarianz berechnen.

Hat umgekehrt μ_A die angegebene Gestalt, so kann man wie beim Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton vorgehen, um auf Diagonalisierbarkeit zu schließen (Übungsaufgabe). □

3.3 Die Jordansche Normalform

Als Spezialfall der allgemeinen Klassifikationstheorie, die wir bereits entwickelt haben, erhalten wir die Jordansche Normalform. Dabei werden wir die Jordansche Normalform in der folgenden Formulierung behandeln; den Begriff des algebraisch abgeschlossenen Körpers führen wir in Kapitel 3.3.1 genauer ein.

Satz 3.3.1 (Jordansche Normalform)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper (z.B. $\mathbb{C}$). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die Eigenwerte von A und seien*

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,r\}} \quad n_j := \dim_K \mathrm{Eig}_{\lambda_j}(A)$$

die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A. Dann gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, r\}$ eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen

$$m_{j,1} \leq \cdots \leq m_{j,n_j}$$

mit der Eigenschaft, dass A zu der Blockmatrix in Abbildung 3.1, bestehend aus den Jordanblöcken

$$J_{m_{1,1}}(\lambda_1), \ldots, J_{m_{1,n_1}}(\lambda_1), J_{m_{2,1}}(\lambda_2), \ldots, J_{m_{r,n_r}}(\lambda_r),$$

ähnlich ist (in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$*). Diese Jordan-Normalform von* A *ist bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig durch* A *bestimmt. Dabei gilt*

$$\chi_A = \prod_{j=1}^{r} (T-\lambda_j)^{\sum_{k=1}^{n_j} m_{j,k}},$$

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{r} (T-\lambda_j)^{\max\{m_{j,k} \mid k\in\{1,\ldots,n_j\}\}},$$

$$K^n[L(A)] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,r\}} \bigoplus_{k\in\{1,\ldots,n_j\}} K[T]/\big((T-\lambda_j)^{m_{j,k}}\big).$$

Insbesondere ist das Minimalpolynom μ_f *ein Teiler des charakteristischen Polynoms* χ_f *und die Polynome* μ_f *und* χ_f *haben dieselben Nullstellen (in* K*).*

Bevor wir den Beweis von Satz 3.3.1 in Kapitel 3.3.2 geben, betrachten wir zunächst die Aussage des Satzes etwas genauer:

- Nach Satz 3.3.1 bilden die Eigenwerte, geometrischen Vielfachheiten und die Größen der Jordanblöcke zu den entsprechenden Eigenwerten zusammen eine vollständige Invariante für $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$/Ähnlichkeit.

- Bei einer diagonalisierbaren Matrix haben alle Jordanblöcke das Format 1×1. Umgekehrt zeigt der obige Satz, in welchem Sinne jede Matrix in $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ „fast“ diagonalisierbar ist.

- Der letzte Absatz des Satzes 3.3.1 ist ein Spezialfall des Satzes von Cayley–Hamilton.

Bemerkung 3.3.2 (Was wissen charakteristisches Polynom und Minimalpolynom über die Jordansche Normalform?)**.** Was kann man aus dem charakteristischen Polynom bzw. Minimalpolynom über die Jordansche Normalform ablesen? Nach Satz 3.3.1 gilt folgendes:

- Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (und damit auch des Minimalpolynoms) sind die Eigenwerte der Matrix.

- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts gibt die Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert an.

- Die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwerts (also die Vielfachheit dieser Nullstelle im charakteristischen Polynom) gibt die Summe der Größen der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert an.

- Die Vielfachheit einer Nullstelle im Minimalpolynom gibt an, wie groß der größte Jordanblock zu diesem Eigenwert ist.

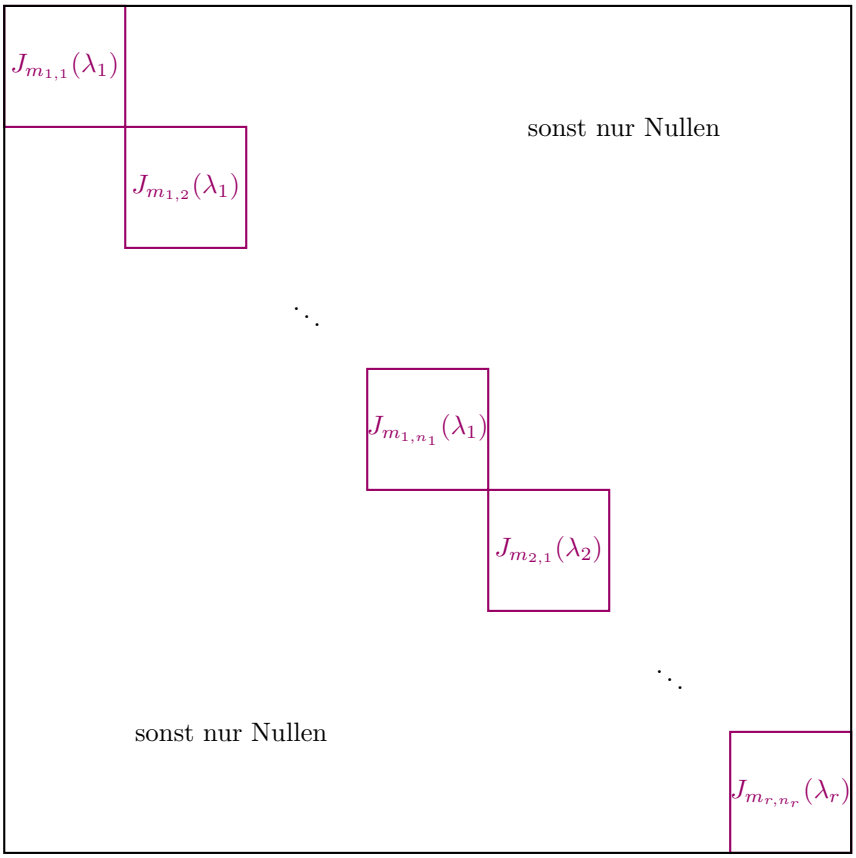


Abbildung 3.1.: Jordansche Normalform

Caveat 3.3.3. Die Jordansche Normalform lässt sich im allgemeinen *nicht* allein aus dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom ablesen! Zum Beispiel haben die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ dasselbe charakteristische Polynom (nämlich ?) und dasselbe Minimalpolynom (nämlich ?), aber verschiedene Jordansche Normalformen.

3.3.1 Vorbereitung: Algebraisch abgeschlossene Körper

Wir erklären zunächst den Begriff des algebraisch abgeschlossenen Körpers etwas genauer und bestimmen insbesondere alle Primpolynome über algebraisch abgeschlossenen Körpern.

Definition 3.3.4 (algebraisch abgeschlossen)**.** Ein Körper K ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes Polynom in $K[T]$ vom Grad mindestens 1 mindestens eine Nullstelle in K besitzt.

Beispiel 3.3.5.

1. Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen (nach dem Fundamentalsatz der Algebra; Satz I.6.4.8).
2. Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind *nicht* algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom T^2+1 in $\mathbb{R}[T]$ (bzw. $\mathbb{Q}[T]$) hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{Q}$).
3. Der Körper $\mathbb{F}_2$ ist *nicht* algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom $T^2 + T + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$.

   Allgemeiner gilt: Ist K ein endlicher Körper, so ist K *nicht* algebraische abgeschlossen, denn: Das Polynom

   $$p := \prod_{\lambda \in K} (T - \lambda) + 1 \in K[T]$$

   hat Grad mindestens 1 und wegen

   $$\forall_{x \in K} \quad p(x) = \prod_{\lambda \in K} (x - \lambda) + 1 = (x - x) \cdot \prod_{\lambda \in K \setminus \{x\}} (x - \lambda) + 1 = 0 + 1$$

   keine Nullstelle in K.

Ausblick 3.3.6 (algebraischer Abschluss)**.** Sei K ein Körper. Im Rahmen der Algebra-Vorlesung werden wir sehen, dass es einen „kleinsten“ algebraisch abgeschlossenen Körper L gibt, der K enthält; dies ist der sogenannte *algebraische Abschluss von* K. Zum Beispiel ist $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3.7 (Primpolynome in algebraisch abgeschlossenen Körpern)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ist $p \in K[T]$ prim und normiert, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $p = T - \lambda$.*

Beweis. Sei $p \in K[T]$ prim und normiert; insbesondere ist $\deg p \geq 1$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $\lambda \in K$ mit $p(\lambda) = 0$. Daher ist $T - \lambda$ ein Teiler von p in $K[T]$ (Proposition 2.4.14). Da p als Primelement irreduzibel ist und $T - \lambda$ (aus Gradgründen) keine Einheit ist, gibt es eine Einheit $s \in K[T]$ mit $p = s \cdot (T - \lambda)$. Wegen $K[T]^\times = K^\times$ (aus Gradgründen) und der Normiertheit von p folgt $s = 1$ bzw. $p = T - \lambda$. □

3.3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform

Mit den bereits geleisteten Vorarbeiten ist es nicht schwer, den Satz über die Jordansche Normalform zu beweisen. Wir verwenden dazu die folgende Strategie (die wir auch bereits in Bemerkung 3.1.4 und Satz 3.2.12 erfolgreich eingesetzt haben):

- Wir zerlegen den $K[T]$-Modul $K^n[L(A)]$ in zyklische Summanden zu Primpotenzen und sortieren diese Zerlegung geeignet.
- Wir zeigen, dass eine entsprechende Matrix J in Jordan-Normalform einen dazu isomorphen $K[T]$-Modul liefert und wenden dann Proposition 2.3.9 an, um zu schließen, dass A und J ähnlich sind.
- An J kann man ohne Schwierigkeiten das charakteristische und das Minimalpolynom ablesen.

Beweis von Satz 3.3.1. *Existenz der Jordanschen Normalform:* Nach der Primzerlegung von Endomorphismenmoduln (Proposition 3.1.3) gibt es (im wesentlichen eindeutige) $k \in \mathbb{N}$, Primelemente $p_1, \ldots, p_k \in K[T]$ und Zahlen $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,k\}} K[T]/(p_j^{m_j}).$$

Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass $p_1, \ldots, p_k$ normiert sind. Da der Körper K als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt ist, gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein $\nu_j \in K$ mit $p_j = T - \nu_j$ (Proposition 3.3.7).

Indem wir die obige direkte Summe nach gleichen Primfaktoren umsortieren, erhalten wir also: Es gibt (eindeutige) $r \in \mathbb{N}$, verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, Zahlen $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}_{>0}$ und zu jedem $j \in \{1, \ldots, r\}$ eindeutig bestimmte positive natürliche Zahlen

$$m_{j,1} \leq \cdots \leq m_{j,n_j}$$

mit

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,r\}} \bigoplus_{k\in\{1,\ldots,n_j\}} K[T]/\big((T-\lambda_j)^{m_{j,k}}\big).$$

Sei J die Jordanblock-Matrix aus Abbildung 3.1. Mit dem Wörterbuch und den Moduln zu Jordanblöcken (Beispiel 3.2.10) folgt, dass auch

$$K^n\big[L(J)\big] \cong_{K[T]} \bigoplus_{j\in\{1,\ldots,r\}} \bigoplus_{k\in\{1,\ldots,n_j\}} K[T]/\big((T-\lambda_j)^{m_{j,k}}\big)$$

gilt; insbesondere ist

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} K^n\big[L(J)\big].$$

Also ist die Matrix A zu J ähnlich in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ (Proposition 3.1.1).

Wir lesen die Kenndaten von J ab:

- Die Matrix J hat genau die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und die geometrische Vielfachheit von λ_j ist n_j.
- Es gilt (nachrechnen)

$$\chi_J = \prod_{j=1}^{r} (T - \lambda_j)^{\sum_{k=1}^{n_j} m_{j,k}}$$

- Mit Beispiel 3.2.7 und Beispiel 3.2.6 erhalten wir außerdem

$$\mu_J = \prod_{j=1}^{r} (T - \lambda_j)^{\max\{m_{j,k} | k \in \{1,\ldots,n_j\}\}}.$$

Da A und J ähnlich sind, hat A dieselben Eigenwerte und geometrischen Vielfachheiten wie J und es gilt $\chi_A = \chi_J$ bzw. $\mu_A = \mu_J$.

Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform: Ist $J' \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ in Jordan-Normalform und ähnlich zu A, so folgt

$$K^n[L(J')] \cong_{K[T]} K^n[L(A)] \cong_{K[T]} K^n[L(J')].$$

Dabei korrespondieren die Jordanblöcke von J' zur Primzerlegung des $K[T]$-Moduls $K^n[L(J')]$ (und damit zu der von $K^n[L(J)]$). Mit der Eindeutigkeitsaussage aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte $K[T]$-Moduln (Satz 2.5.16) folgt daher, dass J' und J genau aus denselben Jordanblöcken (bis auf die Reihenfolge) bestehen. Damit ist Satz 3.3.1 vollständig bewiesen. □

Bemerkung 3.3.8 (allgemeinere Grundkörper)**.** Die Voraussetzung, dass der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist, ging nur bei der Beschreibung der Primpolynome ein. Mit ähnlichen Methoden kann man die folgende Verallgemeinerung zeigen: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit der Eigenschaft, dass alle Primfaktoren von χ_A in $K[T]$ vom Grad 1 sind, so ist A in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ zu einer Matrix in Jordan-Normalform ähnlich.

Die Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform beruht im obigen Satz auf der Eindeutigkeit im Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen. Bei der Beschreibung der Berechnung der Jordanschen Normalform werden wir einen alternativen Beweis für die Eindeutigkeit kennenlernen (Bemerkung 3.3.11).

3.3.3 Berechnung der Jordanschen Normalform

Wir erklären, wie man die Jordansche Normalform einer gegebenen Matrix bestimmen kann. Dabei geht wesentlich die folgende Beobachtung über verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten ein:

Definition 3.3.9 (verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Für $s \in \mathbb{N}$ definieren wir dann

$$a_{\lambda,s}(A) := \dim_K V\big((A-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big) \in \mathbb{N}.$$

Die gewöhnliche geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ einer Matrix A ist in dieser Notation also $a_{\lambda,1}(A)$.

Proposition 3.3.10 (verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten und Jordansche Normalform)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.*

1. *Sind $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K))$ ähnlich, so gilt für alle $\lambda \in \sigma_K(A) = \sigma_K(B)$ und alle $s \in \mathbb{N}$, dass*
$$a_{\lambda,s}(A) = a_{\lambda,s}(B).$$
2. *Ist $J \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ in Jordan-Normalform, ist $\lambda \in \sigma_K(J)$ und $s \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist*
$$2\cdot a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J) - a_{\lambda,s+1}(J).$$
die Anzahl der Jordanblöcke von J der Größe s zum Eigenwert λ.
3. *Ist K algebraisch abgeschlossen und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, so gilt für alle $\lambda \in \sigma_K(A)$ und alle $s \in \mathbb{N}_{>0}$, dass*
$$2\cdot a_{\lambda,s}(A) - a_{\lambda,s-1}(A) - a_{\lambda,s+1}(A).$$
die Anzahl der Jordanblöcke der Jordanschen Normalform von A der Größe s zum Eigenwert λ ist.

Beweis. Zu 1. Sei $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = S^{-1}\cdot A\cdot S$. Dann ist (Konjugationstrick und Invertierbarkeit von S)

$$\begin{aligned}
a_{\lambda,s}(B) &= \dim_K V\big((B-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big)\\
&= \dim_K V\big((S^{-1}\cdot A\cdot S-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big)\\
&= \dim_K V\big((S^{-1}\cdot (A-\lambda\cdot I_n)\cdot S)^s, 0\big)\\
&= \dim_K V\big((S^{-1}\cdot (A-\lambda\cdot I_n)^s\cdot S, 0\big)\\
&= \dim_K S^{-1}\cdot V\big((A-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big)\\
&= \dim_K V\big((A-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big)\\
&= a_{\lambda,s}(A).
\end{aligned}$$

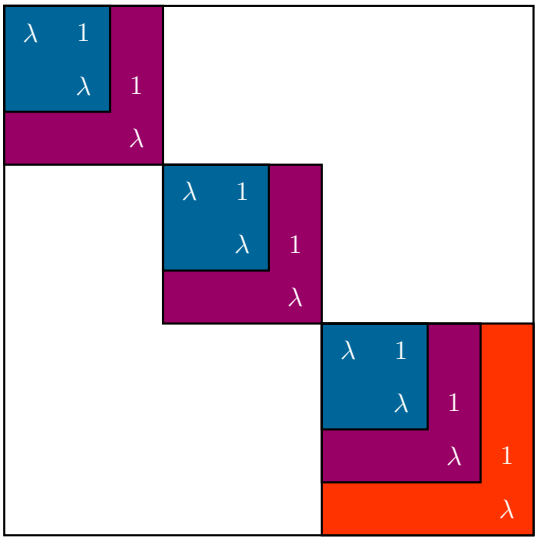


Abbildung 3.2.: Verallgemeinerte geometrische Vielfachheiten und Größe von Jordanblöcken von Matrizen in Jordan-Normalform: Sei $s = 3$. Der blaue Bereich trägt zu $a_{\lambda,s-1}(J)$ bei, der violette Bereich trägt zu $a_{\lambda,s}(J)$ aber nicht zu $a_{\lambda,s-1}(J)$ bei, der rote Bereich trägt zu $a_{\lambda,s+1}(J)$ aber nicht zu $a_{\lambda,s}(J)$ bei.

Zu 2. Die Familie aller Spalten von J, die jeweils zu den ersten s Spalten der λ-Jordanblöcke von J gehören, bildet eine Basis von $V((J - \lambda \cdot I_n)^s, 0)$. (Dies kann man direkt nachrechnen und ist ähnlich zu Beispiel 3.2.6).

Die Anzahl der Jordanblöcke von J der Größe mindestens s ist daher $a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J)$. Somit ergibt sich für die Anzahl der Jordanblöcke von J der Größe genau s (Abbildung 3.2):

$$\begin{aligned} &\big(a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J)\big) - \big(a_{\lambda,s+1}(J) - a_{\lambda,s}(J)\big) \\ &= 2 \cdot a_{\lambda,s}(J) - a_{\lambda,s-1}(J) - a_{\lambda,s+1}(J). \end{aligned}$$

Zu 3. Nach Satz 3.3.1 wissen wir, dass es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Matrix $J \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ in Jordan-Normalform mit

$$J = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

gibt. Da das charakteristische Polynom und die verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten von A und der dazu ähnlichen Matrix J übereinstimmen nach dem ersten Teil übereinstimmen, genügt es sich zu überlegen, dass das obige Verfahren, angewendet auf J, das richtige Ergebnis liefert. Dies liefert der zweite Teil. □

Bemerkung 3.3.11 (Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform)**.** Die Beschreibung der Anzahl der Jordanblöcke aus Proposition 3.3.10 liefert außerdem einen alternativen Beweis der *Eindeutigkeit* der Jordanschen Normalform einer Matrix: die Anzahlen/Größen der Jordanblöcke können nämlich direkt aus dem verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten bestimmt werden.

Rezept 3.3.12 (Berechnung der Jordanschen Normalform)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

- *Gesucht* sei die Jordansche Normalform von A (d.h. eine Matrix in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu A ist).

- *Rezept:* Man bestimmt zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[T]$ von A. Als nächstes bestimmt man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (dies ist im allgemeinen algorithmisch nur näherungsweise möglich!); diese Menge stimmt mit der Menge $\sigma_K(A)$ der Eigenwerte von A überein. Außerdem ist es hilfreich, an dieser Stelle auch die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A zu bestimmen; dies liefert eine Faktorisierung

  $$\chi_A = \prod_{\lambda\in\sigma_K(A)} (T-\lambda)^{m_\lambda},$$

  was bereits eine erste Orientierung über das Aussehen der Jordanschen Normalform von A liefert (Bemerkung 3.3.2).

  Man betrachtet im folgenden die Eigenwerte einzeln und führt jeweils das folgende Verfahren durch: Sei $\lambda \in \sigma_K(A)$. Für alle $s \in \{1,\dots,m_\lambda\}$ bestimmt man

  $$a_{\lambda,s}(A) = \dim_K V\big((A-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big)$$

  mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren; nach Definition ist dabei $a_{\lambda,0}(A) = 0$. Dann ist

  $$2\cdot a_{\lambda,s}(A) - a_{\lambda,s-1}(A) - a_{\lambda,s+1}(A)$$

  die Anzahl der Jordanblöcke der Größe s zum Eigenwert λ in der Jordanschen Normalform für A.

- *Begründung:* Dass dieses Verfahren funktioniert, ist Inhalt von Proposition 3.3.10.

Beispiel 3.3.13 (Berechnung der Jordanschen Normalform einer Matrix)**.** Wir bestimmen im folgenden die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

mit dem Verfahren aus Rezept 3.3.12:

- *Besimmung des charakteristischen Polynoms:* Das charakteristische Polynom von A ist

  $$\chi_A = \det(T \cdot I_3 - A) = (T-2)^3.$$

  Also ist 2 der einzige Eigenwert von A.

- *Bestimmung der verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten:* Wegen

  $$A - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

  und

  $$(A - 2 \cdot I_3)^2 = 0$$

  erhalten wir (mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren oder aus dem Rang von $A - 2 \cdot I_3$)

  $$\begin{aligned} a_{2,1}(A) &= \dim_{\mathbb{C}} V(A - 2 \cdot I_3, 0) = 2 \\ a_{2,2}(A) &= \dim_{\mathbb{C}} V\big((A - 2 \cdot I_3)^2, 0\big) = \dim_{\mathbb{C}} V(0,0) = 3 \\ a_{2,3}(A) &= \dim_{\mathbb{C}} V\big((A - 2 \cdot I_3)^3, 0\big) = \dim_{\mathbb{C}} V(0,0) = 3. \end{aligned}$$

- *Bestimmung der Größe der Jordan-Blöcke:* Es gibt also
  - wegen $2 \cdot 2 - 3 - 0 = 1$ genau einen Jordanblock der Größe 1 zum Eigenwert 2,
  - wegen $2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$ genau einen Jordanblock der Größe 2 zum Eigenwert 2,
  - wegen $2 \cdot 3 - 3 - 3 = 1$ keinen Jordanblock der Größe 3 zum Eigenwert 2 (das ist auch schon aus den vorherigen Größen klar, da gar kein Platz mehr für einen weiteren Block ist).

  Also ist

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  die Jordansche Normalform von A.

In diesem, kleinen, Beispiel hätte es auch genügt, nur das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und ihre geometrischen Vielfachheiten zu bestimmen, um auf die gesamte Jordansche Normalform zu schließen. Das obige

Verfahren funktioniert jedoch ganz allgemein und wir haben nur deshalb ein kleines Beispiel gewählt, um die Berechnungen nicht unnötig ausufern zu lassen.

Alternativ kann man auch den Elementarteilersatz für Matrizen verwenden, um die Jordansche Normalform zu bestimmen; aber auch bei diesem Verfahren muss der schwierige Schritt der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms (getarnt als Primfaktorzerlegungen gewisser Elementarteiler) durchgeführt werden.

Rezept 3.3.14 (Berechnung der Jordanschen Normalform über den Elementarteilersatz)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.
- *Gesucht* sei die Jordansche Normalform von A (d.h. die Matrix in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu A ist).
- *Rezept:* Man betrachtet die Matrix

$$B := T \cdot I_n - A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K[T])$$

und bringt diese auf Smith-Normalform C (mit dem Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.5.7). Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K[T]$ diejenigen Elementarteiler von C, die *keine* Einheiten sind.

Man zerlegt jeden der Elementarteiler $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ in Primfaktoren. Da K algebraisch abgeschlossen ist, gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, r\}$ eine Faktorisierung der Form

$$\alpha_j = s_j \cdot \prod_{k=1}^{n_j} (T - \lambda_{j,k})^{m_{j,k}}$$

mit $s_j \in K^\times$, $n_j \in \mathbb{N}_{>0}$, $m_{j,1}, \ldots, m_{j,n_j} \in \mathbb{N}_{>0}$ und verschiedenen $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n_j} \in K$. Dann besteht die Jordansche Normalform von A genau aus der Familie

$$\big(J_{m_{j,k}}(\lambda_{j,k})\big)_{j\in\{1,\ldots,r\},k\in\{1,\ldots,n_j\}}$$

von Jordanblöcken (diese sind aber anders sortiert als in Abbildung 3.1!).

- *Begründung:* Wir betrachten die $K[T]$-Modulhomomorphismen

$$\begin{aligned} \pi\colon K[T]^n &\longrightarrow K^n\big[L(A)\big] \\ p &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot e_j \end{aligned}$$

$$\varphi := L(T \cdot I_n - A)\colon K[T]^n \longrightarrow K[T]^n.$$

Dann ist π offenbar surjektiv und es gilt außerdem $\operatorname{im}\varphi = \ker\pi$ [2, Lemma 6.3/17]. Mit dem Homomorphiesatz erhalten wir daher

$$K^n\big[L(A)\big] \cong_{K[T]} K[T]^n/\operatorname{im} L(T\cdot I_n - A) \cong K[T]^n/\operatorname{im} L(B).$$

Da B in Smith-Normalform ist, ist $K[T]^n/\operatorname{im} L(B)$ in kanonischer Weise eine direkte Summe von zyklischen $K[T]$-Moduln. Wie im Beweis von Satz 2.5.16 liefern die Primfaktorzerlegungen der Elementarteiler und der chinesische Restsatz dann eine direkte Summenzerlegung in zyklische $K[T]$-Moduln zu Primpotenzen. Wie wir im Beweis von Satz 3.3.1 gesehen haben, entsprechen diese direkten Summanden genau den Jordanblöcken der Jordanschen Normalform von A.

Rezept 3.3.15 (Berechnung einer Jordan-Basis)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.
- *Gesucht* sei die Jordansche Normalform von A und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, für die $S^{-1}\cdot A\cdot S$ in Jordanscher Normalform ist.
- *Rezept:* Man beginnt wie bei der Berechnung der Jordanschen Normalform von A (Rezept 3.3.12): Man bestimmt zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[T]$ von A. Als nächstes bestimmt man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (dies ist im allgemeinen algorithmisch nur näherungsweise möglich!); diese Menge stimmt mit der Menge $\sigma_K(A)$ der Eigenwerte von A überein. Außerdem ist es hilfreich, an dieser Stelle auch die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A zu bestimmen; dies liefert eine Faktorisierung

$$\chi_A = \prod_{\lambda\in\sigma_K(A)} (T-\lambda)^{m_\lambda},$$

was bereits eine erste Orientierung über das Aussehen der Jordanschen Normalform von A liefert (Bemerkung 3.3.2).

Man betrachtet im folgenden die Eigenwerte einzeln und führt jeweils das folgende Verfahren durch: Sei $\lambda \in \sigma_K(A)$. Für alle $s \in \{1,\dots,m_\lambda\}$ bestimmt man

$$a_{\lambda,s}(A) = V\big((A-\lambda\cdot I_n)^s, 0\big)$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Sei $d_\lambda \in \{1,\dots,m_\lambda\}$ das minimale $s \in \mathbb{N}$ mit $a_{\lambda,s}(A) = a_{\lambda,s+1}(A)$ (dann ist d_λ nichts anderes als die Vielfachheit der Nullstelle λ des Minimalpolynoms μ_A).

Man geht nun induktiv über $s \in \{1,\dots,d_\lambda\}$ vor, wobei man bei d_λ beginnt und dann *absteigend* fortfährt: Sei $M_{\lambda,s}$ die Menge aller bereits erzeugten Basisvektoren der *Stufe* s (d.h. bereits bestimmte Basisvektoren, die in $V((A-\lambda\cdot I_n)^s, 0)$ liegen); wir beginnen dabei mit $M_{\lambda,d_\lambda} = \emptyset$.

Zur Blockgröße s bestimmt man folgendermaßen Basisvektoren:

- Man bestimmt eine Basis $B_{\lambda,s}$ eines komplementären Untervektorraums von $\mathrm{Span}_K V((A-\lambda\cdot I_n)^{s-1},0)\cup M_{\lambda,s}$ in $V((A-\lambda\cdot I_n)^s,0)$. Dafür bestimmt man zunächst eine Basis von $V((A-\lambda\cdot I_n)^s,0)$ bzw. $V((A-\lambda\cdot I_n)^{s-1},0)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und wendet dann Rezept 3.3.17 an.
- Für jeden Vektor v in $B_{\lambda,s}$ bildet man (von rechts beginnend) die Kette

$$B_{\lambda,s,v} := \big(\underbrace{(A-\lambda\cdot I_n)^{s-1}\cdot v}_{\text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda} , \ldots, (A-\lambda\cdot I_n)\cdot v, v\big).$$

- Man setzt $M_{\lambda,s-1} := \{(A-\lambda\cdot I_n)\cdot v \mid v\in M_{\lambda,s}\cup B_{\lambda,s}\}$ (falls $s>1$ ist).

Dann bilden die Familien

$$\big(B_{\lambda,s,v}\big)_{\lambda\in\sigma_K(A),s\in\{1,\ldots,d_\lambda\},v\in B_{\lambda,s}}$$

zusammen eine Basis B von K^n. Sei $S\in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix, deren Spalten die Elemente von B (in der richtigen Reihenfolge) sind. Dann ist $S^{-1}\cdot A\cdot S$ in Jordan-Normalform.

- *Begründung:* Es ist zu zeigen,
  1. dass B eine Basis von K^n ist und
  2. dass $M_{B,B}(L(A)) = S^{-1}\cdot A\cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

  Zu 2. Nach dem ersten Teil ist B eine Basis von K^n. Wir betrachten dazu jeden Eigenwert einzeln. Dass jede Teilfamilie der Form $B_{\lambda,s,v}$ einen Jordanblock (der Größe s) liefert, folgt aus der folgenden Berechnung: Für alle $v\in V((A-\lambda\cdot I_n)^s,0)$ und alle $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} A\cdot\big((A-\lambda\cdot I_n)^k\cdot v\big) &= \lambda\cdot\big((A-\lambda\cdot I_n)^k\cdot v\big)\\ &\quad + 1\cdot\big((A-\lambda\cdot I_n)^{k+1}\cdot v\big); \end{aligned}$$

  insbesondere ist

$$A\cdot\big((A-\lambda\cdot I_n)^{s-1}\cdot v\big) = \lambda\cdot\big((A-\lambda\cdot I_n)^{s-1}\cdot v\big).$$

  Zu 1. Da die Matrix A zu einer Matrix in Jordan-Normalform ähnlich ist (Satz 3.3.1), folgt (Konjugationstrick und eine kleine Rechnung für Matrizen in Jordan-Normalform)

$$\mathrm{Span}_K \bigcup_{\lambda\in\sigma_K(A)} V\big((A-\lambda\cdot I_n)^{d_\lambda},0\big) = K^n.$$

Nach Konstruktion von B ist B ein Erzeugendensystem der linken Seite, also auch von K^n.

Warum ist die Familie B linear unabhängig? Auch hier kann man aufgrund der Ähnlichkeit von A zu einer Matrix in Jordan-Normalform jeden Eigenwert einzeln behandeln. Man zeigt dann induktiv über die Stufen, dass die entsprechende Teilfamilie von B linear unabhängig ist (wobei man bei der höchsten Stufe beginnt und dann absteigt). Der wesentliche Schritt ist dann, dass für jedes $\lambda \in \sigma_K(A)$ und jedes $s \in \{2, \ldots, d_\lambda\}$ die von $A - \lambda \cdot I_n$ induzierte lineare Abbildung

$$\frac{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^s, 0\big)}{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-1}, 0\big)} \longrightarrow \frac{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-1}, 0\big)}{V\big((A - \lambda \cdot I_n)^{s-2}, 0\big)}$$

wohldefiniert und injektiv ist (und daher insbesondere linear unabhängige Familien auf linear unabhängige Familien abbildet) (nachrechnen). Alternativ kann man auch nachzählen, dass B genau n Elemente enthält.

Beispiel 3.3.16 (Berechnung einer Jordan-Basis einer Matrix)**.** Wir betrachten wieder die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

aus Beispiel 3.3.13 und bestimmen mit dem Verfahren aus Rezept 3.3.15 eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist:

- *Bestimmung des charakteristischen Polynoms:* Es ist (Beispiel 3.3.13) $\chi_A = (T-2)^3$ und somit $\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{2\}$.
- *Bestimmung der verallgemeinerten geometrischen Vielfachheiten:* Es gilt (Beispiel 3.3.13)

$$\begin{aligned} a_{2,1}(A) &= 2 \\ a_{2,2}(A) &= 3 \\ a_{2,3}(A) &= 3. \end{aligned}$$

  Insbesondere ist $d_2 = 2$.

- *Bestimmung der Basisblöcke:* Mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (oder in diesem Fall durch scharfes Hinsehen) erhalten wir

$$\begin{aligned} V\big((A - 2 \cdot I_3)^0, 0\big) &= V(I_3, 0) = \{0\} \\ V\big((A - 2 \cdot I_3)^1, 0\big) &= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ V\big((A - 2 \cdot I_3)^2, 0\big) &= V\big(0 \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}), 0\big) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, e_3\} \end{aligned}$$

Wir beginnen die rekursive Wahl der Basisvektoren bei der Stufe „$s = d_2 = 2$“: Es ist $M_{2,2} = \emptyset$.

- Eine Basis eines zu
$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\big(V\big((A - 2 \cdot I_3)^1, 0\big) \cup M_{2,2}\big) = V\big((A - 2 \cdot I_3)^1, 0\big)$$
komplementären Untervektorraums in $V((A - 2 \cdot I_3)^2, 0)$ ist zum Beispiel
$$B_{2,2} = (e_3).$$
- Der Vektor e_3 liefert die Familie
$$B_{2,2,e_3} = \big((A - 2 \cdot I_3) \cdot e_3, e_3\big) = \left(\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
- Dies liefert
$$M_{2,1} = \left\{\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Wir kommen nun zur Stufe „$s = 1$“:

- Eine Basis eines zu
$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\big(V\big((A - 2 \cdot I_3)^0, 0\big) \cup M_{2,1}\big) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$
komplementären Untervektorraums in $V((A - 2 \cdot I_3)^1, 0)$ ist zum Beispiel
$$B_{2,1} = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$
- Der Vektor $v := (2, -1, 0)^{\mathsf{T}}$ liefert die Familie
$$B_{2,2,v} = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right).$$

- *Bestimmung einer Jordan-Basis bzw. der zugehörigen Transformation:* Insgesamt erhalten wir so die kombinierte Basis
$$\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Diese Basis liefert die invertierbare Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Nach Konstruktion ist dabei

$$S^{-1} \cdot A = S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezept 3.3.17 (komplementäre Untervektorräume)**.**

- *Gegeben* sei ein Körper K, $m, n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in K^m$.
- *Gesucht* sei eine Basis eines zu $\mathrm{Span}_K\{v_1, \ldots, v_n\}$ komplementären Untervektorraums von K^m.
- *Rezept:* Man betrachtet die Matrix $A \in \mathrm{M}_{m \times n+m}(K)$ mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n, e_1, \ldots, e_m$ (in dieser Reihenfolge) und wendet das Gaußsche Eliminationsverfahren auf A an. Die Standardeinheitsvektoren zu den Pivotspalten in den rechten m Spalten liefern dann eine Basis eines zu $\mathrm{Span}_K\{v_1, \ldots, v_n\}$ komplementären Untervektorraums von K^m.
- *Begründung:* Die Begründung ist analog zur Begründung von Rezept I.5.2.19; auch hier ist es essentiell, dass die Ordnung der Spalten während des Eliminationsverfahrens erhalten bleibt und dass der Eliminationsvorgang auf der linken Seite beginnt (dass also die Standardeinheitsvektoren erst dann wirklich in Aktion treten, wenn die Zeilenstufenform der ersten n Spalten bereits erreicht ist).

Caveat 3.3.18. Ein beliebter Fehler ist, bei der Bestimmung einer Jordan-Basis in der falschen Reihenfolge vorzugehen, indem zuerst zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums bestimmt wird und dann zu solchen Basisvektoren v zum Eigenwert λ versucht wird, rekursiv $v_1, \ldots$ mit

$$\begin{aligned} (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v_1 &= v \\ (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v_2 &= v_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

zu bestimmen. Dieses Verfahren funktioniert im allgemeinen *nicht*, denn *nicht* jede Basis des Eigenraums lässt sich zu einer Jordanbasis für die Jordanblöcke zu diesem Eigenwert fortsetzen! Wir verdeutlichen dies an einem konkreten Beispiel: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Dann ist 2 ein Eigenwert von A und (e_1, e_1+e_2) ist eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 2 von A. Aber es gibt keinen Vektor $v \in \mathbb{C}^3$ mit

$$(A - 2 \cdot I_3) \cdot v = e_1 \quad \text{oder} \quad (A - 3 \cdot I_3) \cdot v = e_1 + e_2.$$

Die Basis $(e_1, e_1 + e_2)$ des Eigenraums lässt sich somit *nicht* zu einer Jordan-Basis von A fortsetzen.

Es ist also essentiell, bei den Basisvektorketten auf der höchstmöglichen Stufe zu beginnen und sich dann Schritt für Schritt in Richtung Eigenvektoren vorzuhangeln.

Rezept 3.3.19 (Jordansche Normalform von Endomorphismen)**.**

- *Gegeben* sei ein algebraisch abgeschlossener Körper K, ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V und ein Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$.
- *Gesucht* sei eine Basis B von V mit der Eigenschaft, dass die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ von f in Jordan-Normalform ist.
- *Rezept:* Sei $n := \dim_K V$. Man wähle eine Basis C von V und bestimme die darstellende Matrix

  $$A := M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K).$$

  Dann bestimme man mithilfe von Rezept 3.3.15 eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit der Eigenschaft, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

  Sei

  $$B := \big(T_{E_n,C} \circ L(S^{-1})(e_1), \ldots, T_{E_n,C} \circ L(S^{-1})(e_n)\big).$$

  Dann ist B eine Basis von V und $M_{B,B}(f)$ ist in Jordan-Normalform.
- *Begründung:* Nach Konstruktion ist J in Jordan-Normalform und

  $$M_{B,B}(f) = S^{-1} \cdot M_{B,B}(f) \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S = J.$$

  Man beachte dabei, dass B eine Basis von V ist, da $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von K^n ist und die Abbildungen $L(S^{-1})$ und $T_{E_n,C}$ Isomorphismen von K-Vektorräumen sind.

Anmerkung zum Lernen. Falls Ihnen entfallen sein sollte, wie man Matrizen zu linearen Abbildungen erstellen kann und wie die Basiswechselberechnungen funktionieren, sollten Sie diese Techniken dringend wiederholen!

Typische Anwendungen der Jordanschen Normalform betreffen Potenzen von Matrizen, wie sie zum Beispiel in der Exponentialreihe (und beim Lösen linearer Differentialgleichungssysteme), in der Kombinatorik oder bei gruppentheoretischen Eigenschaften linearer Gruppen auftreten. Solche Anwendungen sind in Anhang A.4 skizziert.

4

Multilineare Algebra

Die multilineare Algebra befasst sich systematisch mit multilinearen Abbildungen, also insbesondere mit Bilinearformen und Determinanten.

Die grundlegende Idee ist dabei, durch einen Trick diese multilinearen Abbildungen wieder in lineare Abbildungen zu übersetzen; der Preis dieser Übersetzung ist, dass die Vektorräume, auf denen diese linearen Abbildungen definiert sind, etwas komplizierter sind. So lassen sich zum Beispiel bilineare Abbildungen als lineare Abbildungen auf geeigneten Tensorprodukten beschreiben und Determinanten als lineare Abbildungen auf geeigneten äußeren Produkten.

Diese Vektorräume bilden außerdem wichtige Bausteine in der Differentialgeometrie, nämlich zum Beispiel bei der Definition so grundlegender Begriffe wie riemannscher Metriken auf glatten Mannigfaltigkeiten.

Die multilineare Algebra kann auch in der größeren Allgemeinheit der Modul- statt der Vektorraumtheorie formuliert werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns aber auf den Vektorraumfall.

Überblick über dieses Kapitel.

4.1	Homomorphismenräume	146
4.2	Das Tensorprodukt	149
4.3	Das äußere Produkt	162

4.1 Homomorphismenräume

Tensorprodukte und äußere Produkte werden am effizientesten über universelle Eigenschaften beschrieben und verwendet. Universelle Eigenschaften können auch durch Homomorphismenräume ausgedrückt werden. Wir wiederholen daher kurz elementare Tatsachen zu Homomorphismenräumen und gehen insbesondere auf den Spezialfall der Dualräume ein.

Proposition 4.1.1 (Homomorphismenräume). *Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_K(V,W) \subset \mathrm{Abb}(V,W)$ für die Menge aller K-linearen Abbildungen $V \longrightarrow W$. Dann ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$.*

Beweis. Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist nicht-leer, da sie die Nullabbildung enthält. Nach Proposition I.3.2.3 genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, d.h. dass die punktweise Summe bzw. punktweise Skalierung von linearen Abbildungen wieder lineare Abbildungen liefern. Dies folgt aus Proposition I.4.1.10. □

Den Übergang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$ können wir wie folgt zusammenfassen:

Proposition 4.1.2 (Homomorphismensräume und Matrizenräume). *Sei K ein Körper und seien $m,n \in \mathbb{N}$. Dann sind*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(K^n,K^m) &\longrightarrow \mathrm{M}_{m\times n}(K) \\ f &\longmapsto M(f) \\ \mathrm{M}_{m\times n}(K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K^n,K^m) \\ A &\longmapsto L(A) \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen. Insbesondere ist

$$\dim_K \mathrm{Hom}_K(K^n,K^m) = \boxed{?}$$

Beweis. Dies ergibt sich aus unseren Betrachtungen zum Matrizenkalkül in Proposition I.4.2.18 und Proposition I.4.2.21 (bzw. Proposition I.4.4.6). Die Bestimmung der Dimension erfolgte in Proposition I.4.2.5. □

Ein interessanter Spezialfall der Homomorphismenräume ist der Dualraum, der insbesondere in der Differentialgeometrie viel verwendet wird.

Definition 4.1.3 (Dualraum). Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Dann bezeichnet man den K-Vektorraum

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$$

als *Dualraum von V*. Die Elemente von V^* bezeichnet man auch als *Linearformen auf V*. Je nach Kontext werden Dualräume auch manchmal mit V' oder $V^\#$ bezeichnet.

Satz 4.1.4 (Dualraum von endlich-dimensionalen Vektorräumen)**.** *Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $V \cong_K V^*$.*

Beweis. Nach Proposition 4.1.2 ist $\dim_K V^* = \dim_K V$ und somit $V \cong_K V^*$ (Proposition I.4.4.9). Wir geben nun noch einen etwas expliziteren Beweis über duale Basen:

Sei $n := \dim_K V$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Wir konstruieren nun die zu $(v_1, \dots, v_n)$ *duale Basis* von V^*: Zu $j \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne $v_j^* \colon V \longrightarrow K$ die eindeutige lineare Abbildung (universelle Eigenschaft von Basen!) mit

$$\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \quad v_j^*(v_k) = \delta_{j,k}.$$

Dann ist $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^*, denn:

- *Erzeugendensystem:* Dass $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ den Dualraum V^* erzeugt, folgt aus der universellen Eigenschaft von Basen (Satz I.4.3.1).
- *Lineare Unabhängigkeit:* Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

  $$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j^* = 0;$$

  man beachte dabei, dass die Null auf der rechten Seite die Nullabbildung $V \longrightarrow K$ ist. Einsetzen der Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ liefert für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, dass

  $$0 = 0(v_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j^* \right)(v_k) = \lambda_k \cdot v_k^*(v_k) = \lambda_k.$$

  Also ist die Familie $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ linear unabhängig.

Somit ist $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^*. Daher liefert $v_j \longmapsto v_j^*$ einen Isomorphismus $V \longrightarrow V^*$. □

Caveat 4.1.5. Der obige Satz gilt *nicht* für unendlich-dimensionale Vektorräume! Man beachte außerdem, dass es im allgemeinen *keinen* kanonischen Isomorphismus $V \longrightarrow V^*$ für endlich-dimensionale Vektorräume V gibt. Zum Beispiel beruht der obige Beweis auf der *Wahl* einer Basis von V.

Im Gegensatz dazu gibt es im endlich-dimensionalen Fall einen kanonischen Isomorphismus zwischen Vektorräumen und ihrem Doppeldual:

Proposition 4.1.6 (Doppeldual)**.** *Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} i\colon V &\longrightarrow (V^*)^* \\ v &\longmapsto \big(f \mapsto f(v)\big) \end{aligned}$$

linear und injektiv. Insbesondere gilt: Ist V endlich-dimensional, so ist diese Abbildung $i\colon V \longrightarrow (V^*)^*$ ein Isomorphismus.

Beweis. Eine einfache Rechnung zeigt, dass i linear ist. Dass i injektiv ist, kann man zum Beispiel über Basisergänzung und die universelle Eigenschaft von Basen zeigen (nachrechnen). □

Bemerkung 4.1.7 (Funktorialität des Dualraums)**.** Sei K ein Körper und sei W ein K-Vektorraum. Ist $f\colon V \longrightarrow V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(f,W)\colon \mathrm{Hom}_K(V',W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W) \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung. Man beachte dabei, dass es sich bei $\mathrm{Hom}_K(f,W)$ nur um eine Notation handelt; $\mathrm{Hom}_K(f,W)$ ist eine lineare Abbildung, kein Vektorraum. Die Notation kommt daher, dass man die Konstruktion $\mathrm{Hom}_K(\,\cdot\,,W)$ auf Vektorräume und auf lineare Abbildungen anwendet (und so Vektorräume bzw. lineare Abbildungen erhält). Im Fall $W = K$ schreiben wir auch kurz

$$f^* := \mathrm{Hom}_K(f,K)\colon V'^* \longrightarrow V^*$$

und nennen dies die *duale Abbildung von f*.

Diese Konstruktion ist mit der Komposition von Abbildungen verträglich: Sind $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V')$ und $f' \in \mathrm{Hom}_K(V',V'')$, so folgt (nachrechnen)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(f' \circ f, W) &= \mathrm{Hom}_K(f,W) \circ \mathrm{Hom}_K(f',W) \\ \mathrm{Hom}_K(\mathrm{id}_V, W) &= \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}\,. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als *(kontravariante) Funktorialität.*

Homomorphismenräume ermöglichen es, universelle Eigenschaften von Vektorraumkonstruktionen kurz zu formulieren (Bemerkung 2.3.21 und Bemerkung 2.3.28).

Bemerkung 4.1.8 (Exaktheit des Dualraums)**.** Sei K ein Körper, sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann gilt (Übungsaufgabe):

1. Ist $f\colon V \longrightarrow W$ surjektiv, so ist $f^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ injektiv.
2. Ist $f\colon V \longrightarrow W$ injektiv, so ist $f^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ surjektiv.

Man beachte dabei, dass die zweite Aussage im Kontext von Moduln im allgemeinen *nicht* gilt.

4.2 Das Tensorprodukt

Das Tensorprodukt ist eine Maschine, die multilineare Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt (Abbildung 4.1). Wie bei vielen Maschinen ist es in den meisten Situationen nur wichtig zu wissen *welche Funktionalität* diese Maschine bereitstellt und nicht *wie* sie von innen aussieht. Diese Funktionalität lässt sich kurz und knapp durch eine universelle Eigenschaft beschreiben.

4.2.1 Wozu das Tensorprodukt?

Bevor wir erklären, in welchem Sinne das Tensorprodukt multilineare Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt, führen wir den Begriff der multilinearen Abbildung allgemein ein.

Definition 4.2.1 (bilineare Abbildung, multilineare Abbildung)**.** Sei K ein Körper.

- Seien U, V, W Vektorräume über K. Eine Abbildung $f\colon V \times W \longrightarrow U$ ist *bilinear*, wenn folgendes gilt: Für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} f(v, \cdot)\colon W &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto f(v,x) \\ f(\cdot, w)\colon V &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto f(x,w) \end{aligned}$$

  K-linear.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien $V_1, \dots, V_n$ und U Vektorräume über K. Eine Abbildung $f\colon \prod_{j=1}^{n} V_j \longrightarrow U$ ist *n-linear*, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $v_1 \in V_1, \dots, v_{j-1} \in V_{j-1}, v_{j+1} \in v_{j+1}, \dots, v_n \in V_n$ ist

$$\begin{aligned} V_j &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto f(v_1, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

  eine K-lineare Abbildung.

Bilineare Abbildungen sind in dieser Terminologie dasselbe wie 2-lineare Abbildungen (was ja sprachlich auch Sinn ergibt!).

Beispiel 4.2.2 (multilineare Abbildungen)**.** Wir kennen bereits wichtige Beispiele für multilineare Abbildungen: Sei K ein Körper.

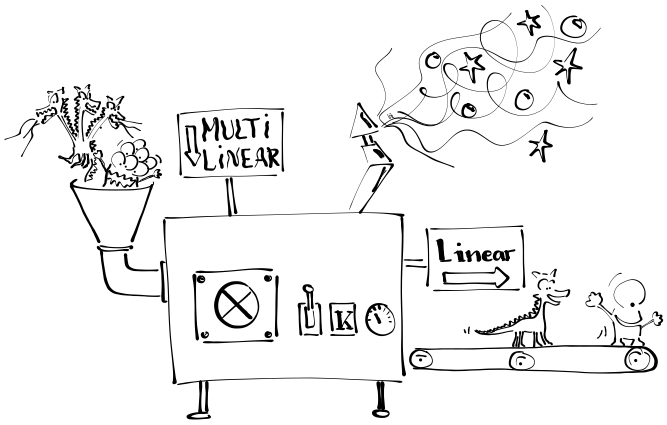


Abbildung 4.1.: Das Tensorprodukt als Maschine

- Ist V ein K-Vektorraum, so sind Bilinearformen $V \times V \longrightarrow K$ nichts anderes als bilineare Abbildungen $V \times V \longrightarrow K$. Insbesondere passen Skalarprodukte in diesen Kontext.

- Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so kann man die Determinante $\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ als n-lineare Abbildung $K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ auffassen (wobei die Argumente jeweils den Zeilen der Matrizen entsprechen).

- Ist V ein K-Vektorraum, so ist die Skalarmultiplikation

  $$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$

  bilinear; aber die Abbildung $+\colon V \times V \longrightarrow V$ ist im allgemeinen *nicht* bilinear.

- Ist A eine kommutative K-Algebra, so ist die Multiplikationsabbildung K-bilinear:

  $$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$

- Ist V ein K-Vektorraum, so ist die Auswertungsabbildung K-bilinear (nachrechnen):

  $$\begin{aligned} V^* \times V &\longrightarrow K \\ (f, v) &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist die folgende Abbildung $\mathbb{R}$-bilinear:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v\end{aligned}$$

Bemerkung 4.2.3. Sei K ein Körper und seien V, W, X, Y Vektorräume über K. Ist $f\colon V \times W \longrightarrow X$ bilinear und ist $g\colon X \longrightarrow Y$ linear, so ist die Komposition $g \circ f\colon V \times W \longrightarrow Y$ bilinear.

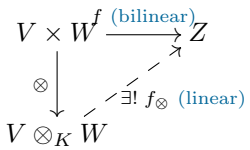
Caveat 4.2.4. Multilineare Abbildungen sind im allgemeinen *nicht* linear und lineare Abbildungen von Produkten sind im allgemeinen *nicht* multilinear!

Da wir bereits eine ausgefeilte Theorie für lineare Abbildungen entwickelt haben, ist es wünschenswert diese Theorie auch für multilineare Abbildungen zu nutzen. Das Tensorprodukt ermöglicht genau das:

Satz 4.2.5 (Tensorprodukt)**.** *Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K. Dann gibt es einen K-Vektorraum $V \otimes_K W$ und eine bilineare Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\otimes\colon V \otimes_K W \longrightarrow Z$ mit

$$f_\otimes \circ \otimes = f.$$



Der K-Vektorraum $V \otimes_K W$ und die Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet $V \otimes_K W$ als Tensorprodukt von V und W über K.

Beweis. Die *Eindeutigkeit von* $(V \otimes_K W, \otimes)$ folgt mit dem Standardargument für universelle Eigenschaften (Beweis von Satz 2.3.27).

Die *Existenz von* $(V \otimes_K W, \otimes)$ reichen wir in Kapitel 4.2.3 durch eine konkrete (aber recht unförmige) Konstruktion nach. □

Strenggenommen ist $V \otimes_K W$ somit nur bis auf kanonische Isomorphie wohldefiniert. Wenn man diese Notation striktifizieren möchte, kann man zum Beispiel die Konstruktion aus Kapitel 4.2.3 als Definition für $V \otimes_K W$ verwenden.

Caveat 4.2.6 (Elementartensoren)**.** Sei K ein Körper, seien V, W Vektorräume über K. Elemente der Form

$$v \otimes w := \otimes(v, w) \in V \otimes_K W$$

mit $v \in V$ und $w \in W$ bezeichnet man als *Elementartensoren*.

Da die Abbildung $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ im allgemeinen *nicht* surjektiv ist, sind *nicht* alle Elemente von $V \otimes_K W$ Elementartensoren, sondern Linearkombinationen von Lineartensoren.

Ist $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ eine bilineare Abbildung von K-Vektorräumen, so schreibt man normalerweise

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\longrightarrow Z \\ v \otimes w &\longmapsto f(v,w) \end{aligned}$$

für die induzierte lineare Abbildung $f_\otimes$ (obwohl ja nicht alle Elemente auf der linken Seite Elementartensoren sind ... aber wegen der Eindeutigkeit von $f_\otimes$ ist $f_\otimes$ durch diese Beschreibung bereits eindeutig bestimmt).

Beispiel 4.2.7 (Rechnen mit Tensoren)**.** Zum Beispiel gilt in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(da die Abbildung $\otimes\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ bilinear ist).

Bemerkung 4.2.8 (universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, via Hom)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Dann gilt: Für jeden K-Vektorraum Z ist die K-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(\otimes, Z)\colon \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, Z) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_K(V \times W, Z) \\ f &\longmapsto f \circ \otimes \end{aligned}$$

zwischen dem Homomorphismenraum $\mathrm{Hom}_k(V \otimes_K W, Z)$ und dem K-Vektorraum $\mathrm{Bil}_K(V \times W, Z)$ aller bilinearen Abbildungen $V \times W \longrightarrow Z$ bijektiv (und somit ein Isomorphismus von K-Vektorräumen).

4.2.2 Rechnen mit Tensorprodukten

Es empfiehlt sich im Normalfall, mit dem Tensorprodukt nur mithilfe der universellen Eigenschaft zu arbeiten. Daraus leiten sich zum Beispiel die folgenden Eigenschaften und Konstruktionsprinzipien ab, die für die meisten Anwendungen völlig ausreichen.

Satz 4.2.9 (der Tensorproduktbaukasten)**.** *Sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Dann gilt:*

1. Neutralität des Grundkörpers. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} K \otimes_K V &\longrightarrow V \\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v \\ V &\longrightarrow K \otimes_K V \\ v &\longmapsto 1 \otimes v \end{aligned}$$

2. Kommutativität. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\longrightarrow W \otimes_K V \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v \\ W \otimes_K V &\longrightarrow V \otimes_K W \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v \end{aligned}$$

3. Assoziativität. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} U \otimes_K (V \otimes_K W) &\longrightarrow (U \otimes_K V) \otimes_K W \\ u \otimes (v \otimes w) &\longmapsto (u \otimes v) \otimes w \\ (U \otimes_K V) \otimes_K W &\longrightarrow U \otimes_K (V \otimes_K W) \\ (u \otimes v) \otimes w &\longmapsto u \otimes (v \otimes w) \end{aligned}$$

4. Verträglichkeit mit direkten Summen. *Sei $(W_i)_{i \in I}$ eine Familie von K-Vektorräumen. Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned} V \otimes_K \bigoplus_{i \in I} W_i &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i) \\ v \otimes (w_i)_{i \in I} &\longmapsto (v \otimes w_i)_{i \in I} \\ \bigoplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i) &\longrightarrow V \otimes_K \bigoplus_{i \in I} W_i \\ (v \otimes w_i)_{i \in I} &\longmapsto v \otimes (w_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

5. Exponentialgesetz/Hom-⊗-Adjunktion. *Die folgenden Abbildungen sind wohldefinierte zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_K(V \otimes_K W, U) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K\big(V, \operatorname{Hom}_K(W,U)\big)\\ f &\longmapsto \big(v \mapsto (w \mapsto f(v \otimes w))\big)\\ \operatorname{Hom}_K\big(V, \operatorname{Hom}_K(W,U)\big) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V \otimes_K W, U)\\ f &\longmapsto \big(v \otimes w \mapsto (f(v))(w)\big)\end{aligned}$$

6. Funktorialität. *Sind* $f\colon V \longrightarrow V'$ *und* $g\colon W \longrightarrow W'$ *lineare Abbildungen, so liefert*

$$\begin{aligned}f \otimes_K g\colon V \otimes_K W &\longrightarrow V' \otimes_K W'\\ v \otimes w &\longmapsto f(v) \otimes g(w)\end{aligned}$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung. Dabei gilt $\mathrm{id}_V \otimes_K \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V \otimes_K W}$ *und diese Konstruktion ist mit der Komposition von Abbildungen kompatibel.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, mithilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts (die anderen Teile lassen sich analog behandeln): Die Abbildung

$$\begin{aligned}K \times V &\longrightarrow V\\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v\end{aligned}$$

ist bilinear und induziert somit (mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts) eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi\colon K \otimes_K V &\longrightarrow V\\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\psi := \otimes(1, \cdot)\colon V &\longrightarrow K \otimes_K V\\ v &\longmapsto 1 \otimes v = \otimes(1, v)\end{aligned}$$

eine lineare Abbildung (da $\otimes\colon K \times V \longrightarrow K \otimes_K V$ bilinear ist).

Es gilt $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$, denn: Für alle $v \in V$ ist

$$\varphi \circ \psi(v) = \varphi(1 \otimes v) = 1 \cdot v = v.$$

Umgekehrt gilt auch $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K \otimes_K V}$, denn: Die Abbildung $\psi \circ \varphi\colon K \otimes_K V \longrightarrow K \otimes_K V$ ist linear und erfüllt wegen

$$\forall_{(\lambda,v) \in K \times V} \quad \psi \circ \varphi(\lambda \otimes v) = \psi(\lambda \cdot v) = 1 \otimes (\lambda \cdot v) = \lambda \otimes v$$

die Gleichung

$$(\psi \circ \varphi) \circ \otimes = \otimes = \mathrm{id}_{K \otimes_K V} \circ \otimes.$$

Mit der Eindeutigkeitseigenschaft aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $K \otimes_K V$ folgt daher $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K \otimes_K V}$. □

Insbesondere erhalten wir daraus eine Berechnung der Dimension von Tensorprodukten bzw. genauer eine gute Möglichkeit, um Elemente von Tensorprodukten auf Trivialität zu testen:

Korollar 4.2.10 (Dimension/Basen von Tensorprodukten)**.** *Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und ist $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W, so ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $V \otimes_K W$. Insbesondere gilt:*

$$\dim_K V \otimes_K W = |I \times J| = |I| \cdot |J| = \dim_K V \cdot \dim_K W.$$

Beweis. Die Basen $(v_i)_{i \in I}$ von V bzw. $(w_j)_{j \in J}$ von W liefern Isomorphismen

$$V \cong_K \bigoplus_{i \in I} K \quad \text{und} \quad W \cong_K \bigoplus_{j \in J} K.$$

Mit dem Tensorproduktbaukasten (Satz 4.2.9) erhalten wir daher einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\cong_K \left(\bigoplus_I K \right) \otimes_K \left(\bigoplus_J K \right) \\ &\cong_K \bigoplus_I \bigoplus_J (K \otimes_K K) \\ &\cong_K \bigoplus_{I \times J} K \end{aligned}$$

von K-Vektorräumen, der die Familie $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ auf die Standardbasis von $\bigoplus_{I \times J} K$ abbildet. Also ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $V \otimes_K W$.

Die Dimensionsberechnung ist eine direkte Konsequenz daraus. Man beachte dabei, dass in dem Fall, dass I oder J unendlich ist, die Gleichheit $|I \times J| = |I| \cdot |J|$ nach Definition der Multiplikation von Kardinalzahlen gilt. □

Beispiel 4.2.11. Zum Beispiel gilt in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

denn $(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$ bildet eine Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ (Korollar 4.2.10) und in dieser Basis erhalten wir die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \boxed{?} \\ &= \boxed{?} \end{aligned}$$

Da einer der Koeffizienten in dieser Darstellung nicht 0 ist, ist das Element nicht trivial.

Bemerkung 4.2.12 (Darstellung von Tensoren durch Matrizen)**.** Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(e_j \otimes e_k)_{j\in\{1,\dots,m\},k\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis von $K^m \otimes_K K^n$ (Korollar 4.2.10). Daher kann man Elemente von $K^m \otimes_K K^n$ auch bequem als Matrizen in $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ darstellen. Darstellungen dieser Art sind vor allem in der Physik populär (z.B. Trägheitstensoren).

Sei nun $m = n$. Unter dem zur Basis $(e_j \otimes e_k)_{j,k\in\{1,\dots,n\}}$ assoziierten Isomorphismus sowie dem von der Abbildung $\otimes\colon K^n \times K^n \longrightarrow K^n \otimes_K K^n$ induzierten Isomorphismus

$$K^n \otimes_K K^n \cong_K (K^n \otimes_K K^n)^* = \mathrm{Hom}_K(K^n \otimes_K K^n, K) \cong_K \mathrm{Bil}_K(K^n)$$

entspricht diese Darstellung von Tensoren in $K^n \otimes_K K^n$ der Darstellung von Bilinearformen auf K^n durch quadratische Matrizen (Kapitel 1.1.4).

Anmerkung zum Lernen (der Schrecken des Tensorprodukts)**.** Warum wird das Tensorprodukt oft als so schwierig und unzugänglich empfunden? Der Hauptgrund liegt vermutlich darin, dass wir mit den meisten bisher behandelten Vektorräumen eine konkrete geometrische Anschauung (zum Beispiel angelehnt an die euklidische Geometrie) verbinden. Das Tensorprodukt hingegen stammt nicht aus der Quelle der Anschauung, sondern aus abstrakten strukturellen Überlegungen, und besitzt keine wirklich gute anschauliche Interpretation. Positiver formuliert: Man muss sich gar nichts dafür vorstellen können und es ist völlig ausreichend, die universelle Eigenschaft, den Tensorproduktbaukasten und die Konstruktion expliziter Basen aus Korollar 4.2.10 zu beherrschen.

4.2.3 Konstruktion des Tensorprodukts

Für die meisten Anwendungen des Tensorprodukts verwendet man nur die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, nicht aber *wie* man das Tensorprodukt konstruieren kann. Um aber überhaupt das Tensorprodukt einsetzen zu könen, müssen wir natürlich wissen, *dass* es existiert. Dies zeigen wir im folgenden. Die Idee ist es, zunächst den im allgemeinen irrsinnig großen Vektorraum $\bigoplus_{V\times W} K$ zu betrachten (in dem sehr viel Platz für V und W ist) und dann durch Ausdividieren eines geeigneten Untervektorraums die gewünschte bilineare Interaktion von Elementen aus V bzw. W zu erzwingen.

Beweis der Existenzaussage von Satz 4.2.5. Wir betrachten den Vektorraum

$$V \otimes_K W := \left(\bigoplus_{V\times W} K\right) / N,$$

wobei (zur Erzwingung der bilinearen Interaktion!)

$$\begin{aligned} N := \mathrm{Span}_K\Big(& \big\{ e_{(v+v',w)} - e_{v,w} - e_{v',w} \;\big|\; v, v' \in V,\ w \in W \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(\lambda\cdot v,w)} - \lambda \cdot e_{(v,w)} \;\big|\; v \in V,\ w \in W, \lambda \in K \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(v,w+w')} - e_{(v,w)} - e_{(v,w')} \;\big|\; v \in V,\ w, w' \in W \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(v,\lambda\cdot w)} - \lambda \cdot e_{(v,w)} \;\big|\; v \in V,\ w \in W, \lambda \in K \big\} \Big). \end{aligned}$$

Zusätzlich definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes \colon V \times W &\longrightarrow V \otimes_K W \\ (v, w) &\longmapsto [e_{(v,w)}]. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung $\otimes$ bilinear ist und dass $V \otimes_K W$ zusammen mit $\otimes$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts erfüllt:

- Die Abbildung $\otimes \colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ ist bilinear, denn: Seien $v \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in K$. Dann gilt (nach Konstruktion von N)

$$\begin{aligned} \otimes(\lambda \cdot v, w) &= [e_{(\lambda\cdot v,w)}] && \text{(Definition von } \otimes) \\ &= \big[e_{(\lambda\cdot v,w)} - (e_{(\lambda\cdot v,w)} - \lambda \cdot e_{(v,w)})\big] && \text{(Definition von } N) \\ &= [\lambda \cdot e_{(v,w)}] \\ &= \lambda \cdot [e_{(v,w)}] \\ &= \lambda \cdot \otimes(v, w) && \text{(Definition von } \otimes). \end{aligned}$$

  Analog zeigt man, dass $\otimes$ im ersten Argument additiv und auch im zweiten Argument linear ist. Also ist $\otimes$ bilinear.

- Sei $f \colon V \times W \longrightarrow Z$ eine lineare Abbildung in einen K-Vektorraum Z.

  Existenz von $f_\otimes$. Die durch

$$\begin{aligned} F \colon \bigoplus_{V\times W} K &\longrightarrow U \\ e_{(v,w)} &\longmapsto f(v, w) \end{aligned}$$

  definierte lineare Abbildung erfüllt $N \subset \ker F$, da f bilinear ist (nachrechnen). Daher induziert F nach der universellen Eigenschaft des Quotienten eine wohldefinerte lineare(!) Abbildung

$$f_\otimes \colon V \otimes_K W = \bigoplus_{V\times W} K/N \longrightarrow Z.$$

  Nach Konstruktion gilt dabei für alle $(v, w) \in V \times W$, dass

$$f_\otimes \circ \otimes(v, w) = F(e_{(v,w)}) = f(v, w).$$

- *Eindeutigkeit von $f_\otimes$.* Sei $g\colon V \otimes_K W \longrightarrow Z$ eine lineare Abbildung mit $g \circ \otimes = f$. Dann gilt $g = f_\otimes$, denn: Wegen $g \circ \otimes = f = f_\otimes \circ \otimes$ stimmen g und $f_\otimes$ auf der Bildmenge von $\otimes\colon V \times W \longrightarrow V \otimes_K W$ überein. Diese Bildmenge ist nach Konstruktion ein Erzeugendensystem des K-Vektorraums $V \otimes_K W$. Da g und $f_\otimes$ linear sind, folgt $g = f_\otimes$.

Damit ist die Existenz des Tensorprodukts gezeigt. □

Alternativ könnte man auch Korollar 4.2.10 als Anleitung verwenden, um das Tensorprodukt über konkrete Basen zu konstruieren.

4.2.4 Anwendungen des Tensorprodukts

Nach Definition verwandelt das Tensorprodukt bilineare Abbildungen in lineare Abbildungen, was in vielen Situationen nützlich ist. Darüberhinaus gibt es noch viele spezifischere Anwendungen des Tensorprodukts in der Mathematik:

Beispiel 4.2.13 (Änderung der Skalare)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei A eine kommutative K-Algebra (zum Beispiel die Polynomalgebra $K[T]$ oder ein Körper, der K als Teilkörper enthält). Dann bildet $A \otimes_K V$ bezüglich der durch

$$\begin{aligned} A \times (A \otimes_K V) &\longrightarrow A \otimes_K V \\ \big(a, (b \otimes v)\big) &\longmapsto (a \cdot b) \otimes v \end{aligned}$$

gegebenen Skalarmultiplikation einen A-Modul (nachrechnen).

Ist $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung von K-Vektorräumen, so ist $\mathrm{id}_A \otimes_K f\colon A \otimes_K V \longrightarrow A \otimes_K W$ eine A-lineare Abbildung (nachrechnen).

Man kann auf diese Weise das Tensorprodukt $A \otimes_K \cdot$ als Funktor von der Kategorie der K-Vektorräume in die Kategorie der A-Moduln auffassen.

Zum Beispiel erhält man so aus jedem $\mathbb{R}$-Vektorraum V den induzierten $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V$ und es gilt

$$\dim_\mathbb{C}(\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V) = \dim_\mathbb{R} V.$$

Jeder $\mathbb{R}$-lineare Endomorphismus f von V induziert einen $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus $\mathrm{id}_\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} f$ von $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V$. Dies kann manchmal nützlich sein, wenn man die Normalformentheorie über $\mathbb{C}$ auf Endomorphismen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen anwenden möchte.

Ausblick 4.2.14 (Dimensionen statt Ränge)**.** Betrachtet man allgemeiner das Tensorprodukt über Ringen, so kann man sich in vielen Situationen von Rängen von Moduln auf Dimensionen von Vektorräumen zurückziehen. Ist zum Beispiel V ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, so ist der durch Änderung

der Skalare gebildete $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ endlich-dimensional und dabei stimmt $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V)$ mit dem Rang (des freien Anteils) von V überein.

Argumente dieser Art können verwendet werden, um die Eindeutigkeitsaussage im Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (Satz 2.5.16) auf Dimensionsgleichheiten von Vektorräumen zu reduzieren.

Beispiel 4.2.15 (koordinatenfreie Beschreibung der Spur)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V. Dann ist

$$\operatorname{tr} f = E \circ \psi(f),$$

wobei $\psi\colon \operatorname{Hom}_K(V,V) \longrightarrow V^* \otimes_K V$ das Inverse des Isomorphismus (siehe unten)

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^* \otimes_K V &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V,V) \\ g \otimes v &\longmapsto \big(x \mapsto g(x) \cdot v\big) \end{aligned}$$

ist und

$$\begin{aligned} E\colon V^* \otimes_K V &\longrightarrow K \\ g \otimes v &\longmapsto g(v) \end{aligned}$$

die Auswertungsabbildung ist.

Warum ist φ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen? Da V endlich-dimensional ist, ist $\dim_K V^* = \dim_K V$, und damit

$$\begin{aligned} \dim_K(V^* \otimes_K V) &= \dim_K V^* \cdot \dim_K V = \dim_K V \cdot \dim_K V \\ &= \dim_K \operatorname{Hom}_K(V,V). \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass φ injektiv ist. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis von V^* (Beweis von Satz 4.1.4). Dann ist $(v_j^* \otimes v_k)_{(j,k)\in\{1,\ldots,n\}^2}$ eine Basis von $V^* \otimes_K V$ (Korollar 4.2.10). Sei außerdem $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit

$$0 = \varphi\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \cdot v_j^* \otimes v_k\Bigg) = \Bigg(x \mapsto \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \cdot v_j^*(x) \cdot v_k\Bigg).$$

Insbesondere erhalten wir für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ (durch Einsetzen von v_j), dass

$$0 = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} \cdot 1 \cdot v_k.$$

Da die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, folgt daraus $A_{j,1} = \cdots = A_{j,k} = 0$. Insgesamt liefert dies $A = 0$, was die Injektivität von φ beweist.

Wir erklären, warum tatsächlich die behauptete Gleichheit $\operatorname{tr} f = E \circ \psi(f)$ gilt: Sei $B := (v_1, \ldots, v_n)$ und $A := M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann ist

$$f = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} \cdot v_j^* \otimes v_k\Big)$$

(nachrechnen, dass beide Seiten auf der Basis B übereinstimmen). Also erhalten wir

$$\begin{aligned} E \circ \psi(f) &= E \circ \psi \circ \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} \cdot v_j^* \otimes v_k\Big) \\ &= E\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} \cdot v_j^* \otimes v_k\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} \cdot v_j^*(v_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} \cdot \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,j} \\ &= \operatorname{tr} M_{B,B}(f) \\ &= \operatorname{tr} f, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Damit erhält man eine Beschreibung von $\operatorname{tr} f$, die keine Wahl von Basen mehr enthält; da die Wahl einer Basis der Wahl eines Koordinatensystems entspricht, bezeichnet man dies als *koordinatenfreie Beschreibung von* $\operatorname{tr} f$. Für konkrete Berechnungen ist diese Beschreibung im Normalfall nicht nützlich. Möchte man aber die Spur auf allgemeinere Situationen verallgemeinern, so ist diese Beschreibung hilfreich.

Beispiel 4.2.16 (Dualität zwischen Tensorprodukten und Hom-Funktoren)**.** Sei K ein Körper. Der Tensorproduktbaukasten (Satz 4.2.9) liefert insbesondere einen kanonischen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_K(V \otimes_K W, U) \cong_K \operatorname{Hom}_K\big(W, \operatorname{Hom}_K(V, U)\big)$$

für alle K-Vektorräume U, V, W. Diese „Dualität“ zwischen den Funktoren $V \otimes_K \cdot$ und $\operatorname{Hom}_K(V, \cdot\,)$ ist ein Beispiel für eine sogenannte *Adjunktion* von Funktoren und spielt in der homologischen Algebra eine wichtige Rolle.

Beispiel 4.2.17 (stetige Funktionen auf Produkten)**.** Seien X und Y endliche Mengen. Dann zeigt der Tensorproduktbaukasten (Satz 4.2.9), dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{Abb}(Y, \mathbb{R}) &\longrightarrow \operatorname{Abb}(X \times Y, \mathbb{R}) \\ f \otimes g &\longmapsto \big((x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)\big) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist.

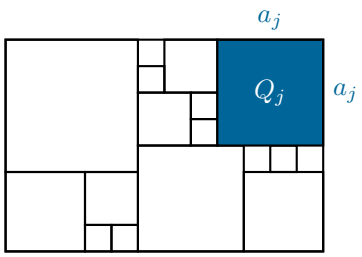


Abbildung 4.2.: Pflasterung eines Rechtecks durch Quadrate

Allgemeiner: Ist X ein topologischer Raum, so bildet die Menge $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf X eine $\mathbb{R}$-Algebra (bezüglich der punktweisen Verknüpfungen). Ist Y ein weiterer topologischer Raum, so kann man sich fragen, wie man die $\mathbb{R}$-Algebra $C(X \times Y, \mathbb{R})$ aus $C(X, \mathbb{R})$ und $C(Y, \mathbb{R})$ berechnen kann. Es stellt sich heraus, dass (für gutartige topologische Räume) die $\mathbb{R}$-Algebra $C(X \times Y, \mathbb{R})$ eine geeignete Vervollständigung des Tensorprodukts $C(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} C(Y, \mathbb{R})$ ist.

Beispiel 4.2.18 (Rechtecke [8, Miniature 12])**.** Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ eine irrationale Zahl und sei

$$R := [0, 1] \times [0, \alpha] \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann kann R *nicht* durch endlich viele (achsenparallele) Quadrate gepflastert werden, denn:

Angenommen, es gäbe eine Pflasterung von R durch endlich viele Quadrate $Q_1, \ldots, Q_N$ der Seitenlänge $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}_{>0}$ (Abbildung 4.2). Genauer: Für jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ gibt es einen Punkt $x_j \in \mathbb{R}^2$ mit

$$Q_j = x_j + [0, a_j] \times [0, a_j] \subset R$$

und es gilt

$$\bigcup_{j=1}^{N} Q_j = R \quad \text{und} \quad \forall_{j,k \in \{1,\ldots,N\}} \quad j \neq k \Longrightarrow Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \emptyset.$$

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum(!) und darin den $\mathbb{Q}$-Untervektorraum

$$V := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{1, \alpha, a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}.$$

Da die Zahl α irrational ist, ist die Familie $(1, \alpha)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ bzw. V linear unabhängig (Übungsaufgabe). Daher gibt es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit

$$f(1) = 1 \quad \text{und} \quad f(\alpha) = -1$$

(man ergänzt $(1, \alpha)$ zu einer Basis von V und gibt dann f auf den Basisvektoren geeignet vor).

Andererseits folgt aus der Tatsache, dass die Quadrate $Q_1, \ldots, Q_N$ das Rechteck R pflastern, die Gleichung

$$1 \otimes \alpha = \sum_{j=1}^{N} a_j \otimes a_j$$

in $V \otimes_{\mathbb{Q}} V$ (nachrechnen; man kann dies zum Beispiel induktiv für Pflasterungen von Rechtecken durch Rechtecke durch geeignete weitere Zerlegungen zeigen; geometrisch ist dies eine Verfeinerung der Flächeninhaltsgleichung $1 \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{N} a_j^2$, die man aus der Pflasterung erhält). Durch Anwendung der (wohldefinierten!) $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung

$$\begin{aligned} F \colon V \otimes_{\mathbb{Q}} V &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ v \otimes w &\longmapsto f(v) \cdot f(w) \end{aligned}$$

erhalten wir daher

$$\begin{aligned} -1 = 1 \cdot (-1) = f(1) \cdot f(\alpha) &= F(1 \otimes \alpha) \\ &= F\left(\sum_{j=1}^{N} a_j \otimes a_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} F(a_j \otimes a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} f(a_j) \cdot f(a_j) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

was nicht sein kann.

4.3 Das äußere Produkt

Analog zum Tensorprodukt ist das äußere Produkt eine Maschine, die multilineare alternierende Abbildungen in lineare Abbildungen verwandelt. Auch in diesem Fall ist es wichtiger zu wissen, *welche Funktionalität* diese Maschine bereitstellt als zu wissen *wie* sie von innen aussieht. Diese Funktionalität werden wir durch ? beschreiben.

4.3.1 Wozu das äußere Produkt?

Als erstes führen wir den Begriff der alternierenden Abbildung allgemein ein.

Definition 4.3.1 (alternierende Abbildung)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien V und W Vektorräume über K.

- Eine Abbildung $f\colon V^n \longrightarrow W$ ist *alternierend*, wenn folgendes gilt: Für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $\#\{v_1, \dots, v_n\} < n$ gilt

  $$f(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

  In anderen Worten: Stimmen mindestens zwei der Argumente überein, so ist das Ergebnis 0.

- Eine Abbildung $f\colon V^n \longrightarrow W$ ist *antisymmetrisch*, wenn folgendes gilt: Für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ und alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j < k$ ist

  $$f(v_1, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_{j-1}, v_k, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_j, v_{k+1}, \dots, v_n).$$

  In anderen Worten: Vertauscht man zwei Argumente, so ändert sich das Vorzeichen.

Beispiel 4.3.2 (alternierende Abbildungen)**.** Wir kennen bereits wichtige Beispiele für multilineare Abbildungen: Sei K ein Körper.

- Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist die Determinante $\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ eine n-lineare alternierende Abbildugn $K^n \times \cdots \times K^n \longrightarrow K$ (eine sogenannte *alternierende n-Form auf K^n*), wobei die Argumente jeweils den Zeilen der Matrizen entsprechen.

- Das *Kreuzprodukt*

  $$\begin{aligned} \times\colon K^3 \times K^3 &\longrightarrow K^3 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  ist bilinear und alternierend. Auf die geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts werden wir in Beispiel 4.3.12 genauer eingehen.

- Die Abbildung $+\colon K \times K \longrightarrow K$ ist im allgemeinen *nicht* alternierend. Aber zum Beispiel ist $+\colon \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ alternierend.

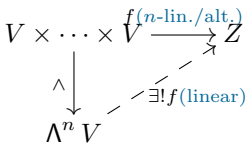
- Das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bilinear, aber *nicht* alternierend.

Bemerkung 4.3.3 (alternierend vs. antisymmetrisch)**.** Wie in Bemerkung I.5.4.2 gilt allgemein: Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien V und W Vektorräume über K und sei $f\colon V^n \longrightarrow W$ eine n-lineare Abbildung. Ist f alternierend, so ist f auch antisymmetrisch. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nur, wenn die Charakteristik von K *nicht* 2 ist.

Satz 4.3.4 (äußeres Produkt)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gibt es einen K-Vektorraum $\bigwedge^n V$ und eine n-lineare und alternierende Abbildung $\wedge\colon V^n \longrightarrow \bigwedge^n V$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum Z und jede n-lineare und alternierende Abbildung $f\colon V^n \longrightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\wedge\colon \bigwedge^n V \longrightarrow Z$ mit

$$f_\wedge \circ \wedge = f.$$



Der K-Vektorraum $\bigwedge^n V$ und die Abbildung $\wedge\colon V^n \longrightarrow \bigwedge^n V$ sind durch diese universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Man bezeichnet $\bigwedge^n V$ als n-faches äußeres Produkt von V über K. *Außerdem verwendet man die Konvention $\bigwedge^0 V := K$.*

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt mit dem Standardargument für universelle Eigenschaften (Beweis von Satz 2.3.27).

Die *Existenz* reichen wir in Kapitel 4.3.3 durch eine konkrete (aber recht unförmige, analog zum Tensorprodukt) Konstruktion nach. □

In der Notation des äußeren Produkt verzichtet man auf die Angabe des Grundkörpers, da bei der Verwendung des äußeren Produkts (im Gegensatz zum Tensorprodukt) im Normalfall keine Änderung der Skalare vorgenommen wird.

Caveat 4.3.5. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei V ein K-Vektorraum. Ist $\wedge\colon V^n \longrightarrow \bigwedge^n V$ die Strukturabbildung in das n-fache äußere Produkt von V und sind $v_1, \ldots, v_n \in V$, so schreiben wir

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := \wedge(v_1, \ldots, v_n) \in \bigwedge^n V.$$

Im allgemeinen ist *nicht* jedes Element von $\bigwedge^n V$ von dieser Form (im allgemeinen benötigt man Linearkombinationen solcher elementaren Produkte). Ist $f\colon V^n \longrightarrow Z$ eine n-lineare und alternierende Abbildung von K-Vektorräumen, so schreibt man normalerweise

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^n V &\longrightarrow Z \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &\longmapsto f(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

für die induzierte lineare Abbildung $f_\wedge$ (obwohl ja nicht alle Elemente auf der linken Seite elementare Produkte sind ... aber wegen der Eindeutigkeit von $f_\wedge$ ist $f_\wedge$ durch diese Beschreibung bereits eindeutig bestimmt).

Beispiel 4.3.6 (Rechnen mit äußeren Produkten)**.**

- Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Determinante $\det\colon \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ induziert eine K-lineare Abbildung $\bigwedge^n(K^n) \longrightarrow K$.
- Das Kreuzprodukt $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ induziert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
- Zum Beispiel gilt in $\bigwedge^2(\mathbb{R}^2)$, dass

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= 0,\end{aligned}$$

  da die Abbildung $\wedge\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ bilinear und alternierend ist.

4.3.2 Rechnen mit äußeren Produkten

Aus der universellen Eigenschaft des äußeren Produkts lassen sich die folgenden Eigenschaften und Konstruktionsprinzipien ableiten. Diese sind für die meisten Anwendungen völlig ausreichend.

Satz 4.3.7 (der Äußere-Produkt-Baukasten)**.** *Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K.*

1. Funktorialität. *Ist $f\colon V \longrightarrow W$ linear und $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist*

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge^n f\colon \bigwedge^n V &\longrightarrow \bigwedge^n W \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &\longmapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_n)\end{aligned}$$

   eine wohldefinierte K-lineare Abbildung. Dabei gilt $\bigwedge^n \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\bigwedge^n V}$ und diese Konstruktion ist mit Abbildungskomposition verträglich.

2. Niedrige äußere Produkte. *Der K-Vektorraum V erfüllt zusammen mit $\mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ die universelle Eigenschaft des einfachen äußeren Produkts $\bigwedge^1 V$. Insbesondere ist $\bigwedge^1 V \cong_K V$.*

3. Determinante und äußere Produkte. *Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so erfüllt K zusammen mit der Abbildung* $\det\colon (K^n)^n \longrightarrow K$ *die universelle Eigenschaft des n-fachen äußeren Produkts von K^n über K. Insbesondere ist*

$$\begin{aligned} \bigwedge^n K^n &\longrightarrow K \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_n &\longmapsto \det \begin{pmatrix} v_1^\mathsf{T} \\ \vdots \\ v_d^\mathsf{T} \end{pmatrix} = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

4. Das äußere Produkt zur Dimension. *Ist $n := \dim_K V \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\bigwedge^n V \cong_K K$.*

5. Hohe äußere Produkte. *Ist $\dim_K V < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \dim_K V$, so folgt*

$$\bigwedge^n V \cong_K \{0\}.$$

6. Äußere Produkte des Grundkörpers. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\bigwedge^n K \cong_K \begin{cases} K & \text{falls } n \in \{0,1\} \\ \{0\} & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

7. Verträglichkeit mit direkten Summen. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\begin{aligned} \bigwedge^n V \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} \left(\bigwedge^k V \otimes_K \bigwedge^{n-k} W\right) \oplus \bigwedge^n W &\longrightarrow \bigwedge^n (V \oplus W) \\ (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \otimes (w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n) &\longmapsto (v_1, 0) \wedge \cdots \wedge (v_k, 0) \\ &\qquad \wedge (0, w_{k+1}) \wedge \cdots \wedge (0, w_n) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Zu 1. Diese Aussagen erhält man durch direktes Nachrechnen.

Zu 2. Da 1-lineare Abbildungen dasselbe sind wie lineare Abbildungen, lässt sich leicht überprüfen, dass V zusammen mit id_V die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^1 V$ besitzt.

Zu 3. Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass der Zielraum der Grundkörper K ist: Sei $f\colon (K^n)^n \longrightarrow K$ eine n-lineare und alternierende Abbildung. Dann ist (Satz I.5.4.3)

$$f = f(e_1, \ldots, e_n) \cdot \det\colon (K^n)^n \longrightarrow K.$$

Also gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon K \longrightarrow K$ mit $\overline{f} \circ \det = f$, nämlich $\overline{f} = f(e_1, \ldots, e_n) \cdot \mathrm{id}_K$.

Für allgemeine Zielräume kann man entweder den Beweis von Satz I.5.4.3 entsprechend anpassen oder wie folgt vorgehen: Sei Z ein K-Vektorraum und sei $f\colon (K^n)^n \longrightarrow Z$ eine n-lineare und alternierende Abbildung. Durch Wahl einer Basis von Z erhalten wir einen Isomorphismus $Z \cong_K \bigoplus_I K$. Für jedes $i \in I$ wenden wir den Spezialfall, dass der Zielraum K ist, auf die Komposition $\pi_i \circ f$ an, wobei $\pi_i\colon Z \longrightarrow K$ die Projektion auf den i-ten Summanden bezeichnet. Also ist

$$\pi_i \circ f = \big(\pi_i \circ f(e_1, \dots, e_n)\big) \cdot \det .$$

Setzen wir dies zusammen, so erhalten wir für alle $(v_1, \dots, v_n) \in (K^n)^n$, dass

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= f(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \\ &= \big(\lambda \mapsto \lambda \cdot f(e_1, \dots, e_n)\big) \circ \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \end{aligned}$$

(und offenbar gibt es keine weitere lineare Abbildung $K \longrightarrow Z$ mit dieser Eigenschaft).

Daher erfüllt K zusammen mit der n-linearen und alternierenden Abbildung $\det\colon (K^n)^n \longrightarrow K$ die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^n(K^n)$.

Zu 4. Wegen $V \cong_K K^n$ folgt dies aus dem ersten und dem dritten Teil.

Zu 5. Es genügt zu zeigen, dass $\{0\}$ (zusammen mit der Nullabbildung $V^n \longrightarrow \{0\}$) die universelle Eigenschaft von $\bigwedge^n V$ erfüllt. Dafür brauchen wir nur nachzuweisen, dass es aus V^n als einzige n-lineare und alternierende Abbildung nur die Nullabbildung gibt.

Sei also Z ein K-Vektorraum und sei $f\colon V^n \longrightarrow Z$ eine n-lineare und alternierende Abbildung. Seien nun $v_1, \dots, v_n \in V$. Wegen $n > \dim_K V$ ist die Familie $(v_1, \dots, v_n)$ in V linear abhängig. Daher kann einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen dargestellt werden; ohne Einschränkung sei dies v_1. Es gibt somit $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \cdot v_j .$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= f\left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j \cdot v_j, v_2, \dots, v_n\right) \\ &= \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \cdot f(v_j, v_2, \dots, v_n) && (f \text{ ist } n\text{-linear}) \\ &= \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \cdot 0 && (f \text{ ist alternierend}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $f = 0$, wie behauptet.

Zu 6. Dies ist eine Zusammenfassung der vorigen Teile im Spezialfall, dass der betrachtete Vektorraum der Grundkörper K ist.

Zu 7. Dass die angegebene Abbildung wohldefiniert und linear ist, kann man leicht ablesen (nachrechnen). Um zu zeigen, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt, geben wir das Inverse explizit an:

$$\begin{aligned} \bigwedge^n(V \oplus W) &\longrightarrow \bigwedge^n V \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\bigwedge^k V \otimes_K \bigwedge^{n-k} V) \oplus \bigwedge^n W \\ (v_1, w_1) \wedge \cdots \wedge (v_n, w_n) &\longmapsto \sum_{S \in P(\{1,\ldots,n\})} \operatorname{sgn}(\pi_S) \cdot (v_{j_{S,1}} \wedge \cdots \wedge v_{j_{S,|S|}}) \\ &\qquad \otimes (w_{j_{S,|S|+1}} \wedge \cdots \wedge w_{j_{S,n}}); \end{aligned}$$

dabei haben wir die folgende Notation verwendet: Ist $S \in P(\{1, \ldots, n\})$, so schreiben wir

$$S = \{j_{S,1}, \ldots, j_{S,|S|}\} \quad \text{und} \quad \{1, \ldots, n\} \setminus S = \{j_{S,|S|+1}, \ldots, j_{S,n}\}$$

mit $j_{S,1} < \cdots < j_{S,|S|}$ und $j_{S,|S|+1} < \cdots < j_{S,n}$. Außerdem sei π_S die durch $k \mapsto j_{S,k}$ gegebene Permutation von $\{1, \ldots, n\}$. Der obige Kandidat für das Inverse liefert dann eine wohldefinierte lineare Abbildung (nachrechnen).

Nach Konstruktion ist diese Abbildung offensichtlich ein einseitiges Inverses der in der Behauptung des siebten Teils angegebenen Abbildung. Für die umgekehrte Komposition ist eine mühsame Induktion notwendig (dies wollen wir hier aber nicht im Detail ausführen). □

Korollar 4.3.8 (Dimension äußerer Produkte)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $d := \dim_K V > 0$ und sei $n \in \{1, \ldots, d\}$. Dann gilt: Ist $(v_1, \ldots, v_d)$ eine Basis von V, so ist die Familie*

$$(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_n})_{j_1 < \cdots < j_n \in \{1,\ldots,d\}}$$

eine Basis von $\bigwedge^n V$. Insbesondere folgt

$$\dim_K \bigwedge^n V = \binom{d}{n}.$$

Beweis. Wegen der Funktorialität der äußeren Produkte genügt es, diese Aussage für den K-Vektorraum K^d zu beweisen. In diesem Fall kann man zum Beispiel induktiv (über d) mithilfe der Verträglichkeit mit direkten Summen (Satz 4.3.7, angewendet auf $\bigwedge^n(K^{d-1} \oplus K)$) argumentieren. Alternativ kann man auch von Hand über die universelle Eigenschaft nachrechnen, dass die gegebene Familie eine Basis von $\bigwedge^n V$ ist.

Die Behauptung über die Dimension folgt aus der Behauptung über die Basen, da es genau $\binom{d}{n}$ verschiedene streng monoton wachsende Folgen der Länge n in $\{1, \dots, d\}$ gibt. □

In der Differentialgeometrie (Beispiel 4.3.14) treten Dualräume $(\Lambda^n V)^*$ von äußeren Produkten in natürlicher Weise auf. In diesem Kontext ist es nützlich zu wissen, dass man solche Dualräume alternativ auch als äußeres Produkt der Dualräume auffassen kann:

Korollar 4.3.9 (äußere Produkte und Dualräume)**.** *Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $n \in \{0, \dots, \dim_K V\}$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \Lambda^n(V^*) &\longrightarrow \left(\Lambda^n V\right)^* \\ f_1 \wedge \dots \wedge f_n &\longmapsto \Bigg(v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} f_j(v_{\sigma(j)})}_{=\det\left(f_j(v_k)\right)_{j,k \in \{1,\dots,n\}}}\Bigg) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Dass die angegebene Abbildung wohldefiniert und linear ist, kann man wieder leicht ablesen (nachrechnen).

Warum handelt es sich dabei um einen Isomorphismus? Wir bezeichnen die angegebene Abbildung mit φ. Sei $d := \dim_K V$, sei $(v_1, \dots, v_d)$ eine Basis von V und sei $(v_1^*, \dots, v_d^*)$ die zugehörige duale Basis von V. Aus dem vorigen Korollar 4.3.8 erhalten wir daraus durch geeignete äußere Produkte bzw. Dualisieren Basen von $\Lambda^n(V^*)$ bzw. $(\Lambda^n V)^*$. Für alle $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, d\}$ und alle $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, d\}$ mit $j_1 < \dots < j_n$ und $k_1 < \dots < k_n$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\varphi(v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_n}^*)\right)(v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{r=1}^{n} v_{j_r}^*(v_{k_{\sigma(r)}}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } (j_1, \dots, j_n) \neq (k_1, \dots, k_n) \\ 1 & \text{falls } (j_1, \dots, j_n) = (k_1, \dots, k_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt, dass $\varphi(v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_n}^*)$ das duale Basiselement zu $v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_n}$ ist. Also bildet φ eine Basis von $\Lambda^n(V^*)$ auf eine Basis von $(\Lambda^n V)^*$ ab und ist somit insbesondere ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. □

4.3.3 Konstruktion des äußeren Produkts

Um das äußere Produkt in Anwendungen nutzen zu können, müssen wir nachweisen, dass es tatsächlich existiert. Wir gehen dabei wie bei der Konstruktion des Tensorprodukts vor: Wir konstruieren einen viel zu großen Vektorraum

und erzwingen durch eine geeignete Quotientenbildung die gewünschten Multilinearitäts- und Alternierungseigenschaften.

Beweis der Existenzaussage aus Satz 4.3.4. Wir betrachten den Vektorraum

$$\Lambda^n V := \left(\bigoplus_{V^n} K\right) \Big/ N,$$

wobei (zur Erzwingung der n-linearen und alternierenden Interaktion)

$$\begin{aligned} N := \mathrm{Span}_K\Big(& \big\{ e_{(v_1,\dots,v_j+v'_j,\dots,v_n)} - e_{(v_1,\dots,v_j,\dots,v_n)} - e_{(v_1,\dots,v'_j,\dots,v_n)} \\ & \quad \big| \; j \in \{1,\dots,n\}, v_1,\dots,v_n \in V, v'_j \in V \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(v_1,\dots,\lambda\cdot v_j,\dots,v_n)} - \lambda \cdot e_{(v_1,\dots,v_n)} \\ & \quad \big| \; j \in \{1,\dots,n\}, v_1,\dots,v_n \in V, \lambda \in K \big\} \\ & \cup \big\{ e_{(v_1,\dots,v_n)} \;\big|\; v_1,\dots,v_n \in V, |\{v_1,\dots,v_n\}| < n \big\}\Big). \end{aligned}$$

Zusätzlich definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge\colon V^n &\longrightarrow \Lambda^n V \\ (v_1,\dots,v_n) &\longmapsto [e_{(v_1,\dots,v_n)}]. \end{aligned}$$

Wie im Fall der Konstruktion des Tensorprodukts rechnet man nun nach, dass $\Lambda^n V$ zusammen mit dieser Abbildung $\wedge$ die universelle Eigenschaft des n-fachen äußeren Produkts von V erfüllt. Damit ist die Existenz des n-fachen äußeren Produkts gezeigt. □

4.3.4 Anwendungen des äußeren Produkts

Nach Definition verwandeln äußere Produkte multilineare alternierende Abbildungen in lineare Abbildungen, was in vielen Situationen nützlich ist. Darüberhinaus gibt es noch viele spezifischere Anwendungen der äußeren Produkte in der Mathematik:

Beispiel 4.3.10 (koordinatenfreie Beschreibung der Determinante)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann ist $\Lambda^n V \cong_K K$ und daher gibt es genau ein $\Delta(f) \in K$ mit

$$\Lambda^n f = \Delta(f) \cdot \mathrm{id}_{\Lambda^n V}\colon \Lambda^n V \longrightarrow \Lambda^n V.$$

Dabei ist $\Delta(f) = \det f$, denn: Sei B eine Basis von V und sei $A := M_{B,B}(f) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ die zugehörige darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B. Aufgrund der Funktorialität von Λ^n gilt

$$\Lambda^n(T_{B,E_n}) \circ \Lambda^n f = \Lambda^n(L(A)) \circ \Lambda^n(T_{B,E_n}),$$

und damit (nachrechnen; die Abbildung T_{B,E_n} ist ein Isomorphismus!)

$$\Delta(f) = \Delta\big(L(A)\big).$$

Nach Definition der Determinante von Endomorphismen gilt $\det f = \det A$; es genügt daher $\Delta(L(A)) = \det A$ zu zeigen: Da die Abbildung

$$\begin{aligned} \Delta' \colon (K^n)^n &\longrightarrow K \\ (v_1, \dots, v_n) &\longmapsto \Delta\big(L(v_1 \mid \cdots \mid v_n)\big) \end{aligned}$$

n-linear und alterierend ist und $\Delta'(e_1, \dots, e_n) = 1$ erfüllt (nachrechnen), folgt aus der Eindeutigkeit der Determinantenfunktion, dass

$$\forall_{v_1,\dots,v_n \in K^n} \quad \Delta'(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n)^\mathsf{T} = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n)$$

gilt. Insbesondere ist $\Delta\big(L(A)\big) = \Delta'(A_{*,1}, \dots, A_{*,n}) = \det A$, wie gewünscht.

Beispiel 4.3.11 (Orientierungen)**.** Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $n := \dim_{\mathbb{R}} V \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir definieren wie folgt eine Relation „$\sim$“ auf der Menge der Basen von V: Sind B und C Basen von V, so gelte genau dann $B \sim C$, wenn $\det T_{B,C} > 0$ ist.

Dann ist „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V (nachrechnen). Die Äquivalenzklassen von Basen von V bezüglich „$\sim$“ bezeichnet man als *Orientierungen von* V. Man kann zeigen, dass V genau zwei Orientierungen besitzt (nachrechnen).

Zum Beispiel liefern die Basen (e_1, e_2, e_3) und (e_2, e_1, e_3) verschiedene Orientierungen von $\mathbb{R}^3$; identifiziert man

- den Daumen mit e_1,
- den Zeigefinger mit e_2 und
- den Mittelfinger mit e_3,

so entspricht der Orientierungsunterschied zwischen den zugehörigen Orientierungen dieser Basen dem Orientierungsunterschied zwischen der linken und der rechten Hand (Abbildung 4.3).

Wir gehen auf den Zusammenhang zu äußeren Produkten ein: Da $\mathbb{R}$ zusammen mit $\det \colon V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die universelle Eigenschaft von $\Lambda^n V$ erfüllt (Satz 4.3.7; alternativ kann man auch die koordinatenfreie Beschreibung der Determinanten aus Beispiel 4.3.10 nutzen), kann man dies auch wie folgt umformulieren: Sind $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $C = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V, so liefern B und C genau dann dieselbe Orientierung von V, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \lambda \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$$

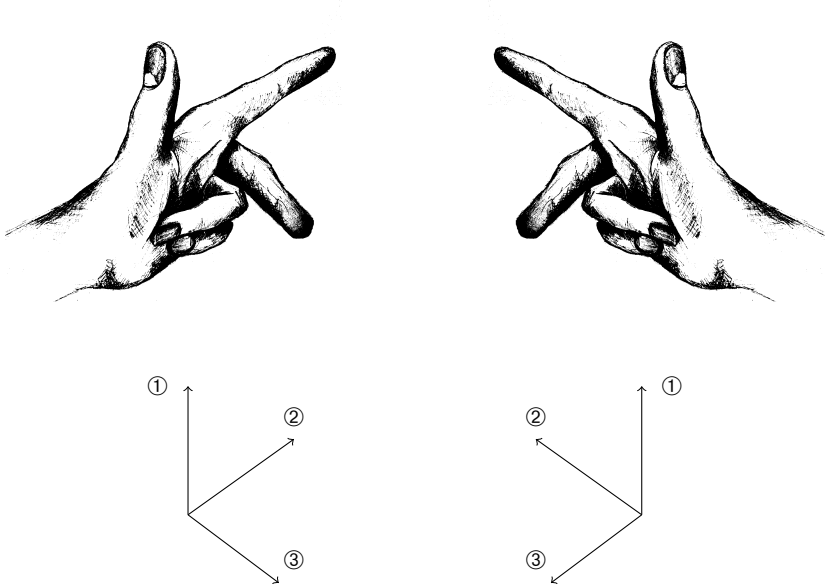


Abbildung 4.3.: Orientierungen und Hände

(in $\bigwedge^n V \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$) gibt. Die Wahl einer Orientierung von V entspricht also gerade der Wahl eines Isomorphismus $\bigwedge^n V \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. eines nicht-trivialen Elements von $(\bigwedge^n V)^*$.

Beispiel 4.3.12 (Kreuzprodukt)**.** Das *Kreuzprodukt*

$$\begin{aligned} \times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist bilinear und alternierend und induziert somit die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \times_\wedge\colon \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \wedge y &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) = \binom{3}{2} = 3$ und

$$e_1 \times_\wedge e_2 = e_3, \quad e_1 \times_\wedge e_3 = -e_2, \quad e_2 \times_\wedge e_3 = e_1$$

ist $\times_\wedge\colon \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sogar ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Wir gehen kurz auf geometrische Aspekte des Kreuzprodukts ein: Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann zeigt eine Rechnung, dass der Vektor $x \times y \in \mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ orthogonal zu x und y ist. Ist (x, y) eine linear unabhängige Familie in $\mathbb{R}^3$, so ist $(x, y, x \times y)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und diese Basis liefert dieselbe Orientierung wie (e_1, e_2, e_3). Die euklidische Länge des Vektors $x \times y$ entspricht dabei dem Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Beispiel 4.3.13 (die Volumenform)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und es sei eine Orientierung auf V gegeben. Dann gibt es genau ein $\omega \in (\Lambda^n V)^*$ mit folgender Eigenschaft: Für jede positiv orientierte Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gilt

$$\omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sqrt{\det\big((\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k \in \{1,\ldots,n\}}\big)}.$$

Dabei bedeutet „positiv orientiert“, dass die von der entsprechenden Basis induzierte Orientierung mit der gegebenen Orientierung von V übereinstimmt. Diese Form ω bezeichnet man als *Volumenform von* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Der Name kommt daher, dass der Wurzelausdruck auf der rechten Seite das euklidische Volumen des von $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Parallelogramms/-epipeds/-otops ist.

Eindeutigkeit von ω. Der euklidische Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis (Korollar 1.2.10). Durch Vorzeichenänderung oder Änderung der Reihenfolge der Basisvektoren erhält man so auch eine positiv orientierte Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Dann ist die einelementige Familie $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ eine Basis von $\Lambda^n V$ (Korollar 4.3.8). Also kann es höchstens eine solche Form ω geben.

Existenz von ω. Sei wieder $B := (v_1, \ldots, v_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Wir definieren dann $\omega\colon \Lambda^n V \longrightarrow \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$\omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) := 1.$$

Ist $C := (w_1, \ldots, w_n)$ eine positiv orientierte Basis von V, so gilt wegen der koordinatenfreien Beschreibung der Determinante, dass

$$\begin{aligned} \omega(w_1 \wedge \cdots \wedge w_n) &= \omega \circ \Lambda^n(T_{B,C})(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &= \det(T_{B,C}) \cdot \omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &= \det T_{B,C}. \end{aligned}$$

Indem man zunächst den Spezialfall $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ betrachtet (und sich dann mit Korollar 1.2.11 wieder in den allgemeinen Fall begibt), sieht man, dass

$$\det T_{B,C}^2 = \det\big((\langle v_j, v_k \rangle)_{j,k \in \{1,\ldots,n\}}\big)$$

gilt. Dies zeigt die Existenz von ω.

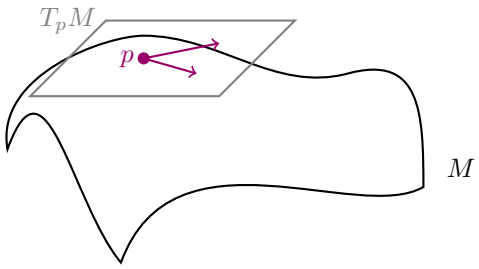


Abbildung 4.4.: Tangentialräume, schematisch

Beispiel 4.3.14 (Differentialformen)**.** In der Differentialgeometrie untersucht man die geometrischen und analytischen Eigenschaften „gekrümmter Räume“, sogenannter (glatter) Mannigfaltigkeiten. Grob gesagt ist eine *glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit* ein gutartiger topologischer Raum, der lokal (glatt) wie $\mathbb{R}^n$ aussieht.

Den Grundgedanken der linearen Approximation kann man auch auf diese Situation erweitern: Zu jedem Punkt p in einer solchen Mannigfaltigkeit M gibt es eine „beste lineare Approximation“ an die Mannigfaltigkeit M, den *Tangentialraum* T_pM (Abbildung 4.4). Dabei handelt es sich um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} T_pM = n$. Die Familie $(T_pM)_{p\in M}$ der Tangentialräume kann wieder zu einem mathematischen Objekt zusammengefasst werden, zum sogenannten *Tangentialbündel TM von M*.

Um zum Beispiel das Volumen von Mannigfaltigkeiten zu definieren/berechnen oder Flüsse etc. auf Mannigfaltigkeiten zu beschreiben, ist es nötig, die reelle Analysis von Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen.

Dabei stellt es sich heraus, dass äußere Produkte von Tangentialräumen (genauer gesagt die Vektorraumbündel $(\Lambda^k TM)^*$ über M und ihre Schnitte) genau das richtige Orientierungs- und Transformationsverhalten liefern, das man von der entsprechenden Differentiations- und Integrationstheorie geometrisch erwarten würde. Dies führt zu den sogenannten *Differentialformen* auf Mannigfaltigkeiten.

Literaturaufgabe (Vorbereitung auf die Analysis auf Mannigfaltigkeiten)**.** Überfliegen Sie die linear-algebraischen Abschnitte des Buchs *Vektoranalysis* von K. Jänich [4].

Anmerkung für Lehramtsstudenten. Die Berechnung von Oberflächen, Volumina etc. und das Untersuchen von Krümmungseigenschaften (warum gibt es keine „vernünftigen“ ebenen Landkarten?!) gehören zu den klassischen Fragestellungen der Geometrie und sind somit ein Teil der mathematischen Allgemeinbildung. Auch wenn nicht zu erwarten ist, dass der Lehrplan an

Gymnasien plötzlich die Behandlung von Differentialformen vorsehen wird, ist es doch ausgesprochen nützlich zu wissen, wie man geometrische Kenndaten von komplizierteren geometrischen Objekten präzise definieren und ausrechnen kann.

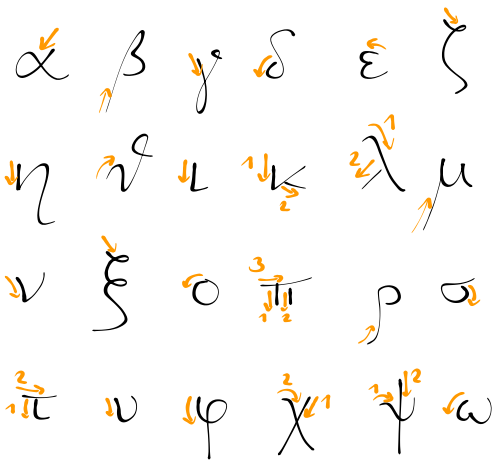
A
Anhang

Überblick über dieses Kapitel.

A.1	Das griechische Alphabet	A.2
A.2	Die komplexen Zahlen	A.3
A.3	Elementare Analysis von Sinus und Kosinus	A.7
A.4	Anwendungen der Jordanschen Normalform	A.9
A.5	Die LA-Matrix	A.12

A.1 Das griechische Alphabet

Symbol		Name	TEX-/LATEX-Kommando	
A	α	alpha	A	\alpha
B	β	beta	B	\beta
Γ	γ	gamma	\Gamma	\gamma
Δ	δ	delta	\Delta	\delta
E	ε, ϵ	epsilon	E	\varepsilon , \epsilon
Z	ζ	zeta	Z	\zeta
H	η	eta	H	\eta
Θ	ϑ, θ	theta	\Theta	\vartheta , \theta
I	ι	iota	I	\iota
K	κ	kappa	K	\kappa
Λ	λ	lambda	\Lambda	\lambda
M	μ	my	M	\mu
N	ν	ny	N	\nu
Ξ	ξ	xi	\Xi	\xi
O	o	omikron	O	o
Π	π	pi	\Pi	\pi
P	ϱ, ρ	rho	P	\varrho , \rho
Σ	σ, ς	sigma	\Sigma	\sigma , \varsigma
T	τ	tau	T	\tau
Y	υ	ypsilon	Y	\upsilon
Φ	φ, ϕ	phi	\Phi	\varphi , \phi
X	χ	chi	X	\chi
Ψ	ψ	psi	\Psi	\psi
Ω	ω	omega	\Omega	\omega



A.2 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen sind bezüglich der Ordnungsrelation vollständig. Aus algebraischer Sicht sind sie jedoch nicht vollständig genug: Nicht alle polynomialen Gleichungen mit reellen Koeffizienten besitzen eine reelle Nullstelle. Ein Körper ist algebraisch abgeschlossen, wenn jede (nicht-konstante) polynomiale Gleichung mindestens eine Lösung besitzt. Die komplexen Zahlen sind die „kleinste“ Erweiterung der reellen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Faszinierenderweise genügt es dabei, geeignet eine Zahl i hinzuzufügen, die $i^2 = -1$ erfüllt.

Definition A.2.1 (algebraisch abgeschlossen)**.** Ein Körper K ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn folgendes gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und alle $a_0, \dots, a_n \in K$ mit $a_n \neq 0$ gibt es (mindestens) ein $x \in K$ mit

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^k = 0.$$

Beispiel A.2.2.

- Die rationalen Zahlen sind *nicht* algebraisch abgeschlossen, da es zum Beispiel kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ gibt (Beispiel I.1.4.9).
- Die reellen Zahlen sind *nicht* algebraisch abgeschlossen, da es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$ gibt (Bemerkung I.A.5.10).

Satz A.2.3 (die komplexen Zahlen [3])**.** *Sei* $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*. Wir bezeichnen* $\mathbb{C}$ *als Menge der* komplexen Zahlen*. Bezüglich den Operationen*

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto (x+x', y+y') \\ \cdot\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y) \end{aligned}$$

bildet $\mathbb{C}$ *einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit additiv neutralem Element* $(0,0)$ *und multiplikativ neutralem Element* $(1,0)$*. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

ist injektiv und mit Addition bzw. Multiplikation verträglich. Elemente im Bild dieser Abbildung heißen reell*. Bis auf „kanonischen Isomorphismus“ ist* $\mathbb{C}$ *der „kleinste“ algebraisch abgeschlossene Körper, der* $\mathbb{R}$ *umfasst.*

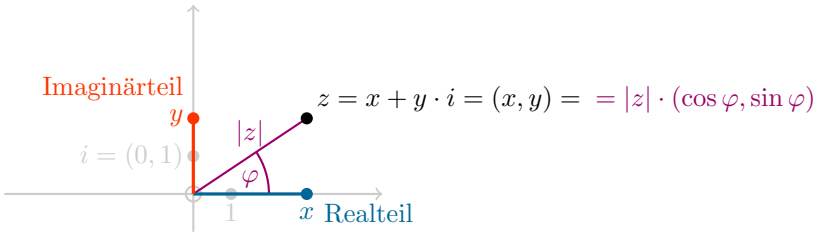


Abbildung A.1.: komplexe Zahlen, schematisch

Beispiel A.2.4 (die imaginäre Einheit, Realteil/Imaginärteil)**.** Man bezeichnet

$$i := (0,1) \in \mathbb{C}$$

als *imaginäre Einheit*. Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man (Abbildung A.1)

- x als *Realteil von* z und
- y als *Imaginärteil von* z.

Wir schreiben dann für $(x, y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ auch

$$x + y \cdot i := (x, y) \in \mathbb{C};$$

diese Notation ist mit der kanonischen Inklusion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ und den Rechenoperationen verträglich (nachrechnen!).

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &= (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es *keine* totale Ordnung auf $\mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht (Bemerkung I.A.5.10).

Beispiel A.2.5 (Summe von Quadraten)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) &= x^2 + y \cdot i \cdot x - x \cdot y \cdot i - y \cdot i \cdot y \cdot i \\ &= x^2 + x \cdot y \cdot i - x \cdot y \cdot i - y^2 \cdot i^2 \\ &= x^2 + 0 - y^2 \cdot (-1) \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Beispiel A.2.6 (komplexe Division)**.** Die Berechnung aus Beispiel A.2.5 ist insbesondere hilfreich, um komplexe Divisionen durch geeignetes Erweitern von Hand zu berechnen: Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i} &= \frac{1\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} && (\text{?} &&)\\ &= \frac{2-i}{4+1} && (\text{?} &&)\\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\cdot i.\end{aligned}$$

Also hat $1/(2+i)$ den Realteil ? und den Imaginärteil ?

Ausblick A.2.7 (Absolutbetrag)**.** Die „Größe“ von reellen bzw. komplexen Zahlen wird durch den (Absolut-)Betrag gemessen: Man definiert

$$\begin{aligned}|\cdot|\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\\ x &\longmapsto \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0\\ -x & \text{falls } x < 0\end{cases}\\ |\cdot|\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\\ (x,y) &\longmapsto \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (\text{„Pythagoras“})\end{aligned}$$

Diese Funktionen erfüllen die *Dreiecksungleichung*

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

für alle reellen/komplexen Zahlen x und y. Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind bezüglich diesen Betragsfunktionen im analytischen Sinne vollständig.

Ausblick A.2.8 (Anschauung und Polardarstellung)**.** Wenn man $\mathbb{C}$ als reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ veranschaulicht, entspricht die Addition auf $\mathbb{C}$ der Vektoraddition auf $\mathbb{R}^2$ und damit der „Verschiebung“ (Abbildung A.2).

Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ entspricht in diesem Bild der „Streckung und Rotation“. Genauer lässt sich dies in Polarkoordinaten erklären: Mit analytischen Mitteln kann man zeigen, dass jede komplexe Zahl $z = x + y\cdot i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der *Polardarstellung*

$$z = |z|\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi) = |z|\cdot e^{i\cdot\varphi}$$

geschrieben werden kann, wobei $\varphi = \arctan(x/y)$; ist $y = 0$, so setzt man $\varphi = 0$. Dann gilt: Sind $r, r', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$, so ist

$$(r\cdot e^{i\cdot\varphi})\cdot(r'\cdot e^{i\cdot\varphi'}) = (r\cdot r')\cdot e^{i\cdot(\varphi+\varphi')};$$

der vordere Term ist dabei eine „Streckung“, der hintere eine „Rotation“.

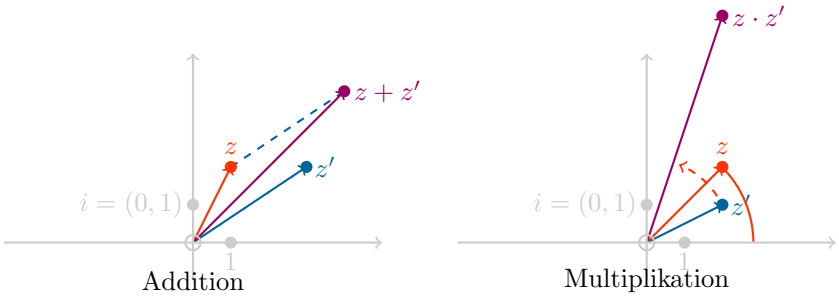


Abbildung A.2.: Addition/Multiplikation komplexer Zahlen, schematisch

Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl stimmt dabei mit dem euklidischen Abstand zuR 0 überein (nach dem Satz des Pythagoras).

Bemerkung A.2.9 (komplexe Konjugation)**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

wird als *komplexe Konjugation* bezeichnet. Geometrisch handelt es sich dabei um die Spiegelung an der reellen Achse. Algebraisch betrachtet ist die komplexe Konjugation ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{C}$ (d.h. mit Addition und Multiplikation verträglich). Dieser erlaubt es, viele Aspekte des Zusammenspiels zwischen reellen und komplexen Zahlen zu beschreiben. Zum Beispiel gilt (nachrechnen):

- Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist z genau dann reell, wenn $\overline{z} = z$ ist.
- Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z + \overline{z}$ reell.
- Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{z}$ reell und nicht-negativ. Es ist $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

A.3 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus

Im folgenden ist der analytische Zugang zu Sinus, Kosinus und π kurz zusammengefasst. Der Zusammenhang mit der Anschauung zu Winkeln am Kreisbogen ergibt sich daraus erst durch Berechnung der Länge geeigneter Kreisbögen (s. Analysis I/II).

Definition A.3.1 (Sinus, Kosinus)**.** Die Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind durch die folgenden (überall absolut konvergenten!) Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Graphische Darstellung. Auswertung der obigen Ausdrücke an vielen Punkten ergibt die graphische Darstellung von cos bzw. sin in Abbildung A.3.

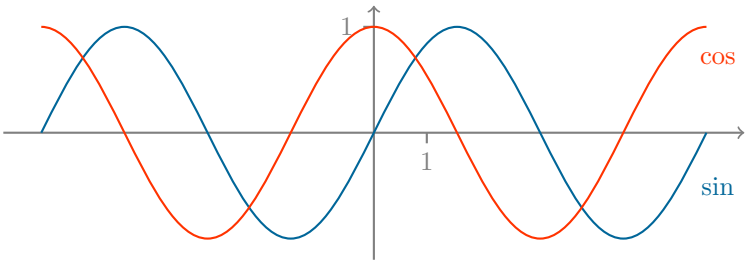


Abbildung A.3.: Graphische Darstellung von cos und sin

Symmetrie. Nach Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Differenzierbarkeit/Ableitungen. Aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen erhalten wir: Die Funktionen cos und sin sind glatt und für die Ableitungen gilt (gliedweises Differenzieren)

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Quadratsumme. Es gilt

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

denn $(\cos^2 + \sin^2)' = 0$ und $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$.

Die Zahl π und ihre Hälfte. Eine sorgfältige Abschätzung von Hand der Potenzreihe zeigt, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ gilt; also ist cos wegen $\cos' = -\sin$ auf $[0, 2]$ streng monoton fallend. Außerdem zeigt eine Abschätzung von Hand, dass $\cos(2) < 0$ ist. Also hat cos in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0. Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Nach Definition ist $\cos(\pi/2) = 0$. Aus der Quadratsumme und der Positivität von sin auf $[0, 2]$ folgt $\sin(\pi/2) = 1$.

Additionstheoreme. Mithilfe des Cauchyprodukts von Potenzreihen kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,\\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere erhält man daraus aus den bereits bekannten Werten, dass

$$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0, \qquad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \qquad \sin(2 \cdot \pi) = 0.$$

Periodizität. Aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten speziellen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos(x + 2 \cdot \pi) &= \cos(x)\\ \sin(x + 2 \cdot \pi) &= \sin(x)\\ \cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) &= \sin(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Invertierbarkeit. Aus den bereits gezeigten Positivitäts- und Symmetrieeigenschaften sowie den bereits berechneten Werten folgt, dass

$$\begin{aligned}\cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1]\\ \sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1]\end{aligned}$$

Homöomorphismen sind; die inversen Funktionen bezeichnet man mit arccos bzw. arcsin.

A.4 Anwendungen der Jordanschen Normalform

Zum Abschluss gehen wir noch auf ausgewählte Anwendungen der Jordanschen Normalform ein:

Wir beginnen mit einer Variante des Konjugationstricks zur Berechnung von Potenzen von Matrizen:

Beispiel A.4.1 (Konjugationstrick für Potenzen)**.** Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Wie kann man die Potenzen A^k für $k \in \mathbb{N}$ geschickt (möglichst in geschlossener Form) berechnen? Nach dem Satz über die Jordansche Normalform (Satz 3.3.1) gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft, dass

$$J := S^{-1} \cdot A \cdot S$$

in Jordan-Normalform ist. Sei $D \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Matrix, die nur die Diagonaleinträge von J (und sonst Nullen) enthält und sei $N \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ die Matrix, die nur die ersten Nebendiagonaleinträge von J (und sonst Nullen) enthält. Dann gilt (nachrechnen)

$$D \cdot N = N \cdot D \quad \text{und} \quad N^n = 0.$$

Also erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} A^k &= (S \cdot J \cdot S^{-1})^k \\ &= S \cdot J^k \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot (D+N)^k \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot D^{k-j} \cdot N^j \right) \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \left(\sum_{j=0}^{\min(n-1,k)} D^{k-j} \cdot N^j \right) \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

Die binomische Formel zur Berechnung von $(D+N)^k$ ist dabei anwendbar, da $D \cdot N = N \cdot D$ gilt. Man beachte außerdem, dass die Potenzen D^{k-j} und N^j einfach zu berechnen sind (da es sich jeweils um (Neben)-Diagonalmatrizen handelt).

Beispiel A.4.2 (Kombinatorik)**.** Analog zur Herleitung der expliziten Formel für Fibonacci-Zahlen über den Konjugationstrick (Beispiel I.**??**) kann man auch viele andere Zählprobleme in der Kombinatorik, die auf (wechselseitigen) linearen Rekursionen beruhen, über den allgemeineren Konjugationstrick aus Beispiel A.4.1 mit der Jordanschen Normalform behandeln.

Beispiel A.4.3 (die Exponentialfunktion für Matrizen)**.** In Analogie zur gewöhnlichen Exponentialfunktion definiert man

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k; \end{aligned}$$

die Exponentialreihe für komplexe Matrizen konvergiert dabei für jede Matrix (bezüglich der Maximumsnorm der Koeffizienten) – dies lässt sich analog zur Konvergenz der gewöhnlichen Exponentialreihen beweisen (Analysis II).

Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Wie in Beispiel A.4.1 können wir dann $S^{-1} \cdot A \cdot S = D + N$ schreiben, wobei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist, D eine Diagonalmatrix ist und N nilpotent ist mit $D \cdot N = N \cdot D$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp\bigl(S \cdot (D+N) \cdot S^{-1}\bigr) = S \cdot \exp(D+N) \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \exp D \cdot \exp N \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist es essentiell, dass $D \cdot N = N \cdot D$ ist! Die Matrizen $\exp D$ und $\exp N$ lassen sich ohne Schwierigkeiten direkt berechnen.

Beispiel A.4.4 (lineare Differentialgleichungssysteme)**.** Die Exponentialfunktion für Matrizen (Beispiel A.4.3) liefert eine Möglichkeit, lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten explizit zu lösen (Analysis II).

Beispiel A.4.5 (gruppentheoretische Eigenschaften von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von Elementen $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$A^{2025} = I_n,$$

denn: Konjugiertheit in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist dasselbe wie Ähnlichkeit von Matrizen in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Es genügt daher, die analoge Aussage für Ähnlichkeit zu beweisen. Nach dem Satz über die Jordansche Normalform (Satz 3.3.1) genügt es dafür zu zeigen, dass nur endlich viele Jordan-Normalformen für solche Matrizen auftreten können.

Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A^{2025} = I_n$. Insbesondere ist das Minimalpolynom daher ein Teiler von $p := T^{2024} - 1 \in \mathbb{C}[T]$. Da

$$\forall_{j\in\{0,\dots,2024\}} \quad p\bigl(e^{\frac{2\cdot\pi\cdot j}{2025}}\bigr) = 1 - 1 = 0$$

ist, ist

$$\prod_{j=0}^{2024} \bigl(T - e^{\frac{2\cdot\pi\cdot j}{2025}}\bigr)$$

ein normiertes Polynom vom Grad 2025, was das normierte Polynom p vom Grad 2025 teilt. Also ist

$$p = \prod_{j=0}^{2024} (T - e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot j}{2025}}).$$

Da μ_A ein Teiler von p ist, zerfällt somit auch μ_A in verschiedene Linearfaktoren. Daher ist A diagonalisierbar (Proposition 3.2.14 oder Satz 3.3.1) und die Eigenwerte von A liegen in der endlichen Menge $\{e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot j}{2025}} \mid j \in \{0, \ldots, 2024\}\}$. Aus diesen Eigenwerten lassen sich aber nur endlich viele verschiedene Jordan-Normalformen der Größe $n \times n$ zusammensetzen.

Beispiel A.4.6 (Lie-Gruppen und Lie-Algebren)**.** Lie-Gruppen sind Gruppen, die eine glatte Struktur besitzen (d.h. die unterliegende Menge ist eine glatte Mannigfaltigkeit), und deren Gruppenverknüpfung und Gruppeninversion glatte Abbildungen sind. Ein wichtiges Beispiel ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Die Jordansche Normalform erlaubt es, Gruppenelemente in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ in einfachere Gruppenelemente zu zerlegen (genauer gesagt verwendet man dafür eine multiplikative Variante der Jordanschen Normalform). Diese Zerlegung ist die Grundlage für ähnliche Zerlegungen in komplizierteren Lie-Gruppen. Die Linearisierung von Lie-Gruppen führt zu sogenannten Lie-Algebren. Die Jordansche Normalform ist dann einer der Grundsteine für Zerlegungen von Lie-Algebren in einfachere Bausteine.

A.5 Die LA-Matrix

In den Vorlesungen *Lineare Algebra I/II* haben wir uns mit diversen Aspekten linearer Strukturen und ihrer Anwendungen beschäftigt. Im wesentlichen lässt sich das Material mithilfe der untenstehenden LA-Matrix organisieren. Es ist eine gute Übung, diese Matrix selbständig auszufüllen (bis auf die wenigen Einträge, die offensichtlich keinen Sinn ergeben). Matrixeinträge, die Ihnen im Moment noch Kummer bereiten, sollten Sie bei der Prüfungsvorbereitung natürlich besonders berücksichtigen.

	Logik und Mengenlehre	Zählen, Zahlen, Körper	Vektorräume	Lineare Abbildungen	Matrizenkalkül	Eigenwerte/Diagonalisierbarkeit	Euklidische/Unitäre Vektorräume	Moduln über Hauptidealringen	Jordansche Normalform	Multilineare Algebra
grundlegende Definitionen?										
grundlegende Beispiele?										
wichtige Sätze?										
wichtige Beweistechniken?										
wichtige Zusammenhänge?										
wichtige Anwendungen?										
universelle Eigenschaften?										
Matrizenkalkül dafür?										
Algorithmen/Rezepte?										
Standardaufgaben dazu?										
weitere Aufgaben dazu?										

B
Übungsblätter

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 1 vom 24. April 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Lineare Algebra)**.** Wiederholen Sie die Begriffe *Vektorraum*, *lineare Abbildung* und *lineare Unabhängigkeit* aus der Linearen Algebra I und illustrieren Sie diese Begriffe durch sinnvolle Beispiele. Achten Sie auf präzise und verständliche Formulierungen!

Fingerübung B (Wiederholung: Aufschreiben)**.** Wie schreibt man Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise, Beispiele sauber auf? Wo verwendet man Konjunktiv, wo Indikativ?

Fingerübung C (Wiederholung: die komplexen Zahlen)**.** Wiederholen Sie die Grundlagen zu den komplexen Zahlen (Anhang A.2). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z + \overline{z}$ reell.
2. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{z}$ reell und nicht-negativ.
3. Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist z genau dann reell, wenn $z = \overline{z}$ ist.

Fingerübung D (das Standarskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$)**.** Wir betrachten

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Zeichnen Sie diese Vektoren in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte:

$$\langle x, x\rangle_2, \quad \langle y, y\rangle_2, \quad \langle z, z\rangle_2, \quad \langle x, y\rangle_2, \quad \langle x, z\rangle_2, \quad \langle y, z\rangle_2$$

Fingerübung E (neue Skalarprodukte)**.** Definieren Sie selbst ein „neues“ Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$! Können Sie es irgendwie anschaulich beschreiben?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$; 4 Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
2. Sei $\|\cdot\|$ die von b induzierte Norm. Geben Sie ein Beispiel für ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Skalarprodukte? 4 Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ b_1 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2\\ b_2 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2\end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung b_1 ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.
2. Die Abbildung b_2 ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (Polarisierung und Parallelogrammgleichung; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\| \cdot \|$ die induzierte Norm auf V.

1. Beweisen Sie die *Polarisierungsgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$$

2. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$$

Aufgabe 4 (lineare Abhängigkeit; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, sei $\| \cdot \|$ die induzierte Norm auf V und seien $x, y \in V$ mit $y \neq 0$. Sei

$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2}.$$

Zeigen Sie: Die Familie (x, y) ist genau dann linear abhängig, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$. Dabei wird im euklidischen Fall lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ und im unitären Fall lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{C}$ betrachtet.

Bonusaufgabe (Anschauung; 4 Punkte)**.** Welche geometrische Bedeutung haben die Polarisierungsgleichung und die Parallelogrammgleichung? Illustrieren Sie Ihre Erklärungen durch geeignete Skizzen.

Für Lehramtsstudenten: Mit welchen Sätzen aus der Schulgeometrie hängen diese beiden Gleichungen zusammen?

Hinweis. Die Bonusaufgaben sind ein freiwilliges Zusatzangebot, sind oft manchmal komplexer oder aufwendiger bzw. basieren auf Material oder Fähigkeiten, die über die Vorlesung und die Übungen hinausgehen. Diese Aufgaben werden nicht in den Übungsgruppen besprochen. Sie dienen einfach nur als zusätzliche Anregung und Herausforderung. Man kann sich also gerne die Zähne daran ausbeißen oder sie fröhlich ignorieren.

Abgabe bis 2. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 2 vom 1. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: lineare Abbildungen und Matrizen)**.** Wie erhält man aus Matrizen lineare Abbildungen? Und umgekehrt?

Fingerübung B (Winkel)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V \setminus \{0\}$. Wie kann man die folgenden Winkel durch $\sphericalangle(x, y)$ ausdrücken?

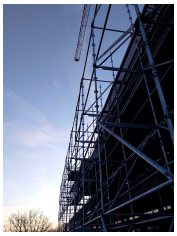
1. $\sphericalangle(x, 2025 \cdot y)$
2. $\sphericalangle(x, -y)$

Fingerübung C (ein Dreieck)**.** Sei

$$\Delta := \left\{ t_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_0, t_1, t_2 \in [0,1],\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Wie heißt der griechische Buchstabe auf der linken Seite? Beherrschen Sie das große und kleine griechische Alphabet?
2. Skizzieren Sie die Menge $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.
3. Geben Sie sechs verschiedene Matrizen $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ mit $A \cdot \Delta = \Delta$ an. Welche geometrischen Namen haben die zugehörigen Abbildungen?
4. Machen Sie anschaulich plausibel, warum es keine weiteren solchen Matrizen geben kann.

Fingerübung D (unflexible Parallelogramme)**.** Welcher Satz über Vierecke in der euklidischen Ebene sorgt dafür, dass Gerüste stabil sind?



Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (L; 4 $(= 1 + 3)$ Punkte)**.** Wir betrachten die Menge

$$L := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,1] \right\}.$$

1. Skizzieren Sie die Menge L und erklären Sie, warum Ihre Skizze diese Menge darstellt.
2. Bestimmen Sie alle linearen Isometrien $f \colon (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ mit $f(L) = L$.

   Hinweis. Wie können Sie Ihre Behauptung rigoros zeigen?

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Isometrien? 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Rotation um $\pi/2$ ist eine lineare Isometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.
2. Die Rotation um $\pi/4$ ist eine lineare Isometrie $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

Aufgabe 3 (Kreuzprodukt; 4 $(= 1 + 1 + 2)$ Punkte)**.** Wir betrachten das *Kreuzprodukt* auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$.

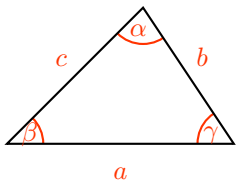
1. Berechnen Sie $\langle x, x \times y \rangle_2$.
2. Wie kann man $y \times x$ durch $x \times y$ ausdrücken?
3. Gibt es ein $e \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so dass $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \times, e)$ eine Gruppe bildet? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Ungleichungen; 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^n a_j = 1$.

1. Zeigen Sie, dass $\sum_{j=1}^n a_j^2 \geq 1/n$.
2. Wann genau gilt Gleichheit? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis. Was hat das mit Linearer Algebra zu tun?!

Bonusaufgabe (Winkelsumme; 4 $(= 1+1+2)$ Punkte)**.** Formalisieren Sie mithilfe von Begriffen aus der Linearen Algebra, was ein *Dreieck* in $\mathbb{R}^2$ ist und was die *Innenwinkel* eines solches Dreiecks sind. Formulieren Sie dann den Satz über die *Invarianz der Winkelsumme*.



Hinweis. Es gibt hier viele verschiedene Möglichkeiten der Modellierung.

Abgabe bis 9. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 3 vom 8. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: komplementäre Untervektorräume)**.** Wiederholen Sie den Begriff des *komplementären Untervektorraums*. Was haben komplementäre Untervektorräume mit Quotientenvektorräumen zu tun?

Fingerübung B (Matrizen/Bilinearformen)**.** Wie können Bilinearformen durch Matrizen beschrieben werden und umgekehrt? Wie kann man an der Matrix ablesen, ob die zugehörige Bilinearform symmetrisch ist?

Fingerübung C (orthogonale Komplemente)**.** Bestimmen Sie die folgenden orthogonalen Komplemente in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ und skizzieren Sie die Situation.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}^\perp, \quad \left(\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)^\perp, \quad \left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\}^\perp$$

Ersetzen Sie $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ durch ein anderes Skalarprodukt und wiederholen Sie die Berechnung dafür.

Fingerübung D (Orthonormalisierung)**.** Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt auf die folgende Familie in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ an:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right)$$

Erhalten Sie dasselbe Ergebnis, wenn Sie die Reihenfolge der Vektoren in der Familie ändern?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Skalarprodukte 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.**

1. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist:

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x, y) &\longmapsto 3 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2\end{aligned}$$

2. Finden Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle e_1, x \rangle = 0$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Orthonormalisierung; 4 Punkte)**.** Sei

$$A := \begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 5 & 5 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}).$$

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren eine Basis des Untervektorraums $V(A, 0) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid A \cdot x = 0\}$.

2. Wenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt auf diese Basis an, um eine Orthonormalbasis von $V(A, 0)$ (bezüglich des euklidischen Skalarprodukts) zu erhalten.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (iterierte orthogonale Komplemente; 4 (= 2+2) Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $A \subset V$ nicht-leer. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Es gilt $((A^\perp)^\perp)^\perp = A^\perp$.

Aufgabe 3 (Wieviele symmetrische Bilinearformen gibt es? 4 (= 2 + 2) Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Bestimmen Sie $\dim_K \mathrm{Bil}_K(V)$.
2. Bestimmen Sie die Dimension des K-Vektorraums aller symmetrischen Bilinearformen auf V.

Aufgabe 4 (Spieglein, Spieglein, ...; 4 (= 2 + 2) Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und zu $v \in V \setminus \{0\}$ sei

$$\begin{aligned} S_v \colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x - 2 \cdot \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v. \end{aligned}$$

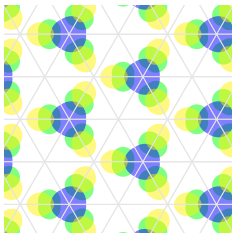
Man bezeichnet S_v als *Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene*. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Teilaufgaben:

1. Berechnen Sie $S_v(x)$ in den Fällen $x \in \mathbb{R} \cdot v$ bzw. $x \perp v$. Warum rechtfertigt dies die Bezeichnung von S_v als Spiegelung?
2. Zeigen Sie, dass S_v eine Isometrie bezüglich der induzierten Norm ist.
3. Zeigen Sie: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist $\det S_v = -1$.
4. Skizzieren Sie S_v in den Fällen $v = e_2$ bzw. $v = e_1 + e_2$ in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$. Ist die Komposition $S_{e_1} \circ S_{e_1+e_2}$ auch eine Spiegelung? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (Kaleidoskop in LaTeX; 4 Punkte)**.** Vervollständigen Sie die LaTeX-Quelldatei caleidoscope_exercise.tex so, dass Sie einen Kaleidoskop-Bilder-Generator erhalten. Erklären Sie Ihre Ergänzungen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Vervollständigen Sie \caleidohexagon so, dass ein Sechseck aus sechs wie in einem Kaleidoskop gespiegelten Dreiecken entsteht.
2. Vervollständigen Sie dann das Programm durch geeignete Translationen von \caleidohexagon.

Hinweis. Wenn Sie keine eigene LaTeX-Installation haben, können Sie den Quellcode unter https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php übersetzen. Die Vorlagen sind so gestaltet, dass die Aufgaben auch ohne Vorkenntnisse in LaTeX lösbar sind. Dokumentieren Sie Ihren Quellcode!



Abgabe bis 16. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 4 vom 15. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Determinante)**.** Wiederholen Sie die Definition, Konstruktion und die Leibniz-Formel für die *Determinante*. Verstehen Sie den Beweis von Korollar I.5.4.24?

Fingerübung B (orthogonale Gruppe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n)$ eine Gruppe bildet (bezüglich Matrixmultiplikation).
2. Liefert $A \longmapsto 1/\det A \cdot A$ eine Abbildung $\mathrm{O}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$?

Fingerübung C (Symmetrien der euklidischen Ebene)**.** Welche der folgenden Matrizen liegen in $\mathrm{O}(2)$? Welche in $\mathrm{SO}(2)$? Was ist der geometrische Effekt der zugehörigen linearen Abbildungen?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Fingerübung D (Projektionen)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum, sei $U \subset V$ ein Untervektorraum und sei $p \colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf U. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?

$$p \circ p = p, \quad (\mathrm{id}_V - p) \circ (\mathrm{id}_V - p) = \mathrm{id}_V - p, \quad (\mathrm{id}_V + p) \circ (\mathrm{id}_V - p) = 0.$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Winkel; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.**

1. Berechnen Sie einen der folgenden Winkel bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$:

$$\sphericalangle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \sphericalangle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \sphericalangle \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Skizzieren Sie diese Situation geeignet.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (orthogonale Blorxjektion; 4 Punkte)**.** Blorx befindet sich im Hyperraum $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ am Punkt $(0, 9, 4, 1)^\top$. Um sicher zu sein, dass Blorx nicht auf die schiefe Bahn gerät: Bestimmen Sie den euklidischen Abstand von Blorx zu

$$U := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie dazu zunächst eine explizite Beschreibung der orthogonalen Projektion von $\mathbb{R}^4$ auf U.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Dimensionsspuren; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, sei $U \subset V$ ein Untevektorraum und sei $p_U \colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf U. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} U = \operatorname{tr} p_U$.
2. Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} V/U = \operatorname{tr}(\mathrm{id}_V - p_U)$.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit orthogonaler Projektionen; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, sei $U \subset V$ ein Untervektorraum und seien $p, q \colon V \longrightarrow V$ lineare Abbildungen (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) mit

- $\operatorname{im} p \subset U$ und $\operatorname{im}(\mathrm{id}_V - p) \subset U^\perp$;
- $\operatorname{im} q \subset U$ und $\operatorname{im}(\mathrm{id}_V - q) \subset U^\perp$.

Zeigen Sie, dass $p = q$ gilt.

Aufgabe 4 (Spiegelei; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.**

1. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, so ist $L(A)$ eine Spiegelung (im Sinne von Aufgabe 4 auf Blatt 3).
2. Folgern Sie: Jede lineare Isometrie der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$ ist eine Spiegelung oder kann als Komposition von zwei Spiegelungen geschrieben werden.

Bonusaufgabe (orthographische Projektionen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.**

1. Skizzieren Sie das Bild von

$$Q := \left\{ r \cdot e_1 + s \cdot e_2 + t \cdot e_3 \;\middle|\; r, s, t \in [0, 1] \right\}$$

unter der orthogonalen Projektion (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) auf

$$\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 0 \}$$

Berechnen Sie dazu zunächst die Bilder der Eckpunkte von Q unter dieser orthogonalen Projektion und beschriften Sie Ihre Skizze (insbesondere die Koordinatenachsen!) aussagekräftig.

2. Was haben *orthographische Projektionen* in der Computergraphik mit orthogonalen Projektionen zu tun? Wofür werden sie verwendet?

Abgabe bis 23. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 5 vom 22. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Diagonalisierbarkeit)**.** Wiederholen Sie die Begriffe *Eigenwerte*, *Eigenvektoren*, *charakteristisches Polynom*, *Diagonalisierbarkeit* (von Matrizen und Endomorphismen) und wie man diese in der Praxis bestimmen kann. Was ist die *Jordansche Normalform*?

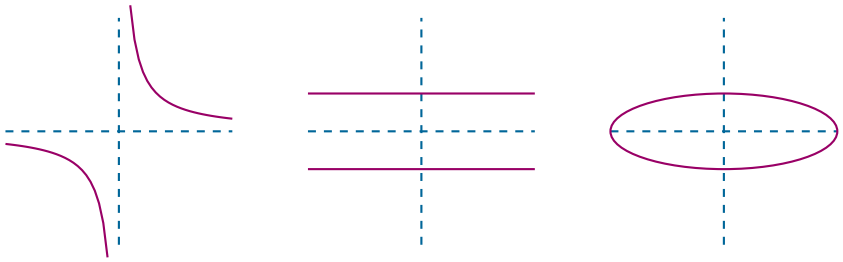
Fingerübung B (Wurzeln)**.** Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit

$$B^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fingerübung C (Definitheit)**.** Untersuchen Sie die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ auf Definitheit. Welche Signatur haben diese Matrizen?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche der untenstehenden Skizzen passt zu welcher dieser Matrizen?



Fingerübung D (adjungierter Homomorphismus)**.** Bestimmen Sie den adjungierten Homomorphismus (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) der folgenden $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Ist diese Abbildung selbstadjungiert?

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} (1 - 2 \cdot i) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ i \cdot x_1 - (2025 + i) \cdot x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Orthogonalität; 2 (= 1 + 1) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Relation „$\perp$“ auf $\mathbb{R}^3$ (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) ist transitiv.
2. Jedes Orthonormalsystem in $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ kann zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ergänzt werden.

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Hauptachsentransformation; 4 = (2 + 2) Punkte)**.** Zu $c \in \mathbb{R}$ sei

$$Q_c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3/2 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + 3/2 \cdot x_2^2 = c\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ Hauptachsen für die Quadrik Q_c und bestimmen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{R} \mid Q_c \neq \emptyset\}$.

2. Skizzieren Sie die Quadrik Q_2. Ist Q_2 beschränkt (bezüglich $\|\cdot\|_2$)?

Aufgabe 2 (adjungierte Homomorphismen; 4 (= 2+2) Punkte)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und seien $f, g\colon V \longrightarrow V$ Endomorphismen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(f^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = f$.

2. Es gilt $(f \circ g)^{\mathsf{H}} = f^{\mathsf{H}} \circ g^{\mathsf{H}}$.

Aufgabe 3 (Spektralzerlegung; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Sei $\mathbb{K}$ der Grundkörper (also $\mathbb{R}$ im euklidischen Fall bzw. $\mathbb{C}$ im unitären Fall). Zu $\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)$ sei $p_\lambda\colon V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$. Zeigen Sie, dass dann die folgende *Spektraldarstellung* gilt:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(f)} \lambda \cdot p_\lambda$$

Aufgabe 4 (Polarzerlegung; 4 (= 2 + 2) Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Zeigen Sie, dass A eine *Polarzerlegung* besitzt, d.h., dass eine orthogonale Matrix $U \in \mathrm{O}(n)$ und eine symmetrische positiv definite Matrix $P \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ existiert mit
$$A = U \cdot P.$$

2. Zeigen Sie, dass diese Matrizen P und U eindeutig durch A bestimmt sind.

Hinweis. Ziehen Sie die „positive“ Wurzel aus $A^{\mathsf{T}} \cdot A$ ...

Bonusaufgabe (Kerne statt Quotienten; 4 Punkte)**.** Seien $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlich-dimensionale euklidische/unitäre Vektorräume und seien $f\colon U \longrightarrow V$, $g\colon V \longrightarrow W$ mit $g \circ f = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \ker(g^{\mathsf{H}} \circ g + f \circ f^{\mathsf{H}}) &\longrightarrow \ker g / \operatorname{im} f \\ x &\longmapsto x + \operatorname{im} f \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Vektorraumisomorphismus ist.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $(\operatorname{im} f)^{\perp} = \ker f^{\mathsf{H}}$ gilt.

Abgabe bis 30. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 6 vom 29. Mai 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Polynomring und algebraische Strukturen)**.** Wiederholen Sie die Konstruktion des *Polynomrings* (über einem Körper). Welche algebraische Strukturen kennen Sie bereits? Sammeln Sie die Definitionen und passende Beispiele!

Fingerübung B (Rechnen in Ringen: konkret)**.** Welche der folgenden Ringe sind nullteilerfrei?

$$\mathbb{F}_2, \quad \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}), \quad \mathbb{Z}/42.$$

Fingerübung C (Rechnen in Ringen: abstrakt)**.** Sei R ein Ring. Zeigen Sie: Für alle $x \in R$ ist $0 \cdot x = 0$.

Fingerübung D (Endomorphismenpolynome)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f := L(A) \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome $p \in \mathbb{C}[T]$ den Endomorphismus $p(f)$, den man erhält, wenn man f in p einsetzt:

$$T - \lambda, \quad (T-\lambda)^2, \quad (T-\lambda)^3$$

Worauf wird bei dieser Form des „Einsetzens“ die universelle Eigenschaft des Polynomrings $\mathbb{C}[T]$ angewendet? Wie helfen die Eigenschaften von Ringhomomorphismen dabei, die entsprechenden Endomorphismen zu berechnen?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Isometriegruppen; 2 $(= 1+1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Gruppe SO(2) ist abelsch.
2. Die Gruppe SO(3) ist abelsch.

Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Zerlegung von Endomorphismen; 4 = (0 + 2 + 2) Punkte)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, sei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

und $f := L(A) \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$.

0. Wie sind *f-zyklisch* und *f-irreduzibel* definiert?
1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-zyklischer Vektorraum ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^3$ ein f-irreduzibler Vektorraum ist.

Aufgabe 2 (universelle Eigenschaft des Polynomrings? 4 (= 2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f \colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit $f(T^2) = T$.
2. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f \colon \mathbb{Q}[T] \longrightarrow \mathbb{Q}[T]$ mit $f(T^2) = 2025$.

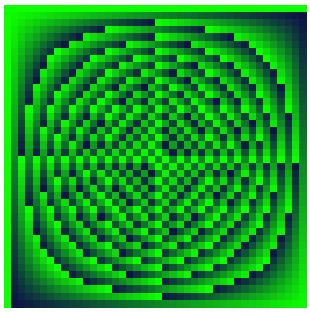
Aufgabe 3 (Ringe; 4 (= 0 + 4) Punkte)**.**

0. Wie sind *Ringhomomorphismus* und *Ringisomorphismus* definiert?
1. Zeigen Sie, dass die folgenden Ringe paarweise nicht isomorph sind:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}[T], \quad \mathbb{F}_2[T]$$

Aufgabe 4 (Endomorphismenpolynome: Annihilation; 4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \colon V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ mit $p(f) = 0$ gibt.
Hinweis. Welche Dimension hat $\mathrm{Hom}_K(V, V)$? Warum hilft das?

Bonusaufgabe (Ringe, anschaulich; 4 Punkte)**.** Stellen Sie die Multiplikation von $\mathbb{Z}/42$ geeignet graphisch dar und erklären Sie, was Ihre Graphik bedeutet.



Hinweis. Es bietet sich an, dafür ein geeignetes Programm zu schreiben ...

Abgabe bis 6. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 7 vom 5. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Konstruktionen von Vektorräumen; Basen)**.** Wiederholen Sie die Konstruktionen *direkte Summe* und *Quotienten* von Vektorräumen. Welche linearen Abbildungen kann man zu/auf diesen Konstruktionen immer definieren? Wie lautet die *universelle Eigenschaft von Basen* in Vektorräumen?

Fingerübung B (Rechnen in Moduln: konkret)**.** Berechnen Sie im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2025$:

$$45 \cdot [5] + 9 \cdot [45]$$

Fingerübung C (Rechnen in Moduln: abstrakt)**.** Sei R ein Ring und sei V ein R-Modul. Zeigen Sie: Für alle $x \in V$ gilt $(-1) \cdot x = -x$.

Fingerübung D (Modulhomomorphismen)**.** Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $f := 2025 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie Kern und Bild von f. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Könnte dasselbe Phänomen bei $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auftreten?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (adjungierte Abbildungen; 2 (= 0+1+1) Punkte)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, seien $f, g \colon V \longrightarrow V$ Endomorphismen. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

0. Wie sind *adjungierte Homomorphismen* definiert?
1. Es gilt $(i \cdot f)^{\mathsf{H}} = i \cdot f^{\mathsf{H}}$.
2. Es gilt $(g \circ f)^{\mathsf{H}} = f^{\mathsf{H}} \circ g^{\mathsf{H}}$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (minimales Erzeugendensystem; 4 = (0 + 2 + 2) Punkte)**.** Im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^2$ betrachten wir

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 2025 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2024 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

0. Wie ist *Erzeugendensystem* für Moduln definiert? Was weiß man über minimale Erzeugendensysteme in Vektorräumen?
1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} E = \mathbb{Z}^2$ gilt.
2. Zeigen Sie: Ist $F \subset E$ mit $F \neq E$, so ist $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} F \neq \mathbb{Z}^2$.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Ideale; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Ring und seien $a, b \subset R$ linksseitige Ideale in R. Welche der folgenden Aussagen sind wahr in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Dann ist $a \cap b$ ein Ideal in R.
2. Dann ist $a \cup b$ ein Ideal in R.

Aufgabe 3 (invariante Unterräume; 4 $(= 0 + 4)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Außerdem sei $U \subset V$ ein K-Untervektorraum.

0. Wie sind der $K[T]$-Modul $V[f]$ und $K[T]$-*Untermodul* definiert?
1. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Der Unterraum U ist f-invariant, d.h. es gilt $f(U) \subset U$.
   (b) Die Teilmenge $U \subset V$ ist ein $K[T]$-Untermodul von $V[f]$.

Aufgabe 4 (Ideale als Kerne; 4 Punkte)**.** Sei R ein Ring und sei $a \subset R$ ein linksseitiges Ideal in R. Zeigen Sie, dass es dann einen R-Modul V und einen R-Modulhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow V$ mit $\ker f = a$ gibt.

Bonusaufgabe (Zauberei! 4 Punkte)**.** Commander Blorx führt seinen Kollegen in der Modulkatalogslektüregesellschaft zusammen mit seinem Assistenten folgenden Kartentrick vor: Blorx bittet einen der Zuschauer, ein Kartendeck mit 52 Karten (jeweils 2, 3, …, 10, B, D, K, A in den Farben Karo, Herz, Pik, Kreuz) zu mischen. Ein weiterer Zuschauer zieht aus diesem Deck fünf Karten und gibt sie dem Assistenten (natürlich so, dass Blorx die Karten *nicht* sehen kann; der Assistent darf sie aber ansehen). Der Assistent gibt dann nacheinander vier Karten offen an Blorx und behält die fünfte Karte verdeckt bei sich. Blorx nennt daraufhin korrekt die verdeckte fünfte Karte.

Wie funktioniert dieser Trick? Wie kann man den Trick so arrangieren, dass er einfach durchzuführen ist?
Hinweis. Es geht alles mit rechten Dingen zu – insbesondere kommt es nicht darauf an, ob die Karten quer, hochkant, mit wackelnden Ohren, etc. überreicht werden. Zum Einstieg kann es hilfreich sein, sich zunächst eine Variante zu überlegen, bei der Blorx nur die Farbe der fünften Karte korrekt nennt. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/13$ und die symmetrische Gruppe S_3 dürfen gerne mitspielen!

Abgabe bis 13. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 8 vom 12. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Existenz von Basen)**.** Wiederholen Sie das Argument dafür, warum endlich erzeugte Vektorräume Basen besitzen. Warum funktioniert dieses Argument nicht im endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2$?!

Fingerübung B (Basen)**.** Welche der folgenden Familien sind $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathbb{Z}^2$?

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$$

Fingerübung C (Quotienten und Summen)**.** Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Wieviele Elemente enthält der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/m \oplus \mathbb{Z}/n$?

Fingerübung D (Homomorphiesatz)**.**

1. Finden Sie einen surjektiven $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$.
2. Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Moduln, um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}/6 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$.

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Polynomringe; 2 $(= 0+1+1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

0. Was ist die *universelle Eigenschaft von Polynomringen* (über Körpern)?
1. Die Ringe $\mathbb{C}[T]$ und $\mathbb{R}[T]$ sind isomorph.
2. Es gibt einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(T^2) = -2025$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Homomorphiesatz; 4 $= (0+2+2)$ Punkte)**.**

0. Wie lautet der *Homomorphiesatz für Moduln*?
1. Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Moduln, um zu zeigen, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} f$ und $\mathbb{Z}/2$ isomorph sind, wobei $f := L(A)\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ durch die folgende Matrix gegeben ist:
$$A := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$
2. Verwenden Sie den Homomorphiesatz für Moduln, um zu zeigen, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} f$ und $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ isomorph sind, wobei $f := L(A)\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ durch die folgende Matrix gegeben ist:
$$A := \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Quotienten und Summen; 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $\mathbb{Z}/2025 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/45 \oplus \mathbb{Z}/45$.
2. Es gilt $\mathbb{Z}/2025 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/81 \oplus \mathbb{Z}/25$.

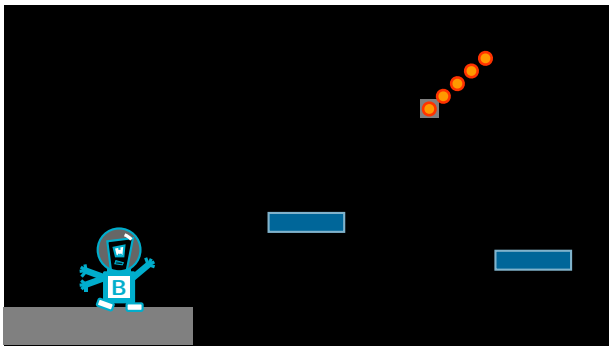
Aufgabe 3 (freie Moduln; 4 Punkte)**.** Sei R ein Ring und V ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der R-Modul V ist frei.
2. Es gibt eine Menge I mit $V \cong_R \bigoplus_I R$.

Aufgabe 4 (Irreduzibilität; 4 $(= 0 + 4)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus.

0. Wie ist *f-Reduzibilität* von V definiert?
1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Der K-Vektorraum V ist f-reduzibel.
   (b) Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zerlegbar.

Bonusaufgabe (Warten auf eine günstige Gelegenheit; 4 Punkte)**.** Commander Blorx gerät in einen 2D-Platformer. Gleich zu Beginn entdeckt er zwei bewegliche Plattformen und einen rotierenden Feuerstrahl.



Die eine Plattform bewegt sich (gleichmäßig) horizontal und benötigt 42 Zeiteinheiten hin und zurück. Die zweite Plattform bewegt sich (gleichmäßig) vertikal und benötigt 88 Zeiteinheiten hin und zurück. Der Feuerstrahl benötigt 51 Zeiteinheiten für eine (gleichmäßige) Umrundung.

Nach wievielen Zeiteinheiten wiederholt sich die Anfangskonstellation? Genauer: Modellieren Sie die Situation geeignet mithilfe von $\mathbb{Z}$-Moduln und $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen, lösen Sie das entsprechende Problem für $\mathbb{Z}$-Moduln und übersetzen Sie dann die Lösung zurück in das Anwendungsproblem.

Abgabe bis 20. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 9 vom 19. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Prüfungsvorbereitung)**.** Wie planen Sie Ihre Prüfungsvorbereitung für die mündlichen Modulprüfungen? Lesen Sie die Hinweise zur Prüfungsvorbereitung. Insbesondere: Wo finden Sie die in der Fachschaft gesammelten Gedächtnisprotokolle von mündlichen Prüfungen?

Fingerübung B (Division mit Rest)**.** Wir betrachten auf $\mathbb{Z}$ den Absolutbetrag als euklidische Gradfunktion und auf Polynomringen über Körpern die modifizierte Gradfunktion.

1. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Division von 2025 mit Rest durch 126.
2. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Division von 4242 mit Rest durch -17
3. Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[T]$ die Division von $T^5 - 2 \cdot T^3 + T + 7$ mit Rest durch $T^2 + 2 \cdot T - 6$.
4. Berechnen Sie in $\mathbb{F}_2[T]$ die Division von T^3+T^2+1 mit Rest durch T^2+T.

Fingerübung C (Primfaktorzerlegung)**.** Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen der Polynome

$$T^2 - 3 \quad \text{und} \quad T^2 + 3$$

in $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$.

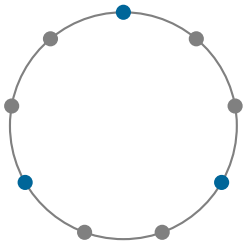
Fingerübung D (Ideale)**.** Bestimmen Sie jeweils für die nachfolgenden Ideale, welche Ideale in welchen anderen Idealen enthalten sind. Was bedeutet das für die zugehörigen zyklischen Quotientenmoduln?

1. $(3),\ (6),\ (4),\ (12)$ in $\mathbb{Z}$
2. $(3),\ (T),\ (T^2),\ (T+1)$ in $\mathbb{Q}[T]$
3. $(T+1),\ (T^2+1),\ (T),\ (T^2+T)$ in $\mathbb{F}_2[T]$
4. $(T, T+1),\ (T),\ (T^2),\ (T^3)$ in $\mathbb{C}[T]$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Untermoduln; 2 (= 0+1+1) Punkte)**.** Beschriften Sie jeweils Ihre Skizzen aussagekräftig und begründen Sie Ihre Antwort!

0. Wie sind *von einer Teilmenge erzeugte Untermoduln* definiert?
1. Skizzieren Sie im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/12$ den von $[8]$ erzeugten Untermodul.
2. Skizzieren Sie im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/13$ den von $[8]$ erzeugten Untermodul.



Bitte wenden

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Primfaktoren; 4 = (0 + 2 · 2) Punkte).

0. Wie lautet die Definition von *prim* für Elemente in Integritätsringen?
1. Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen des Polynoms
$$T^4 - 4$$
in zwei der folgenden drei Ringe $\mathbb{Q}[T]$ bzw. $\mathbb{R}[T]$ bzw. $\mathbb{C}[T]$ (und begründen Sie jeweils, warum es sich dabei um Primfaktorzerlegungen handelt).

Aufgabe 2 (Hauptideale; 4 (= 2 + 2) Punkte). Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(a + b) = (a) \cap (b)$.
2. Es gilt $(a \cdot b) = (a) \cap (b)$.

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung; 4 Punkte). Sei R ein Integritätsring, seien $n, m \in \mathbb{N}$ und seien $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m \in R$ Primelemente mit
$$\prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{j=1}^{m} q_j.$$
Zeigen Sie: Dann ist $n = m$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in R^\times$ mit
$$\forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} \quad p_j = \varepsilon_j \cdot q_{\sigma(j)}.$$
Hinweis. Zeigen Sie, dass p_1 zu einem der Elemente $q_1, \ldots, q_m$ assoziiert ist und hangeln Sie sich dann Primfaktor für Primfaktor durch das Produkt.

Aufgabe 4 (zyklische Moduln; 4 (= 0 + 4) Punkte).

0. Wie lautet jeweils die Definition von *zyklisch* in den beiden unten angegebenen Aussagen?
1. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und es sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) Der Vektorraum V ist f-zyklisch.
   (b) Der $K[T]$-Modul $V[f]$ ist zyklisch.

Bonusaufgabe (Division mit Rest; 4 (= 2 + 1 + 1) Punkte).

1. Geben Sie den Algorithmus für Division von natürlichen Zahlen mit Rest (im Zehnersystem) an. Achten Sie dabei darauf, dass die Schritte so gewählt sind, dass ein Fünftklässer sie ohne Schwierigkeiten oder Nachfragen deterministisch ausführen kann. Insbesondere: Wie bestimmt man die nächste Ziffer?!
2. Führen sie Ihren Algorithmus am Beispiel der Division von 22222222 mit Rest durch 876 durch.
3. Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus immer terminiert und das korrekte Ergebnis liefert.

Abgabe bis 27. Juni 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 10 vom 26. Juni 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Ringe). Welche Eigenschaften von Ringen kennen Sie bereits? Wie hängen diese zusammen? Welche Beispiele kennen Sie?

Fingerübung B (ggT).

1. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 2025 und 35 in $\mathbb{Z}$.
2. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von T^2+T und T^3 in $\mathbb{F}_2[T]$.

Fingerübung C (Gleichungen in Ringen).

1. Finden Sie ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2025 \cdot x + 49 \cdot y = -3$.
2. Gibt es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $2025 \cdot x + 27 \cdot y = 25$?
3. Finden Sie Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[T]$ mit $p \cdot (T^2 + 2) + q \cdot (T - 2) = T^3$.
4. Gibt es Polynome $p, q \in \mathbb{F}_2[T]$ mit $p \cdot (T^2 + 1) + q \cdot (T + 1) = T^2$?

Fingerübung D (Ideale in $\mathbb{Z}$). Welche der folgenden Ideale in $\mathbb{Z}$ sind gleich?

$$(13, 14, 15), \quad (23, 24, 25), \quad (15, 25, 35), \quad (16, 26, 36), \quad (17, 27, 37)$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) ($\mathbb{Z}$-Moduln; 2 (= 0+1+1) Punkte). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

0. Wie lautet die Definition von *freien Moduln*?
1. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2025 \oplus \mathbb{Z}/2026$ ist frei.
2. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\{x \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ ist frei.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Währungsreform; 4(= 2+2) Punkte). Im Rahmen einer Währungsreform werden neue Münzen mit dem Wert von 30 Blorx, 42 Blorx bzw. 105 Blorx eingeführt.

1. Ist es möglich, 44 Blorx exakt zu bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)? Begründen Sie Ihre Antwort!
2. Wie kann man den Betrag von 9 Blorx exakt bezahlen (wenn auch Rückgeld gegeben werden darf)?

Hinweis. Sie dürfen in beiden Fällen annehmen, dass Käufer und Verkäufer genug Exemplare der verschiedenen Münztypen besitzen.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (ideale Gleichheit? 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gilt $(T^4 + T^2 + 2 \cdot T, T^3 + 2025 \cdot T) = (T)$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Es gilt $(T^2 + T, T + 1) = (T^2 + T, T^5 + 1)$ in $\mathbb{F}_2[T]$.

Aufgabe 3 (Schwanensee; 4 Punkte)**.** Professor Pirkheimer bewundert das Schwanensee-Ballett und wüsste zu gerne, wie viele Tänzerinnen involviert sind. Aufgrund des permanenten Rumgehopses sind sie jedoch nur schwer zu zählen. Er stellt jedoch fest, dass es je einen Tanz gibt, bei dem sich

- alle bis auf drei Tänzerinnen in Fünfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf fünf Tänzerinnen in Zwölfergrüppchen aufteilen, bzw.
- alle bis auf sechs Tänzerinnen in Siebenergrüppchen aufteilen.

Außerdem ist sich Pirkheimer sicher, dass es sich insgesamt um weniger als 1000 Tanzbeine bzw. 500 Tänzerinnen handelt.

Wieviele Tänzerinnen schwirren herum? Begründen Sie Ihre Antwort! Wie haben Sie diese Lösung gefunden?

Aufgabe 4 (Präsentationen von Moduln; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln V jeweils zwei verschiedene Wahlen von $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ mit $V \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^m / \operatorname{im} L(A)$. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/42 \oplus \mathbb{Z}^{2025}$.
2. Für den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/25$.

Bonusaufgabe (Sophie Germain; 4 $(= 2+2)$ Punkte)**.** Wer war Sophie Germain?

1. Geben Sie kurz die wichtigsten Daten/Stationen ihres Lebens an.
2. Geben Sie einen Satz an, der von Sophie Germain bewiesen wurde.

Hinweis. Alle Angaben sind durch nachvollziehbare Quellen zu belegen. Eine Konversation mit einem KI-System zählt *nicht* als nachvollziehbare Quelle.

Abgabe bis 4. Juli 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 11 vom 3. Juli 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Gauß-Elimination)**.** Wiederholen Sie das *Gaußsche Eliminationsverfahren* und wie man damit diverse Probleme der linearen Algebra lösen kann.

Fingerübung B (Elementarteiler)**.** Bestimmen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen (über $\mathbb{Z}$):

$$\begin{pmatrix} 55 & 2025 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung C (lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}$)**.** Wieviele $x \in Z^2$ gibt es, die das folgende lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}$) erfüllen?

$$9 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 = 6 \quad \text{und} \quad 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = -8$$

Verwenden Sie den Elementarteilersatz für Matrizen!

Fingerübung D (Elementarteiler von Moduln)**.** Führen Sie die Beweisschritte des Elementarteilersatzes für Moduln am folgenden $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}^2$ durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_3 \\ 8 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 10 x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Primfaktoren; 2 $(= 0 + 1 + 1)$ Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

0. Wie lautet die Definition von *prim* in Integritätsringen?
1. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $T^4 - 7 \cdot T^2$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $T^4 + 7 \cdot T^2$ in $\mathbb{C}[T]$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Gitterpunkte; 4 Punkte)**.** Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \leq 9$, indem Sie zunächst geeignete Elementarteiler und zugehörige Transformationen bestimmen.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Elementarteiler von Moduln; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Hauptidealring und sei U ein Untermodul von R^3. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist (v_1, v_2, v_3) eine R-Basis von R^3, so gibt es Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ und $r \in \{0, \dots, 3\}$ mit $U = \mathrm{Span}_R\{\alpha_1 \cdot v_1, \dots, \alpha_r \cdot v_r\}$.
2. Es gibt eine Basis (v_1, v_2, v_3) von R^3, Primelemente $p_1, p_2, p_3 \in R$ und $r \in \{0, \dots, 3\}$ mit $U = \mathrm{Span}_R\{p_1 \cdot v_1, \dots, p_r \cdot v_r\}$.

Aufgabe 3 (Rang freier Moduln über Hauptidealringen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei R ein Hauptidealring und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie: Gilt $n > m$ und ist $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$, so ist $L(A)\colon R^n \longrightarrow R^m$ *nicht* injektiv.

   Hinweis. Verwenden Sie den Elementarteilersatz für Matrizen.
2. Folgern Sie: Es gilt genau dann $R^n \cong_R R^m$, wenn $n = m$ ist.

Aufgabe 4 (Determinantenideale; 4 $(= 3 + 1)$ Punkte)**.** Sei R ein kommutativer Ring, seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(R)$.

1. Zeigen Sie: Sind $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(R)$ und $T \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)$, so gilt für alle $k \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$:

   $$D_k(S \cdot A) \subset D_k(A) \quad \text{und} \quad D_k(A \cdot T) \subset D_k(A)$$

   Hinweis. Es genügt, wenn Sie einen der beiden Fälle bearbeiten. Zur Vereinfachung: Wenn Sie möchten, können Sie sich außerdem darauf einschränken, die beiden Fälle $k = 1$ bzw. $k = 2$ zu behandeln.
2. Folgern Sie: Sind $S \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so gilt $D_k(S \cdot A \cdot T) = D_k(A)$ für alle $k \in \{1, \dots, \min(m, n)\}$.

Bonusaufgabe (Elementarreime; 4 Punkte)**.**

Werd ich zum Elementaren sagen:
Teile doch! Du bist so schön!
Dann magst du mich in Reime schlagen.
Dann will ich gern zum Dichten gehn!

Schreiben Sie ein Gedicht, das den Algorithmus zur Bestimmung der Elementarteiler von Matrizen über euklidischen Ringen gut einprägsam zusammenfasst.

Abgabe bis 11. Juli 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 12 vom 10. Juli 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (charakteristisches Polynom)**.** Wiederholen Sie die Definition und Anwendungen des *charakteristischen Polynoms* von Matrizen bzw. von Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume.

Fingerübung B (Minimalpolynome)**.** Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Fingerübung C (Kombination zweier Blöcke)**.** Sei K ein Körper, seien $k, m \in \mathbb{N}$, seien $B \in \mathrm{M}_{k\times k}(K)$, $C \in M \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$. Wir betrachten die Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

mit $n := k + m$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A das (normierte) kleinste gemeinsame Vielfache von μ_B und μ_C in $K[T]$ ist.

Fingerübung D (abelsche Gruppen)**.** Wieviele abelsche Gruppen mit genau 40 Elementen gibt es bis auf Isomorphie?

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (ggT; 2 $(= 0 + 1 + 1)$ Punkte)**.**

0. Was ist „der“ *größte gemeinsame Teiler*?
1. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $T^5 - 1$ und $T^4 - 1$ in $\mathbb{Q}[T]$.
2. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von T^6+T+1 und T^4+T^3 in $\mathbb{F}_2[T]$.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (Jordansche Normalformen und Ähnlichkeit; 4 $(= 3 + 1)$ Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen in $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 & 10 & -9 \\ -14 & 14 & -9 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Welche dieser Matrizen sind ähnlich zueinander? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Jordansche Normalformen? 4 (= 2+2) Punkte)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt $A \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit $\det A = 8$ und $\mu_A = (T-2)^2 \cdot (T-1)$.
2. Es gibt $A \in \mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ mit $\det A = 54$ und $\mu_A = (T-3)^2 \cdot (T-2)$.

Aufgabe 3 (iiiii! 4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & i & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ i & i & -i & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie außerdem (mit dem Verfahren aus der Vorlesung) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, für die $S^{-1} \cdot A \cdot S$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 4 (Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit; 4 (= 0 + 2 + 2) Punkte)**.** Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

0. Wie lautet die Definition von *Diagonalisierbarkeit* von Matrizen?

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Matrix A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und (paarweise) verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit

$$\mu_A = \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j).$$

Hinweis. Falls A diagonalisierbar ist, so bietet es sich an, das Minimalpolynom mithilfe der Konjugationsinvarianz zu berechnen. Für die umgekehrte Implikation kann man wie beim Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton vorgehen.

Bonusaufgabe (Staatsexamen: abelsche Gruppen; 4 (= 1 + 1 + 1 + 1) Punkte)**.** Die folgenden Aufgaben sind ehemalige (teilweise leicht umformulierte) Staatsexamensaufgaben. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphietypen von abelschen Gruppen, die genau 1980 Elemente enthalten, und geben Sie für jeden Isomorphietyp ein Beispiel.
2. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, so dass es genau sechs Isomorphietypen von abelschen Gruppen mit genau n Elementen gibt.
3. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ mit $\det A \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$|\det A| = \#\big(\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} L(A)\big).$$

4. Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppe der positiven reellen Zahlen (bezüglich Multiplikation) zur abelschen Gruppe aller reellen Zahlen (bezüglich Addition) isomorph ist.

   Hinweis. Analysis!

Abgabe bis 18. Juli 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt. Die Aufgaben von Blatt 13 zählen als Bonuspunkte.

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann — Blatt 13 vom 17. Juli 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Bilinearformen, Skalarprodukte)**.** Wiederholen Sie die Definition und Anwendungen von *Bilinearformen* und *Skalarprodukten*, inklusive Matrizenkalkül.

Fingerübung B (Dualräume)**.** Welche der folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume sind isomorph?

$$\mathbb{R},\ \mathbb{R}^*,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3),\ (\mathbb{R}^5)^*,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^5)^*,\ (\mathbb{R}^6)^*,\ \mathbb{R}^* \oplus (\mathbb{R}^2)^* \oplus (\mathbb{R}^3)^*$$

Fingerübung C (Abbildungen auf Tensorprodukten)**.** Sei K ein Körper. Welche der folgenden Abbildungen $K^3 \otimes_K K^3 \longrightarrow K$ sind wohldefiniert?

1. $v \otimes w \longmapsto 0$
2. $v \otimes w \longmapsto v_1 + w_2$
3. $v \otimes w \longmapsto v_3$
4. $v \otimes w \longmapsto v_1 \cdot w_3 - v_2 \cdot w_1$

Fingerübung D (Tensoren)**.** Welche dieser Gleichheiten gelten in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$?

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
2. $2024 \cdot e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 = e_1 \otimes (e_1 + 2025 \cdot e_2)$
3. $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$
4. $e_1 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1$

Hinweis. Die Wiederholungsaufgaben sind freiwillig, können aber gut zur Wiederholung und als Bonuspunkte genutzt werden.

Bonusaufgabe (Wiederholung) (Elementarteiler; 2 $(= 1 + 1)$ Punkte)**.**

1. Verwenden Sie den Elementarteilersatz, um das folgende lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}$) zu lösen:

   Gesucht: alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit

   $$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 15 \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &= 22 \\ 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &= 17 \end{aligned}$$

2. Skizzieren Sie die Lösungsmenge.

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (duale Abbildungen; 4 $(= 2 + 2)$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

1. Ist f surjektiv, so ist $f^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ injektiv.
2. Ist f injektiv, so ist $f^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ surjektiv.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Rechnen mit Elementartensoren; 4 (= 2 + 2) Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K und seien $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Ist $v \otimes w = v' \otimes w'$, so folgt $v = v'$ und $w = w'$.
2. Es gilt $v \otimes w + v' \otimes w' = (v + v') \otimes (w + w')$.

Aufgabe 3 (Skalarprodukte und Tensorprodukte; 4 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Reformulieren Sie die Definition von Skalarprodukten auf V so, dass Sie nur das Tensorprodukt und Eigenschaften von linearen Abbildungen verwenden. Zeigen Sie, dass Ihre Reformulierung zur gewöhnlichen Definition äquivalent ist!

Aufgabe 4 (Kommutativität des Tensorprodukts; 4 (= 2 + 2) Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K.

1. Zeigen Sie, dass wie folgt wohldefinierte K-lineare Abbildungen beschrieben werden:
$$\begin{aligned} V \otimes_K W &\longrightarrow W \otimes_K V \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v \\ W \otimes_K V &\longrightarrow V \otimes_K W \\ w \otimes v &\longmapsto v \otimes w \end{aligned}$$
2. Folgern Sie, dass $V \otimes_K W \cong_K W \otimes_K V$ gilt.

Bonusaufgabe (Blorxisch; 4 Punkte)**.** Die Sprache **BLORX** beruht auf dem Alphabet mit den Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X**. Blorxische Wörter werden dabei nach den folgenden Regeln gebildet:

- Wörter dürfen mit jedem der Buchstaben **B**, **L**, **O**, **R**, **X** beginnen.
- Auf **B** kann nur **B** oder **L** folgen (oder das Wortende).
- Auf **L** oder **O** kann nur **L**, **O**, **R** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **R** kann nur **O** oder **X** folgen (oder das Wortende).
- Auf **X** kann nur **L** oder **X** folgen (oder das Wortende).

Zum Beispiel sind **BLORX** und **RORO** korrekte blorxische Wörter, *nicht* aber **ROXOR**. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die Anzahl der blorxischen Wörter gegebener Länge, die mit **X** beginnen und mit **X** enden!
Hinweis. Betrachten Sie eine geeignete Matrix in $\mathrm{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$, deren Einträge nur Nullen und Einsen sind. Was haben Potenzen dieser Matrix mit den gesuchten Anzahlen zu tun? Wie kann man Potenzen von Matrizen mithilfe der Jordanschen Normalform bestimmen?

Bonusaufgabe (Cayley–Hamilton, ganz einfach?! 4 Punkte)**.** Was ist falsch am nachfolgenden „Beweis“? Geben Sie genau an, an welcher Stelle etwas schiefgeht und erklären Sie den Fehler!

Behauptung. Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann ist μ_A in $K[T]$ ein Teiler von χ_A.

Beweis. Da das Minimalpolynom den Kern der Auswertung bei A als Ideal in $K[T]$ erzeugt, genügt es zu zeigen, dass $\chi_A(A) = 0 \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ gilt.

Nach Definition des charakteristischen Polynoms ist $\chi_A = \det(T \cdot I_n - A)$. Also erhalten wir $\chi_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = \det 0 = 0$,wie gewünscht. □

Hinweis. Es ist hilfreich, dies an einem konkreten Beispiel, Schritt für Schritt durchzugehen und jeweils pedantischst darauf zu achten, dass man nicht schlampert ...

Freiwillige Abgabe bis 25. Juli, 8:35, via Briefkasten/GRIPS. Alle Punkte zählen als Bonuspunkte.

C

Organisatorisches

Lineare Algebra II: Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann April 2025

Homepage. Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter/Lesepläne finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg2_ss25

https://elearning.uni-regensburg.de/course/view.php?id=70422

Vorlesung. Die Vorlesung findet jeweils montags (10:15–12:00; H 32) und donnerstags (10:15–12:00; H 32) statt. Die erste Vorlesung ist am Donnerstag, den 24. April, um 10:15. Das Vorlesungsskript ist über die Vorlesungshomepage und GRIPS zugänglich; das Skript wird jeweils *nach* der Vorlesung im Verlauf des Tages aktualisiert.

Ich möchte alle Teilnehmer dazu ermutigen, sich aktiv an der Vorlesung zu beteiligen und Fragen zu stellen bzw. zu beantworten. Deshalb möchte ich die Atmosphäre so locker, informell und unverbindlich wie möglich halten.

Übungen. Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich donnerstags spätestens um 10:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum Freitag eine Woche später um 8:35 Uhr abzugeben (in die Briefkästen oder via GRIPS).

Auf jedem Übungsblatt gibt es vier reguläre Aufgaben (je 4 Punkte), Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte) und ab Blatt 3 Wiederholungsaufgabe (je 2 Bonuspunkte).

Sie dürfen und sollen die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden, andernfalls werden die Punkte aberkannt. Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen zu präsentieren, andernfalls werden die Punkte aberkannt.

Die Übungsgruppen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen werden die Fingerübungen von Blatt 1 besprochen. Erste Fragen können Sie außerdem gerne in der Zentralübung stellen.

Zentralübung. Zusätzlich zur Vorlesung und den Übungen bietet die Zentralübung die Gelegenheit, Fragen zu stellen, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen und weitere Beispiele zu behandeln. Die Zentralübung findet montags (14:15–15:45; H 32) statt. Die Zentralübung beginnt in der *zweiten* Vorlesungswoche und ist ein freiwilliges Zusatzangebot.

Fingerübungen. Das Skript und die Übungsblätter enthalten Fingerübungen, die elementare Techniken und Begriffe trainieren. Diese Aufgaben sollten im Idealfall so einfach sein, dass sie innerhalb weniger Minuten

gelöst werden können. Diese Aufgaben werden nicht abgegeben bzw. korrigiert. Die Fingerübungen auf den Übungsblättern werden in den Übungsgruppen gemeinsam behandelt und können zusätzlich auch gut zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben genutzt werden.

Einteilung in die Übungsgruppen. Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über GRIPS.

Sie können sich bis Freitag, den 25. April 2025, um 9:00 Uhr für die Übungen anmelden; Sie können dort Ihre Präferenzen für die Übungstermine auswählen und wir werden versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Bitte beachten Sie jedoch, dass es sein kann, dass wir nicht alle Wünsche erfüllen können.

Anmeldungen über EXA/SPUR für die Übungsgruppen werden *nicht* berücksichtigt!

Die endgültige Einteilung der Übungsgruppen wird voraussichtlich am Freitag, den 25. April 2025, in GRIPS bekanntgegeben. Ein Wechsel in volle Übungsgruppen ist dann nur durch Tausch mit einem Tauschpartner möglich.

Bei Fragen zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Franziska Hofmann (franziska2.hofmann@mathematik.uni-r.de).

Prüfungs-/Studienleistungen. Die Vorlesung *Lineare Algebra II* kann wie in den Modulkatalogen spezifiziert in die Studiengänge eingebracht werden.

- *Studienleistung*: Erfolgreiche Teilnahme an den Übungen: Mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen.
- *Prüfungsleistung*: schriftliche Klausur (120 Minuten).

Die Wiederholungsklausur kann auch als Erstversuch geschrieben werden; diese Option ist nur in Einzelfällen sinnvoll: der nächste Wiederholungstermin ist dann erst ein Jahr später im Rahmen der nächsten Vorlesung Lineare Algebra II.

Um das Modul *MAT-BGLA* bzw. *MAT-LA-GyLA* erfolgreich abzuschließen, müssen folgende Leistungen erbracht werden

- Studienleistung Lineare Algebra I
- Studienleistung Lineare Algebra II
- Prüfungsleistung Lineare Algebra I oder Lineare Algebra II [gewichtet mit 1/3]
- mündliche Modulprüfung [gewichtet mit 2/3].

Sie müssen sich in FlexNow für die Studienleistung und die Prüfungsleistung anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig über die für Sie gültigen Modalitäten (Prüfungsordnung, Modulkatalog, ggf. Studiengangskoordination und Studienberatung). Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Klausurtermine. Die Klausuren finden zu folgenden Terminen statt:

- Klausur: 28.07.2025
- Wiederholungsklausur: am Ende der Semesterferien (Termin wird rechtzeitig bekanntgegeben).

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

https://www.uni-regensburg.de/studium/startseite/verhalten-krankheitsfall/index.html

Hinweise für Wiederholer. Studenten, die bereits in einem vorangegangenen Semester an der Vorlesung teilgenommen haben, aber im entsprechenden Semester die Klausur nicht bestanden haben oder nicht an der Klausur teilgenommen haben, können auch an den oben genannten Klausurterminen teilnehmen, sofern noch ein Prüfungsanspruch besteht. Informieren Sie sich rechtzeitig über den Stoffumfang dieser Vorlesung (z.B. über das Skript und die Übungsblätter). Außerdem kann es je nach Kenntnisstand sinnvoll sein, nochmal an den Übungen oder der Vorlesung teilzunehmen.

Falls Sie an den Übungen teilnehmen möchten, ohne dass Ihre Lösungen korrigiert werden sollen, schreiben Sie bitte eine email an Franziska Hofmann (franziska2.hofmann@mathematik.uni-r.de) mit Ihren Wunschterminen (damit die Übungsgruppen einigermaßen gleichmäßig besucht sind).

Ansprechpartner.

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an Franziska Hofmann (franziska2.hofmann@mathematik.uni-r.de).
- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder fragen Sie in der Zentralübung.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Franziska Hofmann oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung, die Studiengangskoordination oder das zuständige Prüfungsamt.
- Bei vielen Fragen kann Ihnen auch die Fachschaft weiterhelfen:

https://www.uni-regensburg.de/studium/fachschaft-mathe-physik/startseite/index.html

Lineare Algebra II: Üben

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann April 2025

Wissen, Verstehen, Üben

Wissen, Verstehen, Üben bedingen und verstärken sich gegenseitig. Insbesondere hilft das Üben dabei, Wissen, Verständnis und spezifische Beweis-, Rechen- und Problemlösetechniken zu automatisieren. Diese Automatisierung ist für das Lösen komplexerer Probleme unerlässlich und gibt den Freiraum für die Entwicklung mathematischer Kreativität.

Üben Sie jeden Tag ein bisschen; es ist besser, jeden Tag eine Stunde Lineare Algebra II zu üben als einmal in der Woche viele Stunden am Stück!

Ziel der Übungsaufgaben ist, sich aktiv mit den behandelten Definitionen, Sätzen, Beispielen und Beweistechniken auseinanderzusetzen und zu lernen, damit umzugehen. Insbesondere ist der Weg das Ziel: Es ist wertvoller, eigenständig eine Aufgabe suboptimal zu bearbeiten als eine korrektere Lösung von anderen zu übernehmen. Nutzen Sie den Luxus, dass Sie für Ihre Abgaben *individuelle* Rückmeldung erhalten!

Das Punkteminimum für die Studienleistung ist das *Minimum*. Sie sollten versuchen, möglichst viele Punkte zu erreichen und nicht nach Erreichen dieser Minimalzahl die Übungen schleifen lassen!

Tag 0: Das neue Übungsblatt

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung des Übungsblattes an dem Tag, an dem das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch.
- Kennen Sie die auftretenden Begriffe? Wenn nicht: Nachschlagen/Merken!
- Verstehen Sie, was in der Aufgabe verlangt wird? Insbesondere: Was ist gegeben? Was ist zu tun/zeigen? Welche Ansätze kommen für die Lösung strukturell in Frage?
- Gibt es Sätze/Beispiele aus der Vorlesung, die auf diese Situation passen?
- Welche Lösungsstrategien bzw. Beweisstrategien passen auf die Aufgabe? Kann man einfach direkt mit den Definitionen arbeiten und so zum Ziel gelangen?
- Ist die Aufgabe plausibel? Versuchen Sie, die behaupteten Aussagen an einfachen Beispielen nachzuvollziehen!
- Falls Sie die Aufgabe unplausibel finden, können Sie versuchen, sie zu widerlegen und untersuchen, woran dieses Vorhaben scheitert.
- Kann man die Situation durch eine geeignete Skizze graphisch darstellen?

Tägliche Routine

- Schaffen Sie ein Umfeld, in dem Sie konzentriert, produktiv, ablenkungsfrei (Mobiltelefon?!) und ergonomisch arbeiten können.
- Überlegen Sie sich, woran Sie arbeiten möchten bzw. welche Ziele Sie in dieser Übeeinheit erreichen möchten.
- Beginnen Sie zum „Aufwärmen“ mit einfachen Dingen. Zum Beispiel mit dem Lernen von in der Vorlesung behandelten Begriffen/Sätzen, mit den Fingerübungen auf den Übungsblättern oder mit den Fragen/Beispielen im Skript.
- Bearbeiten Sie dann die Aufgaben auf dem Übungsblatt.

  Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuexperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig oder nicht korrekt lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit dem Material auseinandersetzen.

  Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen oder verwenden Sie Literatur. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben, K„I“-Systemen blind zu vertrauen oder ausschließlich in Gruppen zu arbeiten. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!

  Notieren und sammeln Sie Ihre Fragen. Können Sie Ihre Fragen vom Vortag beantworten? Woran möchten Sie am nächsten Tag weiterarbeiten?
- Planen Sie Pausen ein (mental und physisch).
- Beenden Sie Ihre Übeeinheit mit einem Aspekt von Mathematik, der Ihnen uneingeschränkt Spaß macht. Zum Beispiel mit ergänzender Literatur/ergänzenden digitalen Angeboten, mit mathematischen Rätseln, Cartoons, Spielen ... Für Lehramtskandidaten: (wie) könnte das Gelernte in der Schule eingesetzt werden?

Aufschreiben von Lösungen

- Auch wenn Sie in einer größeren Gruppe kooperiert haben: Schreiben Sie Ihre Lösungen selbständig auf.
- Gliedern Sie Ihre Lösung sauber in Voraussetzung, Behauptung und Beweis. Passt dies mit der Aufgabe zusammen?
- Teilen Sie Ihre Beweise in sinnvolle Zwischenschritte auf (auch optisch!).
- Achten Sie darauf, dass Sie verständlich formulieren und dass die Argumente logisch aufeinander aufbauen.
- Ist Ihre Argumentationskette wirklich lückenlos? Seien Sie misstrauisch gegenüber Ihrer eigenen Lösung und versuchen Sie, alle potentiellen Schwachpunkte ausfindig zu machen!

- Wenn Sie einzelne Beweisschritte nicht vollständig durchführen können, können Sie in Ihrer Lösung darauf hinweisen – die restliche Lösung kann trotzdem Punkte erhalten.
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Bezeichner einführen und dass Sie mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt verwenden.
- Versuchen Sie, sich so präzise wie möglich auszudrücken.
- Versuchen Sie, indirekte Argumente so weit wie möglich zu vermeiden.
- Überprüfen Sie am Ende, ob Sie wirklich das bewiesen haben, was Sie ursprünglich behauptet haben.
- Oft ist es auch hilfreich zu überprüfen, ob/wie alle in der Aufgabe gegebenen Voraussetzungen verwendet wurden.
- Würden Sie Ihre Lösung verstehen, wenn Sie sie zum ersten Mal lesen würden?
- Alles, was Sie abgeben, müssen Sie eigenständig formuliert und auch verstanden haben.
- Geben Sie Literaturangaben an, wenn Sie zusätzliche Quellen verwendet haben.
- Teilen Sie Ihre Lösungen vor dem Abgabetermin *nicht* auf sozialen Netzwerken etc. mit den anderen Teilnehmern der Vorlesung. Nichts ist demotivierender, als eine Aufgabe zu bearbeiten, für die bereits Lösungen offen kursieren. Es spricht aber natürlich nichts dagegen, konkrete Fragen anderer Teilnehmer zu beantworten.

Tag $n-1$: Checkliste vor der Abgabe

- Verstehen Sie Ihre Lösung immer noch?
- Bei jeder Aufgabe: Lösung sauber strukturiert?

  Insbesondere (fast immer): Voraussetzung, Behauptung, Beweis!
- Name(n) auf der Abgabe?

  Nummer der Übungsgruppe auf der Abgabe?
- Können alle Autoren die abgegebenen Lösungen vorstellen?
- Achten Sie bitte auf gute Lesbarkeit und Verständlichkeit;
  lassen Sie genug Platz für Korrekturanmerkungen.
- Papierabgabe:
  - Blätter im A4-Format?
  - Blätter zusammengetackert?
    Bitte keine Umschläge, Hefter, ... verwenden!
  - In den richtigen Briefkasten einwerfen!

- Digitale Abgabe:
  - Abgabe nur im pdf-Format möglich
  - Bei gescannten Lösungen: Lesbarkeit?!

Bewertungskriterien

- Wurden Voraussetzung, Behauptung, Beweis deutlich gekennzeichnet und voneinander getrennt?
- Stimmen die Voraussetzungen? Sind sie sauber formuliert?
- Stimmen die Behauptungen/Zwischenbehauptungen? Sind sie sauber formuliert?
- Ist die Argumentationskette der Beweisschritte vollständig?
- Sind die Beweisschritte präzise formuliert und verständlich?
- Sind alle Bezeichner eingeführt?
- Werden mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt eingesetzt?
- Ist an jeder Stelle des Beweises klar, was passiert?
- Werden die neu erlernten Begriffe und Techniken passend eingesetzt?
- Wurde die gestellte Aufgabe vollständig gelöst?
- Falls Lösungen abgeschrieben wurden und dies von den Übungsleitern entdeckt wird, erhalten Sie auf diese Aufgaben keine Punkte. Mal abgesehen davon, dass es weder sinnvoll noch fair ist, abzuschreiben.

Fehlerkultur

Fehler sind ein natürlicher und wichtiger Bestandteil in jedem Lernprozess. Sie bieten gute Gelegenheiten, ein besseres Verständnis zu erlangen.

- Haben Sie keine Angst vor Fehlern!
- Langfristig sollen Fehler minimiert werden. Kurzfristig sind sie aber hilfreich beim Lernen, da sie die Grenze zwischen „korrekt“ und „inkorrekt“ deutlicher hervortreten lassen.
- Wichtig ist, dass Sie nach der Korrektur/Diskussion verstehen, warum ein Fehler vorliegt und wie man ihn beheben kann.

  Insbesondere: Schauen Sie sich die Korrekturen Ihrer Übungsabgaben genau an. Nutzen Sie diese individuelle Rückmeldung zu Ihrem aktuellen Stand!
- Fehler sollten nach Möglichkeit nicht wiederholt werden.
- Falls Sie Fehler in der Vorlesung oder auf den Übungsblättern entdecken, geben Sie bitte Franziska Hofmann oder Clara Löh Bescheid.

Übungsgruppe

Ziel der Übungsgruppen ist nicht nur die Rückgabe der Korrekturen und das Besprechen von Lösungen. Sie sollen lernen, mathematisch zu diskutieren, Strategien zur Problemlösung zu finden/anzuwenden, und Sie sollen lernen, mathematische Fehler zu erkennen bzw. zu beheben.

- Beantwortung von Fragen zur Vorlesung und zu den Übungsaufgaben.

  Bereiten Sie sich entsprechend vor, sammeln Sie Ihre Fragen und stellen Sie diese während des Übungstermins.

- Bearbeitung (einer Auswahl) von Fingerübungen auf den Übungsblättern.

  Bereiten Sie sich darauf vor, indem Sie die Aufgaben beim täglichen Üben anschauen bzw. bearbeiten. Fragen Sie, wenn Sie Schwierigkeiten bei diesen Aufgaben haben!

- Besprechung von Lösungen der korrigierten Aufgaben.

  Im Normalfall sollen die Teilnehmer vorrechnen! Haben Sie keine Angst, eine Aufgabe vorzurechnen. Auch dann nicht, wenn Ihre Lösung nicht ganz richtig oder vollständig ist. Die Übungsgruppe ist *keine* Prüfung und *keine* Verkündung von „Musterlösungen“, sondern eine Gelegenheit, Mathematik und Kommunikation von Mathematik gemeinsam zu üben.

Zentralübung

Die Zentralübung bietet die Gelegenheit, Fragen zu stellen, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen und weitere Beispiele zu behandeln.

- Bereiten Sie sich darauf vor, indem Sie im Voraus Fragen sammeln.
- Sie können auch das anonyme Frageforum in GRIPS nutzen, um Fragen vorab zu stellen (bzw. gegebenenfalls direkt Antworten zu erhalten).
- Die Zentralübung lebt von Ihren Fragen. Haben Sie keine Angst, Fragen zu stellen. Je mehr verschiedene Teilnehmer Fragen stellen, desto mehr interessante und hilfreiche Blickwinkel ergeben sich.

Viel Erfolg und viel Spaß bei den Übungen!

Lineare Algebra II:
Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann April 2025

Ziel der Prüfungsvorbereitung

Hauptziel der Prüfungsvorbereitung ist die souveräne Beherrschung des behandelten Fachgebiets. Die Prüfung sichert ab, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist aber nicht das eigentliche inhaltliche Ziel der Vorlesung/Übungen. Beherrscht werden sollten also:

- aktive Kenntnis der Fachbegriffe und Formalisierungsmethoden
- Verständnis der Ideen, die zu diesen Fachbegriffen und Formalisierungen führen
- wichtige Probleme und Fragestellungen, die das Gebiet maßgeblich beeinflusst haben bzw. die durch das Gebiet gelöst werden können
- wichtige Resultate und Zusammenhänge innerhalb des Gebiets
- wichtige Beweis- und Lösungsstrategien
- repräsentative Beispiele
- Anwendungen des Gebiets und Interaktion mit anderen Gebieten
- Fähigkeit, auf all diesen Kenntnissen weiter aufzubauen.

Insbesondere müssen Definitionen und Sätze inhaltlich präzise und vollständig reproduziert werden können, inklusive aller Voraussetzungen, Quantoren, ... Es genügt *nicht*, nur eine vage Vorstellung des Inhalts der Definitionen und Sätze zu haben.

Erreichen dieses Ziels

Während der Vorlesungszeit:

- aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben
- Erlernen des Fachwissens (Definitionen, Sätze), notfalls mit Karteikarten
- Sortierung des Materials in zentrale/wichtige Dinge und eher unwichtige; diese Priorisierung beim Lernen berücksichtigen
- weiteres aktives Üben mit zusätzlichen Aufgaben und Vertiefung der Kenntnisse durch Selbststudium (Bibliothek und Computer-Werkzeuge)
- Bei Fragen: Betreuungsangebote nutzen!

Es ist viel einfacher, sich Definitionen, Sätze und Beweise inhaltlich präzise zu merken, wenn man sie und die unterliegenden Ideen genau verstanden hat. Lernen mit Verständnis ist daher viel effizienter, robuster und flexibler als Lernen ohne Verständnis.

Während der gezielten Prüfungsvorbereitung:

- Wiederholung und Festigung des gelernten Fachwissens
- weiteres aktives Üben
- Zusammenfassung der wichtigsten Inhalte der Vorlesung auf wenigen Seiten (es geht darum, selbst eine Zusammenfassung zu erstellen, *nicht* eine solche von jemand anderem auswendig zu lernen!)
- Bei Fragen: Kommilitonen oder Studenten aus höheren Semestern ansprechen
- Pausen einplanen
- *nicht* erst nach der vorigen Prüfung mit der Vorbereitung auf die nächste Prüfung beginnen

Kurz vor der Prüfung:

- Kann ich mein Wissen präzise, verständlich und flüssig schriftlich bzw. mündlich präsentieren? (Das kann man einfach an anderen Kommilitonen ausprobieren ...)
- Was könnten typische Prüfungsfragen sein? Was sind gute Lösungen zu diesen Fragen? (Dabei können insbesondere Probeklausuren, Altklausuren und Gedächtnisprotokolle von Prüfungen hilfreich sein.)
- Wie belastbar sind meine Fähigkeiten? Was muss ich noch verbessern?
- Bei Fragen: Kommilitonen oder Studenten aus höheren Semestern ansprechen

Im Falle einer Wiederholungsprüfung:

- kritisch hinterfragen, was bei der Vorbereitung für den vorigen Prüfungsversuch suboptimal gelaufen ist; Lernstrategie und Lernorganisation entsprechend anpassen

Bewertungskriterien

In der Prüfung werden folgende Fähigkeiten abgeprüft:

- Fachwissen (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Anschauung, Zusammenhänge, Anwendungen, ...)
- präzises und korrektes, logisch schlüssiges, Formulieren und Argumentieren
- Lösen von Standardproblemen
- Kreativität bei der Lösung von Problemen

Es gelten sinngemäß dieselben Grundsätze wie beim Aufschreiben/Präsentieren von Lösungen in Übungsgruppen und wie bei der Bewertung von Abgaben zu Übungsblättern:

- https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/ueben.pdf
- https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf

Konkrete Hinweise

Definitionen:

- Was sind die Voraussetzungen?
- Welcher Begriff wird definiert?
- Warum genau so und nicht anders? (Beispiele, Zusammenhang mit anderen Definitionen, weitere Verwendung in der Theorie und in Anwendungen)
- Was sind Beispiele, die die Definition erfüllen? (Sowohl einfache als auch komplexere)
- Was sind Beispiele, die die Definition nicht erfüllen? (Sowohl einfache als auch komplexere)

Sätze, Propositionen, etc.:

- Was sind die Voraussetzungen?
- Was wird behauptet?
- Warum genau so und nicht anders? (Beispiele, Zusammenhang mit anderen Resultate, weitere Verwendung in der Theorie und in Anwendungen)
- Was passiert, wenn nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?
- Was sind einfache konkrete Beispiele, auf die dieser Satz angewendet werden kann? Was liefert der Satz in diesem Fall?
- Was sind wichtige weitere Anwendungen dieses Satzes?
- In welchen zentralen Beweisen wird dieser Satz verwendet?
- Wie kann man den Satz beweisen?

Beweise:

- Was ist die unterliegende Idee? Was ist die unterliegende Struktur?
- Was ist speziell/interessant an diesem Beweis?
- Benötigt der Beweis einen Trick?
- Gibt es weitere Sätze, die mit einer ähnlichen Technik bewiesen werden?
- Ginge das nicht auch einfacher?! Falls ja: prima! Falls nein: Warum nicht?
- Welche Hilfsmittel/vorigen Resultate gehen in diesen Beweis ein?
- Können Sie den Beweis kurz zusammenfassen? Können Sie ihn dann wieder zu einem vollständigen Beweis auffüllen?

Viel Erfolg bei der Prüfung!

Literaturverzeichnis

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, dritte Auflage, Springer, 2004. Cited on page: 87

[2] S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014. Cited on page: 104, 110, 137

[3] H.-D. Ebbinghaus et. al.. *Zahlen*, Springer, 1992. Cited on page: A.3

[4] K. Jänich. *Vektoranalysis*, fünfte Auflage, Springer, 2005. Cited on page: 174

[5] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek. *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences, Band 157, Springer, 2004. Cited on page: 107

[6] C. Löh. *Geometrie (Lehramt Gymnasium)*, Vorlesungsskript, SS 2023, Universität Regensburg, 2023. Cited on page: 16, 19

[7] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998. Cited on page:

[8] J. Matoušek. *Thirty-three Miniatures. Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra.* AMS Student Mathematical Library, Band 53, AMS, 2010. Cited on page: 161

[9] *OpenGL Wiki*, https://www.khronos.org/opengl/wiki/ Cited on page:

[10] B.C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991. Cited on page:

[11] S.D. Schoen. Understanding Common Factor Attacks: An RSA-Cracking Puzzle http://www.loyalty.org/∼schoen/rsa/ Cited on page: 94

Deutsch → English

A

Absolutbetrag	absolute value	A.5
Algebra	algebra	60
algebraisch abgeschlossen	algebraically close	128
algebraisch abgeschlossen	algebraically closed	A.3
äußeres Produkt	exterior product	162

B

Banachraum	Banach space	14
Begleitmatrix	companion matrix	118
Bilinearform	bilinear form	7

C

chinesischer Restsatz	Chines remainder theorem (CRT)	94

D

direkte Summe	direct sum	75
Dreiecksungleichung	triangle inequality	11
duale Abbildung	dual map	148
Dualraum	dual vector space	146

E

Einheit	unit	84
Elementarteiler	elmentary divisor	99
endlich erzeugt	finitely generated	64
endlich präsentiert	finitely presented	98

Erzeugendensystem	generating set	64
euklidische Norm	euclidean norm	13
euklidischer Ring	Euclidean ring	81
euklidischer Vektorraum	euclidean vector space	10

F

faktorieller Ring	unique factorisation domain	88
Form	form	7
freier Modul	free module	79
Funktionalanalysis	functional analysis	14

G

größter gemeinsamer Teiler	greatest common divisor (gcd)	91

H

Hauptachsentransformation	principal axis theorem	47
Hauptideal	principal ideal	80
Hauptidealring	principal ideal domain	80
hermitesches Skalarprodukt	hermitian inner product	8
Hilbertraum	Hilbert space	14
Homogenität	homogeneity	11

I

Ideal	ideal	69
imaginäre Einheit	imaginary unit	A.4
Imaginärteil	imaginary part	A.4
indefinit	indefinite	7
induzierte Norm	induced norm	11
Integritätsring	integral domain	57
irreduzibel	irreducible	84
Isometrie	isometry	16

K

kleinstes gemeinsames Vielfaches	least common multiple (lcm)	91
komplexe Konjugation	complex conjugation	A.6
Koprodukt	coproduct	78
Kosinus	cosine	A.7

L

linksseitiges Ideal	left ideal	69

M

Mannigfaltigkeit	manifold	174
Minimalpolynom	minimal polynomial	120
Modul	module	62
Modulhomomorphismus	module homomorphism	66

N

negativ definit	negative definite	7
negativ semi-definit	negative semi-definite	7
noethersch	noetherian	89
Norm	norm	10
normierter Vektorraum	normed space	10

O

Orientierung	orientation	171
orthogonal	orthogonal	25
orthogonale Gruppe	orthogonal group	33
orthogonale Projektion	orthogonal projection	30
Orthonormalbasis	orthonormal basis	26

P

Polynomdivision	polynomial long division	82
positiv definit	positive definite	7
positiv semi-definit	positive semi-definite	7
prim	prime	84

Q

Quadrik	quadric	47

R

Realteil	real part	A.4
Ring	ring	56
Ringhomomorphismus	ring homomorphism	59

S

selbstadjungiert	self-adjoint	24
Sesquilinearform	sesquilinear form	9
Signatur	signature	50
Sinus	sine	A.7
Skalarprodukt	inner product	7
Smith-Normalform	Smith normal form	99
Spektralsatz	spectral theorem	39
spezielle orthogonale Gruppe	special orthogonal group	33
spezielle unitäre Gruppe	special unitary group	33
Standardskalarprodukt	standard inner product	8
Sylvesterscher Trägheitssatz	Sylvester's law of inertia	50
symmetrisch	symmetric	7

U

unitäre Gruppe	unitary group	33
unitärer Vektorraum	unitary vector space	10
universelle Eigenschaft	universal property	60
Untermodul	submodule	62
unzerlegbar	indecomposable	79

W

Winkel	angle	14
winkeltreu	angle preserving	19

Z

zerlegbar	decomposable	79

English → Deutsch

A

absolute value	Absolutbetrag	A.5
algebra	Algebra	60
algebraically close	algebraisch abgeschlossen	128
algebraically closed	algebraisch abgeschlossen	A.3
angle	Winkel	14
angle preserving	winkeltreu	19

B

Banach space	Banachraum	14
bilinear form	Bilinearform	7

C

Chines remainder theorem (CRT)	chinesischer Restsatz	94
companion matrix	Begleitmatrix	118
complex conjugation	komplexe Konjugation	A.6
coproduct	Koprodukt	78
cosine	Kosinus	A.7

D

decomposable	zerlegbar	79
direct sum	direkte Summe	75
dual map	duale Abbildung	148
dual vector space	Dualraum	146

E

elmentary divisor	Elementarteiler	99

euclidean norm	euklidische Norm	13
Euclidean ring	euklidischer Ring	81
euclidean vector space	euklidischer Vektorraum	10

F

finitely generated	endlich erzeugt	64
finitely presented	endlich präsentiert	98
form	Form	7
free module	freier Modul	79
functional analysis	Funktionalanalysis	14

G

generating set	Erzeugendensystem	64
greatest common divisor (gcd)	größter gemeinsamer Teiler	91

H

hermitian inner product	hermitesches Skalarprodukt	8
Hilbert space	Hilbertraum	14
homogeneity	Homogenität	11

I

ideal	Ideal	69
imaginary part	Imaginärteil	A.4
imaginary unit	imaginäre Einheit	A.4
indecomposable	unzerlegbar	79
indefinite	indefinit	7
induced norm	induzierte Norm	11
inner product	Skalarprodukt	7
integral domain	Integritätsring	57
irreducible	irreduzibel	84
isometry	Isometrie	16

L

least common multiple (lcm)	kleinstes gemeinsames Vielfaches	91
left ideal	linksseitiges Ideal	69

M

manifold	Mannigfaltigkeit	174
minimal polynomial	Minimalpolynom	120
module	Modul	62
module homomorphism	Modulhomomorphismus	66

N

negative definite	negativ definit	7
negative semi-definite	negativ semi-definit	7
noetherian	noethersch	89
norm	Norm	10

normed space	normierter Vektorraum	10

O

orientation	Orientierung	171
orthogonal	orthogonal	25
orthogonal group	orthogonale Gruppe	33
orthogonal projection	orthogonale Projektion	30
orthonormal basis	Orthonormalbasis	26

P

polynomial long division	Polynomdivision	82
positive definite	positiv definit	7
positive semi-definite	positiv semi-definit	7
prime	prim	84
principal axis theorem	Hauptachsentransformation	47
principal ideal	Hauptideal	80
principal ideal domain	Hauptidealring	80

Q

quadric	Quadrik	47

R

real part	Realteil	A.4
ring	Ring	56
ring homomorphism	Ringhomomorphismus	59

S

self-adjoint	selbstadjungiert	24
sesquilinear form	Sesquilinearform	9
signature	Signatur	50
sine	Sinus	A.7
Smith normal form	Smith-Normalform	99
special orthogonal group	spezielle orthogonale Gruppe	33
special unitary group	spezielle unitäre Gruppe	33
spectral theorem	Spektralsatz	39
standard inner product	Standardskalarprodukt	8
submodule	Untermodul	62
Sylvester's law of inertia	Sylvesterscher Trägheitssatz	50
symmetric	symmetrisch	7

T

triangle inequality	Dreiecksungleichung	11

U

unique factorisation domain	faktorieller Ring	88
unit	Einheit	84
unitary group	unitäre Gruppe	33
unitary vector space	unitärer Vektorraum	10
universal property	universelle Eigenschaft	60

Index

A

Abbildung
    alternierend, 163
    antisymmetrisch, 163
    bilinear, 149, 151
    multilinear, 149, 151
abelsche Gruppe, B.24
    Klassifikation, 113
Absolutbetrag, A.5
Additionstheorem, A.8
adjungierte Abbildung, B.14
adjungierter Homomorphismus, 40, B.10
Algebra, 1, 60
    Homomorphismus, 60
algebraisch abgeschlossen, 128, 129, A.3
algebraische Vielfachheit, 128
algebraischer Abschluss, 129
Algebrenhomomorphismus, 60
Algorithmus
    Division mit Rest, B.18
    euklidischer Algorithmus, 92, 93
    Gauß, 98
    Polynomdivision, 82
    Smith-Normfalform, 101
Alphabet
    griechisches, A.2
alternierende Abbildung, 163
Anschauung
    Parallelogrammgleichung, B.1
    Polarisierung, B.1
    Winkel, 15
antisymmetrisch
    Abbildung, 163
Anwendung
    äußeres Produkt, 170
arccos, A.8
arcsin, A.8
assoziierter Modul, 65
assoziiertes Element, 84
äußeres Produkt, 162, 165
    Anwendung, 170
    Baukasten, 165
    Dimension, 168
    Dualraum, 169
    universelle Eigenschaft, 164
    Wozu?, 163, 164
Auswahlaxiom
    Axiom of Dependent Choice, 89
Axiom of Dependent Choice, 89

B

Banachraum, 14
Basis
    duale Basis, 147
    eines Moduls, 79
    Tensorprodukt, 155
Basiswechsel
    Bilinearform, 21
    Sesquilinearform, 24
Basiswechselwunder, 22
Begleitmatrix, 118
    Minimalpolynom, 124
bilineare Abbildung, 149, 151
    Skalarprodukt, 150
Bilinearform, 7, 150, B.6
    Basiswechsel, 21
    Basiswechselwunder, 22
    Definitheit, 7
    Matrix, 20
    Matrizenkalkül, 20
    Skalarprodukt, 7
    Symmetriekriterium, 23
    symmetrisch, 7
    Vektorraum, 20
Blorxisch, B.26

C

Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, 11
Cayley–Hamilton, 124, B.26
charakteristisches Polynom, 124, 128
chinesischer Restsatz, 94
Common Factor Attack, 94
cos
    seeKosinus, A.7

D

Definitheit, 7, 11, 23, 45
Definitheitskriterium, 45
Determinante, 7, 100, 150, 163
    koordinatenfrei, 170
    Leibnizformel, 100
Determinantenideal, 100, B.22
Deviationsmoment, 49
Diagonalisierbarkeit, B.24
    Minimalpolynom, 126
Differentialform, 174
Dimension, 80
    äußeres Produkt, 168
    Tensorprodukt, 155
direkte Summe, 78
    Inklusion, 76
    Modul, 75
    universelle Eigenschaft, 77, 78
    von Moduln, B.16
Division mit Rest, B.18
Doppeldual, 147
Drehung, 17
Dreieck, B.4
    Innenwinkel, B.4
    Winkelsumme, B.4
Dreiecksungleichung
    Norm, 11
duale Abbildung, 148
duale Basis, 147
Dualraum, 146, 147, B.26
    äußeres Produkt, 169
    duale Basis, 147
    Exaktheit, 148
    Funktorialität, 148

E

ebene Geometrie, 5
ebene Quadrik, 47
Eigenwert
    algebraische Vielfachheit, 128
    geometrische Vielfachheit, 128
Einheit, 84
elementare Geometrie, 16
Elementarteiler, 99, 104, B.26
    Modul, 108, B.22
    Reim, B.22
Elementarteilersatz, 98, 99, 104
    für Moduln, 108
Elementartensor, 151, 152, B.26
Ellipse, 47
endlich erzeugter Modul, 64
endlich präsentiert, 98
Endmomorphismus

Minimalpolynom, 123
Endomorphismenmodul, 116, B.16
invariant, 117
Matrizenkalkül, 116
Modulhomomorphismus, 67
Primzerlegung, 117
reduzibel, 117
Wörterbuch, 117
Zerlegung, 116, 118
zyklisch, 117
Endomorphismenpolynom, 62
Endomorphismenring, 57
Endomorphismus, B.16
assoziierter Modul, 65
charakteristisches Polynom, 124
Jordansche Normalform, 126, 130, 132
Minimalpolynom, 120, 124
Modul, 65
normal, 44
Polynom, B.12
Satz von Cayley–Hamilton, 124
selbstadjungiert, 39, 41
Zerlegung, 54, 116, 118
Erzeugendensystem, B.14
Modul, 64
erzeugter Untermodul, 64
erzeugtes Ideal, 81
euklidische Ebene
Dreieck, B.4
Isometrie, 17, 18
euklidische Gradfunktion, 81
euklidische Norm, 6, 13
euklidischer Algorithmus, 92, 93
Analyse, 92
in Haskell, 93
euklidischer Ring, 81, 82
Gradfunktion, 81
Hauptidealring, 83, 84
euklidischer Vektorraum, 5, 10
Isometrie, 19
Klassifikation, 30
euklidisches Skalarprodukt, *siehe* Standardskalarprodukt
Exaktheit
Dualraum, 148

F

faktorieller Ring, 88, 89, 90
Form, 7
Bilinearform, 7
sesquilinear, 9
freier Modul, 79, B.16
Rang, 107
Funktionalanalysis, 14
Funktionalkalkül, 44
Funktorialität
Dualraum, 148

G

Gauß-Algorithmus, 98
Geometrie, 5
geometrische Vielfachheit, 128
verallgemeinerte, 132, 134, 136
ggT, *siehe* größter gemeinsamer Teiler, B.20
Gitterpunkt, B.22
Gleichung
in Ringen, B.20
größter gemeinsamer Teiler, 91, B.20
Darstellungen, 91
euklidischer Algorithmus, 92, 93
Gradfunktion
euklidisch, 81
Gram–Schmidt
Orthonormalisierung, 27, B.6
griechisches Alphabet, A.2
Gruppe
abelsch, B.24
orthogonale, 33, 34
spezielle orthogonale, 33
spezielle unitäre, 33
unitäre, 33, 34, 39

H

Halbtöne, 71
Hauptachse, 48

Hauptachsentransformation, 47, 48, B.10
Hauptideal, 80, 81, B.18
Hauptidealring, 80, 81, 83, 84
  Elementarteilersatz für Moduln, 108
  faktoriell, 89
  freier Modul, 107
  Klassifikation endlich erzeugter Moduln, 109
  lineares Gleichungssystem, 106
  Modul, 95
  noethersch, 89
  Rang, 107
  Untermodul, 96
Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen, 109
hermitesche Sesquilinearform, 9
  Matrix, 24
hermitesches Skalarprodukt, 8
Hesse-Matrix, 46
Hilbertraum, 14
Homogenität, 11
Homomorphiesatz, 74
  für Moduln, B.16
Homomorphismenraum, 146
  Matrizenkalkül, 146
Homomorphismus
  adjungiert, 40
  adjungierter, B.10
  von Algebren, 60
  von Moduln, 66
  von Ringen, 59
Hyperbel, 47

I

Ideal, 69, B.18
  erzeugtes Ideal, 81
  Hauptideal, 80, 81
  Teilbarkeit, 86
imaginäre Einheit, A.4
Imaginärteil, A.4
indefinit, 7, 45
Index
  Kern, 69
induzierte Norm, 11
induzierte Topologie, 14
Inklusion
  direkte Summe, 76
  Produkt, 76
Innenwinkel, B.4
Integritätsring, 57
  Polynomring, 58
invariant, 54
invarianter Unterraum, B.14
Invarianz der Winkelsumme, B.4
irreduzibel, 54, 86
irreduzibles Element, 84
Isometrie, 16
  Charakterisierung, 17
  euklidische Ebene, 17, 18
  Orthonormalbasis, 33
  Rotation, 17
  Spiegelung, 17, 38, B.6
  winkeltreu, 19
Isometriegruppe, B.12
isometrische Einbettung, 16
isomorph
  Moduln, 66
Isomorphismus
  von Moduln, 66
  von Ringen, 59

J

Jordan-Basis, 137, 139, 141
Jordanblock, 54
  Minimalpolynom, 122
  Modul, 124
Jordansche Normalform, 115, 126, 130, B.24
  Bestimmung, 132, 134, 136, 137, 139, 141
  Beweisidee, 55
  Eindeutigkeit, 133
  Elementarteilersatz, 136

K

Kaleidoskop, B.6

Kartentrick, B.14
Kern
    Ideal, 69
    Modulhomomorphismus, 68
Kette
    stationär, 90
kgV, *siehe* kleinstes gemeinsames Vielfaches
Klassifikation
    endlich erzeugter abelscher Gruppen, 113
    endlich erzeugter Moduln, 107, 109
    euklidische/unitäre Vektorräume, 30
Klassifikationssatz
    Matrizen, 118
kleinstes gemeinsames Vielfaches, 91
kommutativer Ring, 56
kompelxe Zahlen
    Imaginärteil, A.4
komplementärer Untermodul, 79
komplementärer Untervektorraum, 31
    Bestimmung, 141
komplexe Konjugation, A.6, B.1
komplexe Zahlen, A.3
    Absolutbetrag, A.5
    Anschauung, A.5
    komplexe Konjugation, A.6
    Polardarstellung, A.5
    Realteil, A.4
Konjugation
    orthogonale Matrix, 35
Konjugationstrick, 44
Konstruktion
    Tensorprodukt, 156
kopmlexe Zahlen
    imaginäre Einheit, A.4
Koprodukt, 78
Körper
    algebraisch abgeschlossen, 128, 129
    algebraischer Abschluss, 129
Körper
    algebraisch abgeschlossen, A.3
Kosinus, A.8
    Additionstheorem, A.8
    arccos, A.8
    periodisch, A.8
Kreuzprodukt, 163, 172, B.4

L

Leibnizformel, 100
linear unabhängig, 79
lineare Abbildung, 66
    duale Abbildung, 148
lineare Algebra
    multilinear, 145
lineare diophantische Gleichung, 106
lineare Isometrie, 16, B.4
lineare isometrische Einbettung, 16
lineares Gleichungssystem, 106, B.22
Linearfaktor, 85
Linearform, 147
linksseitiges Ideal, *siehe* Ideal

M

Mannigfaltigkeit, 174
    Differentialform, 174
    Tangentialbündel, 174
    Tangentialraum, 174
Matrix
    Begleitmatrix, 118
    Bilinearform, 20
    charakteristisches Polynom, 124, 128
    Definitheit, 23, 45
    Determinante, 100, 163
    Determinantenideal, B.22
    Determinantentideal, 100
    Diagonalisierbarkeit, B.24
    Elementarteiler, 99
    Elementarteilersatz, 99, 104
    hermitesche Sesquilinearform, 24
    Hessematrix, 46
    Jordan-Basis, 137, 139, 141

Jordansche Normalform, 126, 130, 132, 134, 136, 137, 139, 141, B.24
Klassifikationssatz, 118
LA, A.12
Minimalpolynom, 121, 124, 128, B.24
Satz von Cayley–Hamilton, 124, B.26
selbstadjungiert, 24
Sesquilinearform, 24
Smith-Normalform, 99, B.22
Tensorprodukt, 156
Untermatrix, 100
verallgemeinerte geometrische Vielfachheit, 132, 134, 136
Matrizenkalkül
Bilinearform, 20
Endomorphismenmodul, 116
Homomorphismenraum, 146
Sesquilinearform, 23
Metrik
Norm, 14
Minimalpolynom, 120, 121, 122, 124, 128, B.24
Begleitmatrix, 124
Bestimmung, 121, 125
Blockmatrix, 122
Diagonalisierbarkeit, 126, B.24
Jordanblock, 122
Rotationsmatrix, 123
zyklischer Endomorphismus, 123
Modul, 62, 63, B.14
Basis, 79
Dimension?, 80
direkte Summe, 75, 78, B.16
Elementarteiler, 108, B.22
Elementarteilersatz, 108
endlich erzeugt, 64, 107
endlich präsentiert, 98
Endomorphismenmodul, 116
Erzeugendensystem, 64, B.14
frei, 79, B.16
Hauptidealring, 95
Homomorphiesatz, 74, B.16
Homomorphismus, 66
isomorph, 66
Isomorphismus, 66
Jordanblock, 124
Klassifikation, 107, 109
Koprodukt, 78
linear unabhängig, 79
lineare Abbildung, 66
Präsentation, 96, B.20
Produkt, 75, 78
Quotient, 70, B.16
Rang, 107, B.22
Rechnen, 64
reduzibel, B.16
Torsion, 65
Untermodul, 62, 96, B.18
unzerlegbar, 79
zerlegbar, 79
Zerlegung, 54
zu einem Endomorphismus, 65
zyklisch, 75, 98, B.18
Modulhomomorphismus, 66, B.14
Endomorphismenmodul, 67
Kern, 68
Modulisomorphismus, 66
modulo, 71
multilineare Abbildung, 149, 151
Determinante, 150
Skalarprodukt, 150
multilineare Algebra, 145

N

negativ definit, 7, 45
negativ semi-definit, 7, 45
noetherscher Ring, 89
Norm, 10
Definitheit, 11
Dreiecksungleichung, 11
euklidische, 6, 13
Homogenität, 11
induzierte Topologie, 14
Metrik, 14
ohne Skalarprodukt, 13
orthogonal, 26
normal, 44

Spektralsatz, 44
Normalform, 53
Jordansche Normalform, 115
normierter Vektorraum, 10
Isometrie, 16
Nullstelle, 85, 86
nullteilerfrei, 57

O

Orientierung, 171
orthogonal, 16, 25
linear unabhängig, 27
Norm, 26
Nullvektor, 25
orthogonale Gruppe, 33, 34, B.12
orthogonale Matrix
Konjugation, 35
orthogonale Projektion, 30, B.8
orthogonales Komplement, 25, 31, B.6
orthographische Projektion, B.8
Orthonormalbasis, 26, 27, 33
Orthonormalisierungsverfahren, 27, B.8
Orthonormalsystem, 26
linear unabhängig, 27

P

Parallelogrammgleichung, B.1
π, A.8
Polardarstellung, A.5
Polarisierung, 13, B.1
Polarzerlegung, B.10
Polynom
Begleitmatrix, 118
Linearfaktor, 85
Minimalpolynom, 120
Nullstelle, 85, 86
Polynomdivision, 82, 83, 86, B.18
Polynomring, 57, B.12
euklidisch, 82
Integritätsring, 58
Polynomdivision, 82, 83
universelle Eigenschaft, 60, B.12
positiv definit, 7, 9, 45
positiv semi-definit, 7, 45
Präsentation
eines Moduls, 96
Modul, B.20
Primelement, 84, 86
Primfaktorzerlegung, 88, 90, B.18
Eindeutigkeit, 88
Primzahl, 85, 91
Produkt, 78
Inklusion, 76
Modul, 75
Projektion, 76
Projektion
Gleichungen, B.8
orthogonale, 30, B.8
orthographische, B.8
Produkt, 76
Pythagoras, 26

Q

Quadrik, 47
ebene, 47
Quotientenmodul, 71, B.16
Konstruktion, 70
universelle Eigenschaft, 72, 73

R

räumliche Geometrie, 5
Rang, B.22
freier Modul, 107
Realteil, A.4
Rechtecke, 161
reduzibel, 54
reduzibler Modul, B.16
reelle Zahlen
Absolutbetrag, A.5
Rezept
Jordan-Basis, 137, 139, 141
Jordansche Normalform, 134, 136, 137, 139, 141
komplementärer Untervektorraum, 141
Minimalpolynom, 121, 125

Ring, 56, B.14
assoziiertes Element, 84
Determinante, 100
Einheit, 84
Endomorphismenring, 57
erzeugtes Ideal, 81
euklidisch, 81, 82, 83, 84
euklidische Gradfunktion, 81
faktoriell, 88, 89, 90
Hauptideal, 80, 81, B.18
Hauptidealring, 80, 81, 83, 84
Homomorphismus, 59
Ideal, 69, B.20
Integritätsring, 57
irreduzibel, 86
irreduzibles Element, 84
Isomorphismus, 59
kommutativ, 56
linksseitiges Ideal, 69
mit Eins, 56
Modul, 62
noethersch, 89
Polynomring, 57, B.12
Primelement, 84, 86
Teilbarkeit, 84, 86
Ringhomomorphismus, 59
Ringisomorphismus, 59
Rotation, 17

S

Satz
Additionstheorem, A.8
Cauchy–Schwarz, 11
Cayley–Hamilton, 124, B.26
chinesischer Restsatz, 94
Elementarteilersatz, 98, 99, 104
Elementarteilersatz für Moduln, 108
Hauptachsentransformation, 48
Homomorphiesatz, 74
Jordansche Normalform, 126
Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen, 113
Klassifikation endlich erzeugter Moduln, 109
Pythagoras, 26
Spektralsatz, 41, 44, 45
Trägheitssatz von Sylvester, 50
Schwanensee, B.20
selbstadjungiert, 39, 41
Matrix, 24
Spektralsatz, 41
senkrecht, 16
Sesquilinearform, 9, 24
Basiswechsel, 24
hermitesch, 9
Matrix, 24
Matrizenkalkül, 23
positiv definit, 9
Signatur, 50, 51
sin
seeSinus, A.7
Sinus, A.8
Additionstheorem, A.8
arcsin, A.8
periodisch, A.8
Skalaprodukt
orthogonal, 25
Skalarprodukt, 7, 150, B.6
hermitesch, 8
induzierte Norm, 11
orthogonal, 16
Orthonormalbasis, 26
Orthonormalsystem, 26
Polarisierung, 13
Winkel, 14
Smith-Normalform, 99, 104, B.22
Algorithmus, 101
Sophie Germain, B.20
Spektralkalkül, 44
Spektralsatz, 39, 41, 44, 45
symmetrische Matrix, 43
Spektralzerlegung, B.10
spezielle orthogonale Gruppe, 33
spezielle unitäre Gruppe, 33
Spiegelung, 17, 38, B.8
Spur, B.8
koordinatenfrei, 159
Staatsexamen, B.24
Standardbasis, 27

Standardskalarprodukt, 6, 8, 21, 24
komplex, 9
stationäre Kette, 90
Streckung, 17
Sylvesterscher Trägheitssatz, 50
Symmetriekriterium, 23
symmetrisch
Bilinearform, 7
symmetrische Bilinearform
Signatur, 51
symmetrische Matrix
Definitheitskriterium, 45
Diagonalisierung, 43
Signatur, 50, 51
Spektralsatz, 43
Wurzel, 44

T

Tangentialbündel, 174
Tangentialraum, 174
Teilbarkeit, 84
Ideal, 86
Tensorprodukt, 149, 151, B.26
Änderung der Skalare, 158
Anwendungen, 158
Basis, 155
Baukasten, 153
Dimension, 155
Dualität, 160
Elementartensor, 151, 152, B.26
Existenz, 156
Konstruktion, 156
Matrizen, 156
Rechtecke, 161
Skalarprodukt, B.26
Spur, 159
stetige Funktionen auf Produkten, 160
universelle Eigenschaft, 151, 152
wozu?, 149
Topologie
Norm, 14
Torsion, 65
Trägheitsmoment, 49
Trägheitssatz, 50
Translation, 17

U

Uhr, 71
Ungleichung, B.4
Cauchy–Schwarz, 11
unitäre Gruppe, 33, 34, 39
unitärer Vektorraum, 5, 10
Klassifikation, 30
universelle Eigenschaft, 61
äußeres Produkt, 164
direkte Summe, 77
Eindeutigkeit, 73
Polynomring, B.12
Tensorprodukt, 151, 152
universelle Eigenschaft, 60
via Homomorphismenräume, 148
Untermatrix, 100
Untermodul, 62, B.18
Charakterisierung, 64
Durchschnitt, 64
erzeugter, 64
Hauptidealring, 96
komplementär, 79
unvierselle Eigenschaft
direkte Summe, 78
Quotientenmodul, 72, 73
unzerlegbarer Modul, 79
unzerlegbarer Vektorraum, 79

V

Vektorraum
äußeres Produkt, 162, 163, 164, 165
Bilinearform, 150
Doppeldual, 147
duale Basis, 147
Dualraum, 146, 147, B.26
euklidischer, 5, 10
Homomorphismenraum, 146
invariant, 54
irreduzibel, 54
Linearform, 147

Norm, 10
normiert, 10
Orientierung, 171
reduzibel, 54
Skalarprodukt, 150
Tensorprodukt, 149, 151, 153, B.26
unitärer, 5, 10
unzerlegbar, 79
zerlegbar, 79
zyklisch, 54
verallgemeinerte geometrische Vielfachheit, 132, 134, 136
Vielfachheit
algebraische, 128
geometrische, 128
Volumenform, 173

W

Winkel, 14, 15, B.4
Winkelsumme, B.4
winkeltreu, 19
Wochentage, 71
Wurzel, 44

Z

Zahl
komplexe, A.3
zerlegbarer Modul, 79
zerlegbarer Vektorraum, 79
Zerlegung
Endomorphismus, 54
Polarzerlegung, B.10
Spektralzerlegung, B.10
zyklisch, 54
Modul, 75
zyklischer Modul, 98, B.18

Finger weg!