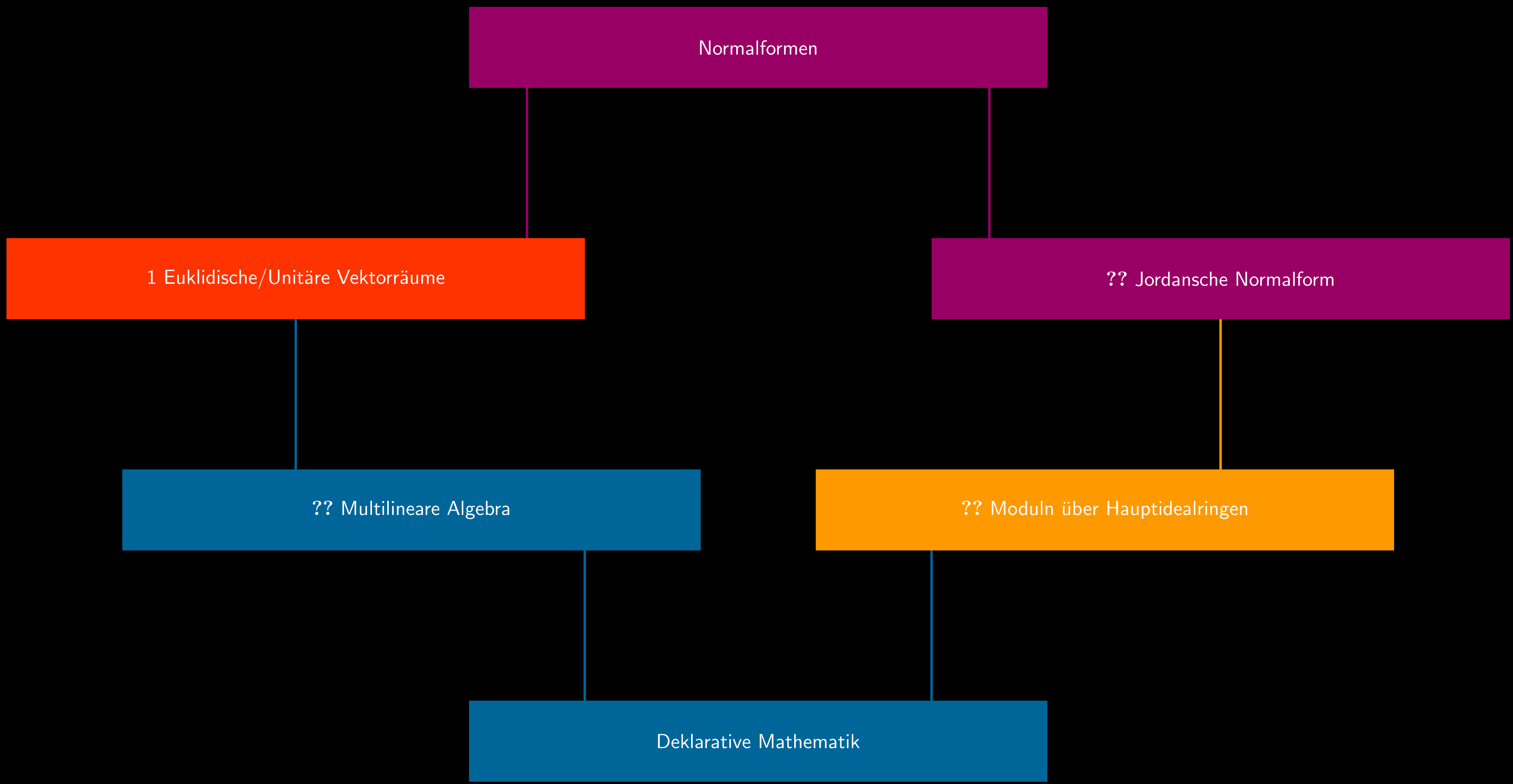
Lineare Algebra II

Sommersemester 2025

Clara Löh

Version vom 24. April 2025
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

Dungeon Map: Overworld



Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise

Die Vorlesung wird sich nicht an einer einzelnen Quelle orientieren – Sie sollten also individuell je nach Thema und eigenen Vorlieben die Literatur auswählen, die am besten zu Ihnen passt.

Sie sollten mehrere solche Bücher anschauen und dann entscheiden, (ob) welche davon für Sie als Ergänzung zur Vorlesung geeignet sind. Das Material wird nicht immer in derselben Reihenfolge präsentiert und es gibt bei Konventionen und Schwerpunkten Unterschiede.

Die nachfolgende Liste enthält Anregungen für ergänzende und vertiefende Literatur. Manche Dinge werden dort anders behandelt als in dieser Vorlesung!

Lineare Algebra

- S. Bosch. *Lineare Algebra*, fünfte Auflage, Springer Spektrum, 2014.
- G. Fischer. *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger*, 18. Auflage, Springer Spektrum, 2013.
- K. Jänich. *Lineare Algebra*, 11. Auflage, Springer, 2013.
- S. Lang. *Linear Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3. Auflage, Springer, 1987.
- J. Matoušek. *Thirty-three miniatures. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra*, *Student Mathematical Library*, 53. American Mathematical Society, 2010.

Logik und Mengenlehre

- G.S. Boolos, J.P. Burgess, R.C. Jeffrey. *Computability and Logic*, fifth edition, Cambridge University Press, 2007.
- P.J. Cameron. *Sets, Logic and Categories*, Universitext, Springer, 1998.
- H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2007.
- U. Friedrichsdorf, A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg, 1985.
- C.N. Delzell, A. Prestel. *Mathematical Logic and Model Theory: A Brief Introduction*, Universitext, Springer, 2011.
- W. Rautenberg. *Einführung in die mathematische Logik: Ein Lehrbuch*, Vieweg+Teubner, 2008.
- R.M. Smullyan, M. Fitting. *Set theory and the continuum problem*, überarbeitete Auflage, Dover, 2010.

Beweisen und Problemlösen

- J. Avigad, L. de Moura, S. Kong. *Theorem Proving in Lean*, https://lean-lang.org/theorem_proving_in_lean/, 2023.
- A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+-Teubner, 2009.
- J. Cummings. *Proofs: A Long-Form Mathematics Textbook*, Indepdently published, 2021.
- A.G. Konforowitsch. *Logischen Katastrophen auf der Spur*, zweite Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1994.
- L. Lamport. How to write a 21st century proof, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 11(1), 43–63, 2012.
- C. Löh. *Exploring Formalisation. A Primer in Human-Readable Mathematics in Lean 3 with Examples from Simplicial Topology*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, 11, Springer, 2022.
- G. Polya, J.H. Conway (Hrsg.). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library, 2014.
- T. Tao. *Solving mathematical problems. A personal perspective*, Oxford University Press, 2006.

Weiterführende Literatur

- K. Jänich. *Vektoranalysis*, fünfte Auflage, Springer, 2005.
- S. Lang. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, dritte überarbeitete Auflage, Springer, 2002.
- S. Lang. *Real and Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 142, dritte Auflage, Springer, 1993.
- W. Rudin. *Functional Analysis*, zweite Auflage, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1991.

0

Einführung

Die Algebra befasst sich mit der abstrakten Struktur allgemeiner „Zahlenbereiche“. Eine besonders einfache und zugängliche Art solcher Strukturen sind lineare Strukturen, d.h. Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Wie wir bereits in der Linearen Algebra I gesehen haben, treten lineare Strukturen an vielen verschiedenen Stellen auf:

- Lösung linearer Gleichungssysteme,
- elementare ebene und räumliche Geometrie,
- Computergeometrie und dreidimensionale Modellierung,
- geschlossene Darstellung kombinatorischer Phänomene,
- als zentraler Approximationsbaustein in der Analysis,
- als erste Abstraktionsstufe in der Algebra,
- ...

Warum noch mehr Lineare Algebra?

Wir werden in der Vorlesung Lineare Algebra II die folgenden Themen behandeln und an passender Stelle auch Ausblicke auf Anwendungen geben:

- **Euklidische und unitäre Vektorräume.** Mithilfe der Methoden der Linearen Algebra lassen sich viele Aspekte der zwei- bzw. dreidimensionalen Geometrie gut beschreiben und berechnen. Zum Beispiel erhält man so einen rechnerischen Zugang zur Elementargeometrie.

- **Normalformen von Endomorphismen.** Wir werden die Existenz der Jordanschen Normalform beweisen und untersuchen, wie man diese vernünftig berechnen kann. Zum Beispiel ist dies bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme ein wichtiges Hilfsmittel.

- **Multilineare Algebra.** Wir werden die Grundlagen der multilinearen Algebra kennenlernen, wie zum Beispiel Tensorprodukte und äußere Produkte. Diese Konzepte treten zum Beispiel bei der Betrachtung der Geometrie gekrümmter Räume, sogenannter Mannigfaltigkeiten, auf.

Zusätzlich zu konkreten Konstruktionen werden wir uns auch an deklarative Mathematik im Sinne von universellen Eigenschaften gewöhnen.

Anmerkung für Lehramtsstudenten. Auf ganz natürliche Weise werden wir dabei Begriffen und Themen aus der Schulmathematik begegnen und diese vertiefen. Zudem begnegnen wir Aspekten der Mathematik, die in Zukunft Bestandteil der Schulmathematik werden könnten. Wichtiger als die Beherrschung des aktuellen Lehrplans ist es, ein solides Fundament zu erlernen, das es erlaubt, Mathematik inhaltlich korrekt, nachvollziehbar und souverän zu lehren und auf das der Unterricht im Rahmen des aktuellen und der zukünftigen Lehrpläne aufbauen kann.

Insbesondere haben die folgenden Themen der Vorlesung Lineare Algebra II einen direkten Bezug zu derzeitigem Schulstoff:

- Euklidische Vektorräume und die Beschreibung der zwei- bzw. dreidimensionalen Geometrie durch Konzepte aus der Linearen Algebra.

- Elementare Ringtheorie und Grundlagen der Teilbarkeitstheorie bzw. von Primelementen.

- Moduln über $\mathbb{Z}$ und die Lösung linearer Gleichungssysteme über den ganzen Zahlen.

Anmerkung zum Lernen (Skript)**.** Dieses Vorlesungsskript dokumentiert den Fortschritt dieser Vorlesung, die besprochenen Themen und zusätzliches optionales Material. Der Besuch der Vorlesung erleichtert es, die Entwicklung der Begriffe, Beweise, etc. nachzuvollziehen. Zusätzliches Material wird in GRIPS und auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt:

https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg2_ss25

Anhänge und Ausblicke sind *nicht* prüfungsrelevant, sondern dienen der Allgemeinbildung.

Das Skript dient keineswegs dazu, den Besuch der Vorlesung oder gar der Übungen zu ersetzen. Außerdem spiegelt sich in diesem Skript natürlich nur ein kleiner Ausschnitt der Linearen Algebra wider. Sie sollten sich unbedingt auch mithilfe anderer Quellen (Bücher!) selbst ein Bild des gesamten Gebietes machen. Referenzen der Form „Satz I.6.5.12“ verweisen auf die entsprechende Stelle im Skript zur Linearen Algebra I:

https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/lecture_notes.pdf

Wie der Name der Vorlesung bereits andeutet, ist es unabdingbar, die Inhalte der Linearen Algebra I zu beherrschen, um die Lineare Algebra II verstehen zu können. Lücken in der Linearen Algebra I sollten Sie also zügig füllen.

Anmerkung zum Lernen (Fingerübungen)**.** Dieses Vorlesungsskript enthält einige Selbsttests und Fingerübungen, deren Feedback teilweise in die PDF-Datei integriert ist. Diese Funktionalität beruht auf PDF Layers (nicht auf JavaScript) und wird von vielen PDF-Viewern unterstützt, z.B. Acrobat Reader, Evince, Foxit Reader, Okular, ... Einfacher Test, ob das funktioniert: Haben Sie auf "Nein" gedrückt?

Ja Nein Nein, Sie haben nicht getan, was Sie behauptet haben

Sie sollten natürlich erst dann die Hinweise und Antworten ansehen, wenn Sie bereits über das Problem nachgedacht haben; man kann schließlich nie wissen, was passiert, wenn man voreilig auf irgendeinen Knopf drückt.

GROAAARR!

Literaturaufgabe (Bibliothek)**.** Wie finden Sie im Regensburger Katalog und in der Teilbibliothek Mathematik Literatur über die Themen der Vorlesung? Welche weiteren Informationsquellen könnten nützlich sein?

Zusätzliche Anregungen finden Sie auf S. vii.

Konvention. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen enthält 0.

1

Euklidische/Unitäre Vektorräume

Wir haben bereits gesehen, dass die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ geeignet sind, um Situationen der ebenen bzw. räumlichen Geometrie zu modellieren. Wir werden dies im folgenden vertiefen und erklären, wie man mithilfe von sogenannten Skalarprodukten grundlegende geometrische Größen wie Längen und Winkel beschreiben kann. Insbesondere werden wir den Orthogonalitätsbegriff und Isometrien von $\mathbb{R}^n$ eingehend untersuchen. Zusätzlich leiten wir Spektralsätze her, die in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle spielen.

Überblick über dieses Kapitel.

1.1 Euklidische und unitäre Vektorräume

Wir werden uns im folgenden mit der Geometrie reeller bzw. komplexer Vektorräume befassen; daher werden wir uns meistens auf die Grundkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ einschränken. Die fundamentale geometrische Größe in $\mathbb{R}^n$ ist der euklidische Abstand von Punkten zum Ursprung; dieser Abstand ist in Anlehnung an den Satz von Pythagoras durch folgende Abbildung (die *euklidische Norm*) definiert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \end{aligned}$$

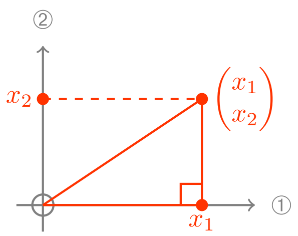


Abbildung 1.1.: Der Abstand vom Ursprung und der Satz von Pythagoras

Selbst wenn man die Wurzel ignoriert, ist diese Abbildung weit davon entfernt, linear zu sein. Mit einem kleinen Trick wird diese Abbildung zugänglich für die Methoden aus der linearen Algebra: Statt der Abbildung $\|\cdot\|_2$ betrachten wir allgemeiner die, zunächst komplizierter wirkende, Abbildung (das *Standardskalarprodukt*)

$$\begin{aligned} \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j . \end{aligned}$$

Auch diese Abbildung ist nicht linear im eigentlichen Sinne, aber immerhin bilinear (d.h. linear in jedem Argument). Und wegen

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle_2}$$

ist es plausibel, dass $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$ dafür geeignet ist, euklidische Abstände zu untersuchen. Auch wenn unser Hauptinteresse dieser konkreten Abbildung gilt, zahlt es sich aus, die Theorie allgemeiner für sogenannte Skalarprodukte aufzuziehen.

1.1.1 Bilinearformen und Skalarprodukte

Wir führen zunächst die grundlegenden Begriffe für Skalarprodukte ein.

Definition 1.1.1 (Bilinearform, symmetrische Bilinearform)**.** Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum.

- Eine *Bilinearform auf* V ist eine bilineare Abbildung $V \times V \longrightarrow K$. Eine Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt dabei *bilinear*, wenn für jedes $x \in V$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} b(\,\cdot\,, x)&\colon V \longrightarrow K\\ b(x,\,\cdot\,)&\colon V \longrightarrow K \end{aligned}$$

  (über K) linear sind.

- Eine Bilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow K$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$b(x, y) = b(y, x)$$

  für alle $x, y \in V$ gilt.

Anmerkung zum Lernen (Form)**.** In der Linearen Algebra bezeichnen ...formen im Normalfall Abbildungen, deren Wertebereich im Grundkörper liegt.

Anmerkung zum Lernen (Determinante)**.** Erinnern Sie sich noch an die Eigenschaften von Determinanten? Vergleichen Sie diese mit der obigen Definition!

Definition 1.1.2 (Definitheit)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $b\colon V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Die Bilinearform b heißt

positiv definit,	wenn: $\forall_{x\in V\setminus\{0\}}\ \ b(x,x) > 0$.
negativ definit,	wenn: $\forall_{x\in V\setminus\{0\}}\ \ b(x,x) < 0$.
positiv semidefinit,	wenn: $\forall_{x\in V}\ \ b(x,x) \geq 0$.
negativ semidefinit,	wenn: $\forall_{x\in V}\ \ b(x,x) \leq 0$.
indefinit,	wenn es $x, y \in V$ mit $b(x,x) > 0$ und $b(y,y) < 0$ gibt.

Definition 1.1.3 (Skalarprodukt)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt auf* V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V.

Der Name „Skalarprodukt“ erinnert daran, dass die Werte Skalare (d.h. Elemente aus dem Grundkörper) sind. Dies darf nicht mit der Skalarmultiplikation (aus der Vektorraumstruktur) verwechselt werden!

Caveat 1.1.4. Skalarprodukte werden oft durch spitze Klammern $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ notiert. In LaTeX sollte das auf keinen Fall durch die binären Operatoren „<“ bzw. „>“ dargestellt werden, sondern immer durch vernünftige Klammern, wie zum Beispiel \langle und \rangle (aus dem Paket amsmath).

Beispiel 1.1.5.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j = x^{\mathsf{T}} \cdot y \end{aligned}$$

  ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$. Dieses wird auch als *euklidisches Skalarprodukt* bezeichnet.

  Dass es sich dabei tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt, ist schnell nachgerechnet: Die Bilinearität folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition I.4.2.14). Die Symmetrie folgt aus der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ und die positive Definitheit aus der Tatsache, dass ? Quadrate von reellen Zahlen ungleich Null stets positiv sind (Bemerkung I.A.5.10).

- Analog erhält man, indem man Summation durch allgemeine Integration ersetzt, das L^2-Skalarprodukt auf gewissen Funktionenräumen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} C\big([0,1],\mathbb{R}\big) \times C\big([0,1],\mathbb{R}\big) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx \end{aligned}$$

  ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C([0,1],\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ (nachrechnen).

  Auf ähnliche Weise erhält man auch ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren Folgen (s. Analysis I/II).

Würde man auf $\mathbb{C}^n$ analog zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ eine bilineare Abbildung definieren, so erhielte man keine positive Definitheit (da Quadrate komplexer Zahlen im allgemeinen keine positiven reellen Zahlen sind). Daher bringt man die komplexe Konjugation ins Spiel (Bemerkung A.2.9).

Definition 1.1.6 (hermitesches Skalarprodukt)**.** Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein *hermitesches Skalarprodukt auf* V ist eine hermitesche,[1] positiv definite Sesquilinearform auf V. Die Begriffe haben dabei die folgende Bedeutung:

[1] benannt nach Charles Hermite (1822–1901), einem französischen Mathematiker

- Eine Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine *Sesquilinearform*, wenn
  - für jedes $x \in V$ die Abbildung
  $$b(x,\,\cdot\,)\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$
  $\mathbb{C}$-linear ist
  - und die Abbildung
  $$b(\,\cdot\,,x)\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$
  $\mathbb{R}$-linear ist und
  $$\forall_{y\in V} \quad \forall_{\lambda\in\mathbb{C}} \quad b(\lambda\cdot y, x) = \overline{\lambda}\cdot b(y,x)$$
  erfüllt.
- Eine Sesquilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ist *hermitesch*, wenn
  $$\forall_{x,y\in V} \quad b(x,y) = \overline{b(y,x)}$$
  gilt; dabei ist $\overline{\,\cdot\,}$ die komplexe Konjugation. Insbesondere gilt in diesem Fall für alle $x \in V$, dass $b(x,x) = \overline{b(x,x)}$ ist, d.h., dass $b(x,x)$ reell ist.
- Eine hermitesche Sesquilinearform $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv definit*, wenn
  $$\forall_{x\in V\setminus\{0\}} \quad b(x,x) > 0.$$

Caveat 1.1.7. In manchen Quellen wird komplexe Linearität im ersten Argument und konjugierte Linearität im zweiten Argument gefordert. Dies führt natürlich letztendlich zur selben Theorie. Wir haben uns für die obige Variante entschieden, da diese gut mit dem Operator $\,\cdot\,^{\mathsf{H}}$ (s.u.) kompatibel ist.

Beispiel 1.1.8.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist
  $$\begin{aligned} \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{j=1}^n \overline{x_j}\cdot y_j = (\overline{x})^{\mathsf{T}}\cdot y = x^{\mathsf{H}}\cdot y \end{aligned}$$
  ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, nämlich das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$. Dabei bezeichnet A^{H} für komplexe Matrizen A die Matrix, die man erhält, indem man A transponiert und alle Koeffizienten komplex konjugiert.

  Dass es sich dabei tatsächlich um ein hermitisches Skalarprodukt handelt, ist schnell nachgerechnet: Die Sesquilinearität folgt aus den Eigenschaften der Matrixmultiplikation (Proposition I.4.2.14) und der komplexen Konjugation. Dass die Abbildung hermitesch ist, folgt aus der

Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ und der Multiplikativität der komplexen Konjugation. Die positive Definitheit erhalten wir aus der Tatsache, dass $\overline{x} \cdot x = (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2$ für jede komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ eine Summe reeller Quadrate ist und Quadrate von reellen Zahlen ungleich Null stets positiv sind.

- Analog erhält man, indem man Summation durch allgemeine Integration ersetzt, das L^2-Skalarprodukt auf gewissen Funktionenräumen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} C\big([0,1],\mathbb{C}\big) \times C\big([0,1],\mathbb{C}\big) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx \end{aligned}$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $C([0,1],\mathbb{C})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{C}$ (nachrechnen).

Auf ähnliche Weise erhält man auch ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\ell^2(\mathbb{C})$ der quadratsummierbaren komplexwertigen Folgen (s. Analysis I/II).

Definition 1.1.9 (euklidischer/unitärer Vektorraum)**.**

- Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ auf V.
- Ein *unitärer Vektorraum* ist ein Paar $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einem hermiteschen Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.

Beispiel 1.1.10. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $(\mathbb{R}^n, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2)$ ein euklidischer Vektorraum und $(\mathbb{C}^n, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2)$ ein unitärer Vektorraum.

1.1.2 Längen und Winkel

Wir kehren zu unserem eigentlichen Ziel zurück, nämlich zur Beschreibung geometrischer Größen wie Längen und Winkel. Wir beginnen mit Längen bzw. Abständen; diese Begriffe passen in den Kontext normierter Vektorräume, wobei Normen die „Länge" von Vektoren (d.h. den Abstand zum Nullpunkt) messen.

Definition 1.1.11 (Norm, normierter Vektorraum)**.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Norm auf* V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\|\colon V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

– *Homogenität.* Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $x \in V$ ist $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, wobei $|\cdot|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag auf $\mathbb{K}$ bezeichnet.
– *Definitheit.* Für alle $x \in V$ ist $\|x\| \geq 0$ und Gleichheit tritt nur für $x = 0$ ein.
– *Dreiecksungleichung.* Für alle $x, y \in V$ ist

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

- Ein *normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V.

Fingerübung 1.1.12. Die in der Definition von Normen geforderten Eigenschaften haben direkte geometrische Entsprechungen. Welche sind dies? Skizzieren Sie!

Definition 1.1.13 (induzierte Norm)**.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Dann definieren wir durch

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

die *von* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *induzierte Norm auf* V.

Fingerübung 1.1.14. Wenn man zeigen möchte, dass von Skalarprodukten induzierte „Normen" tatsächlich Normen im Sinne von Definition 1.1.11 sind, sind mehrere Dinge nachzuweisen.

- Welche ? siehe Beweis von Korollar ??
- Welche Eigenschaft ist am schwierigsten zu zeigen ? die Dreiecksungleichung; probieren Sie es aus!

Um nachzuweisen, dass diese Konstruktion die Dreiecksungleichung erfüllt, verwenden wir das folgende Hilfsmittel:

Satz 1.1.15 (Ungleichung von Cauchy–Schwarz)**.** *Sei* $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ *ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit induzierter „Norm"* $\|\cdot\|$ *und seien* $x, y \in V$*. Dann gilt*

$$\bigl|\langle x, y \rangle\bigr| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn x *und* y *linear abhängig sind.*

THESE LECTURE NOTES STILL HAVE TO BE WRITTEN!

~~Wo ist der Rest?~~ Wo ist der Typosaurus?

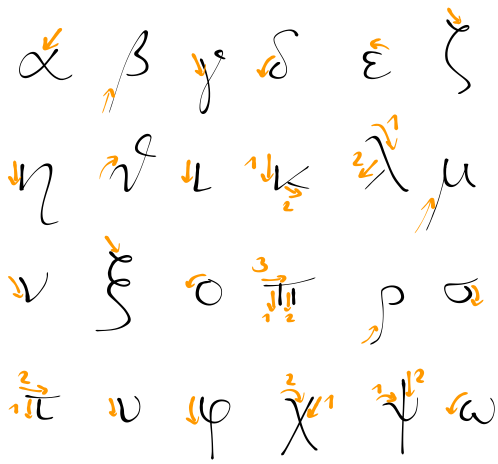
A

Anhang

Überblick über dieses Kapitel.

A.1 Das griechische Alphabet

Symbol		Name	TEX-/LATEX-Kommando	
A	α	alpha	A	\alpha
B	β	beta	B	\beta
Γ	γ	gamma	\Gamma	\gamma
Δ	δ	delta	\Delta	\delta
E	ε, ϵ	epsilon	E	\varepsilon , \epsilon
Z	ζ	zeta	Z	\zeta
H	η	eta	H	\eta
Θ	ϑ, θ	theta	\Theta	\vartheta , \theta
I	ι	iota	I	\iota
K	κ	kappa	K	\kappa
Λ	λ	lambda	\Lambda	\lambda
M	μ	my	M	\mu
N	ν	ny	N	\nu
Ξ	ξ	xi	\Xi	\xi
O	o	omikron	O	o
Π	π	pi	\Pi	\pi
P	ϱ, ρ	rho	P	\varrho , \rho
Σ	σ, ς	sigma	\Sigma	\sigma , \varsigma
T	τ	tau	T	\tau
Y	υ	ypsilon	Y	\upsilon
Φ	φ, ϕ	phi	\Phi	\varphi , \phi
X	χ	chi	X	\chi
Ψ	ψ	psi	\Psi	\psi
Ω	ω	omega	\Omega	\omega



A.2 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen sind bezüglich der Ordnungsrelation vollständig. Aus algebraischer Sicht sind sie jedoch nicht vollständig genug: Nicht alle polynomialen Gleichungen mit reellen Koeffizienten besitzen eine reelle Nullstelle. Ein Körper ist algebraisch abgeschlossen, wenn jede (nicht-konstante) polynomiale Gleichung mindestens eine Lösung besitzt. Die komplexen Zahlen sind die „kleinste" Erweiterung der reellen Zahlen zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Faszinierenderweise genügt es dabei, geeignet eine Zahl i hinzuzufügen, die $i^2 = -1$ erfüllt.

Definition A.2.1 (algebraisch abgeschlossen)**.** Ein Körper K ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn folgendes gilt: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle $a_0, \dots, a_n \in K$ mit $a_n \neq 0$ gibt es (mindestens) ein $x \in K$ mit

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^k = 0.$$

Beispiel A.2.2.

- Die rationalen Zahlen sind *nicht* algebraisch abgeschlossen, da es zum Beispiel kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ gibt (Beispiel I.1.4.9).
- Die reellen Zahlen sind *nicht* algebraisch abgeschlossen, da es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$ gibt (Bemerkung I.A.5.10).

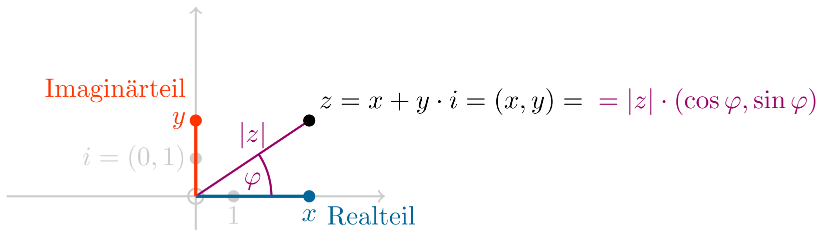
Satz A.2.3 (die komplexen Zahlen [1])**.** *Sei* $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*. Wir bezeichnen* $\mathbb{C}$ *als Menge der* komplexen Zahlen*. Bezüglich den Operationen*

$$\begin{aligned} + \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto (x + x', y + y') \\ \cdot \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y) \end{aligned}$$

bildet $\mathbb{C}$ *einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit additiv neutralem Element* $(0,0)$ *und multiplikativ neutralem Element* $(1,0)$*. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

ist injektiv und mit Addition bzw. Multiplikation verträglich. Elemente im Bild dieser Abbildung heißen reell*. Bis auf „kanonischen Isomorphismus" ist* $\mathbb{C}$ *der „kleinste" algebraisch abgeschlossene Körper, der* $\mathbb{R}$ *umfasst.*



Zerlegungen einer komplexen Zahl

Abbildung A.1.: komplexe Zahlen, schematisch

Beispiel A.2.4 (die imaginäre Einheit, Realteil/Imaginärteil)**.** Man bezeichnet

$$i := (0,1) \in \mathbb{C}$$

als *imaginäre Einheit*. Ist $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so bezeichnet man (Abbildung A.1)

- x als *Realteil von* z und
- y als *Imaginärteil von* z.

Wir schreiben dann für $(x,y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ auch

$$x + y \cdot i := (x,y) \in \mathbb{C};$$

diese Notation ist mit der kanonischen Inklusion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ und den Rechenoperationen verträglich (nachrechnen!).

Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i \\ &= (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -(1,0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es *keine* totale Ordnung auf $\mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht (Bemerkung I.A.5.10).

Beispiel A.2.5 (Summe von Quadraten)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) &= x^2 + y \cdot i \cdot x - x \cdot y \cdot i - y \cdot i \cdot y \cdot i \\ &= x^2 + x \cdot y \cdot i - x \cdot y \cdot i - y^2 \cdot i^2 \\ &= x^2 + 0 - y^2 \cdot (-1) \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Beispiel A.2.6 (komplexe Division)**.** Die Berechnung aus Beispiel A.2.5 ist insbesondere hilfreich, um komplexe Divisionen durch geeignetes Erweitern von Hand zu berechnen: Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+i} &= \frac{1\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} && (\boxed{?}\ \text{Erweitern mit } 2-i)\\
&= \frac{2-i}{4+1} && (\boxed{?}\ \text{nach Beispiel A.2.5})\\
&= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\cdot i.
\end{aligned}$$

Also hat $1/(2+i)$ den Realteil ? $2/5$ und den Imaginärteil ? $-1/5$.

Ausblick A.2.7 (Absolutbetrag)**.** Die „Größe“ von reellen bzw. komplexen Zahlen wird durch den (Absolut-)Betrag gemessen: Man definiert

$$\begin{aligned}
|\cdot| \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\\
x &\longmapsto \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0\\ -x & \text{falls } x < 0\end{cases}\\
|\cdot| \colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\\
(x,y) &\longmapsto \sqrt{x^2+y^2}. && (\text{„Pythagoras“})
\end{aligned}$$

Diese Funktionen erfüllen die *Dreiecksungleichung*

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

für alle reellen/komplexen Zahlen x und y. Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind bezüglich diesen Betragsfunktionen im analytischen Sinne vollständig.

Ausblick A.2.8 (Anschauung und Polardarstellung)**.** Wenn man $\mathbb{C}$ als reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ veranschaulicht, entspricht die Addition auf $\mathbb{C}$ der Vektoraddition auf $\mathbb{R}^2$ und damit der „Verschiebung“ (Abbildung A.2).

Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ entspricht in diesem Bild der „Streckung und Rotation“. Genauer lässt sich dies in Polarkoordinaten erklären: Mit analytischen Mitteln kann man zeigen, dass jede komplexe Zahl $z = x + y \cdot i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der *Polardarstellung*

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\cdot\varphi}$$

geschrieben werden kann, wobei $\varphi = \arctan(x/y)$; ist $y = 0$, so setzt man $\varphi = 0$. Dann gilt: Sind $r, r', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$, so ist

$$(r \cdot e^{i\cdot\varphi}) \cdot (r' \cdot e^{i\cdot\varphi'}) = (r \cdot r') \cdot e^{i\cdot(\varphi+\varphi')};$$

der vordere Term ist dabei eine „Streckung“, der hintere eine „Rotation“.

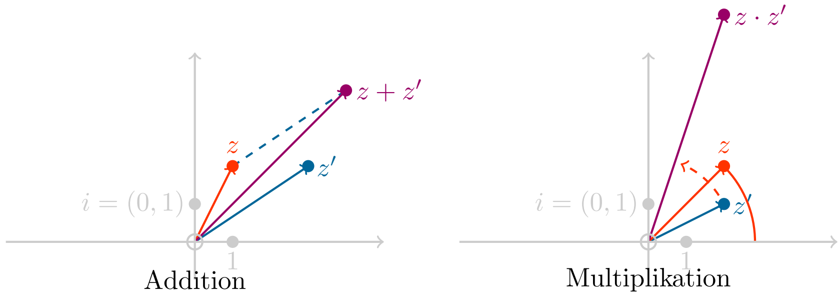


Abbildung A.2.: Addition/Multiplikation komplexer Zahlen, schematisch

Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl stimmt dabei mit dem euklidischen Abstand zuR 0 überein (nach dem Satz des Pythagoras).

Bemerkung A.2.9 (komplexe Konjugation)**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto (x,-y) \end{aligned}$$

wird als *komplexe Konjugation* bezeichnet. Geometrisch handelt es sich dabei um die Spiegelung an der reellen Achse. Algebraisch betrachtet ist die komplexe Konjugation ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{C}$ (d.h. mit Addition und Multiplikation verträglich). Dieser erlaubt es, viele Aspekte des Zusammenspiels zwischen reellen und komplexen Zahlen zu beschreiben. Zum Beispiel gilt (nachrechnen):

- Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist z genau dann reell, wenn $\overline{z} = z$ ist.
- Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z + \overline{z}$ reell.
- Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{z}$ reell und nicht-negativ. Es ist $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

A.3 Elementare Analysis von Sinus und Kosinus

Im folgenden ist der analytische Zugang zu Sinus, Kosinus und π kurz zusammengefasst. Der Zusammenhang mit der Anschauung zu Winkeln am Kreisbogen ergibt sich daraus erst durch Berechnung der Länge geeigneter Kreisbögen (s. Analysis I/II).

Definition A.3.1 (Sinus, Kosinus)**.** Die Funktionen *Sinus* und *Kosinus* sind durch die folgenden (überall absolut konvergenten!) Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Graphische Darstellung. Auswertung der obigen Ausdrücke an vielen Punkten ergibt die graphische Darstellung von cos bzw. sin in Abbildung A.3.

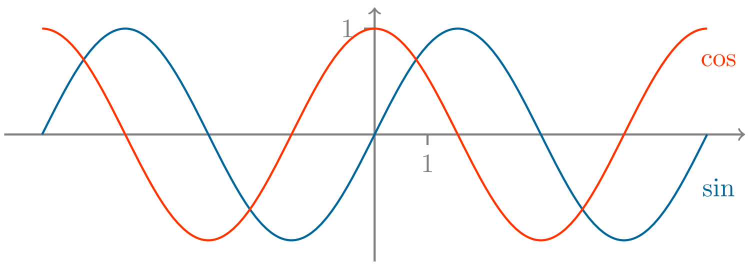


Abbildung A.3.: Graphische Darstellung von cos und sin

Symmetrie. Nach Definition gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Differenzierbarkeit/Ableitungen. Aus allgemeinen Eigenschaften von Potenzreihen erhalten wir: Die Funktionen cos und sin sind glatt und für die Ableitungen gilt (gliedweises Differenzieren)

$$\cos' = -\sin \qquad \text{und} \qquad \sin' = \cos\,.$$

Quadratsumme. Es gilt
$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$
denn $(\cos^2 + \sin^2)' = 0$ und $\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$.

Die Zahl π und ihre Hälfte. Eine sorgfältige Abschätzung von Hand der Potenzreihe zeigt, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ gilt; also ist cos wegen $\cos' = -\sin$ auf $[0, 2]$ streng monoton fallend. Außerdem zeigt eine Abschätzung von Hand, dass $\cos(2) < 0$ ist. Also hat cos in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle x_0. Wir definieren

$$\pi := 2 \cdot x_0.$$

Nach Definition ist $\cos(\pi/2) = 0$. Aus der Quadratsumme und der Positivität von sin auf $[0, 2]$ folgt $\sin(\pi/2) = 1$.

Additionstheoreme. Mithilfe des Cauchyprodukts von Potenzreihen kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
\cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,\\
\sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere erhält man daraus aus den bereits bekannten Werten, dass

$$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0, \qquad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \qquad \sin(2 \cdot \pi) = 0.$$

Periodizität. Aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten speziellen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos(x + 2 \cdot \pi) &= \cos(x)\\
\sin(x + 2 \cdot \pi) &= \sin(x)\\
\cos\Bigl(x - \frac{\pi}{2}\Bigr) &= \sin(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Invertierbarkeit. Aus den bereits gezeigten Positivitäts- und Symmetrieeigenschaften sowie den bereits berechneten Werten folgt, dass

$$\begin{aligned}
\cos\colon [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1]\\
\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1]
\end{aligned}$$

Homöomorphismen sind; die inversen Funktionen bezeichnet man mit arccos bzw. arcsin.

B

Übungsblätter

Lineare Algebra II: Übungen

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann | Blatt 1 vom 24. April 2025

Hinweis. Die Fingerübungen werden nicht abgegeben und nicht korrigiert. Sie werden teilweise in den Übungsgruppen besprochen und können zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben verwendet werden.

Fingerübung A (Wiederholung: Lineare Algebra)**.** Wiederholen Sie die Begriffe *Vektorraum*, *lineare Abbildung* und *lineare Unabhängigkeit* aus der Linearen Algebra I und illustrieren Sie diese Begriffe durch sinnvolle Beispiele. Achten Sie auf präzise und verständliche Formulierungen!

Fingerübung B (Wiederholung: Aufschreiben)**.** Wie schreibt man Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise, Beispiele sauber auf? Wo verwendet man Konjunktiv, wo Indikativ?

Fingerübung C (Wiederholung: die komplexen Zahlen)**.** Wiederholen Sie die Grundlagen zu den komplexen Zahlen (Anhang A.2). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z + \overline{z}$ reell.
2. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{z}$ reell und nicht-negativ.
3. Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist z genau dann reell, wenn $z = \overline{z}$ ist.

Fingerübung D (das Standarskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$)**.** Wir betrachten

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Zeichnen Sie diese Vektoren in ein geeignetes Koordinatensystem und berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte:

$$\langle x, x\rangle_2, \quad \langle y, y\rangle_2, \quad \langle z, z\rangle_2, \quad \langle x, y\rangle_2, \quad \langle x, z\rangle_2, \quad \langle y, z\rangle_2$$

Fingerübung E (neue Skalarprodukte)**.** Definieren Sie selbst ein „neues“ Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$! Können Sie es irgendwie anschaulich beschreiben?

Hinweis. Achten Sie beim Aufschreiben auf eine sprachlich präzise und übersichtliche Darstellung!

Aufgabe 1 (ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$; 4 Punkte)**.** Sei

$$\begin{aligned} b \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
2. Sei $\|\cdot\|$ die von b induzierte Norm. Geben Sie ein Beispiel für ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$.

Bitte wenden

Aufgabe 2 (Skalarprodukte? 4 Punkte)**.** Wir betrachten die Abbildungen

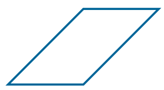
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b_1 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 \\ b_2 : (x, y) &\longmapsto x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Die Abbildung b_1 ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.
2. Die Abbildung b_2 ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (Polarisierung und Parallelogrammgleichung; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V.

1. Beweisen Sie die *Polarisierungsgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2} \cdot \bigl(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\bigr)$$
2. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot \bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr)$$



Aufgabe 4 (lineare Abhängigkeit; 4 Punkte)**.** Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf V und seien $x, y \in V$ mit $y \neq 0$. Sei
$$\lambda := \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}.$$
Zeigen Sie: Die Familie (x, y) ist genau dann linear abhängig, wenn $x - \lambda \cdot y = 0$. Dabei wird im euklidischen Fall lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ und im unitären Fall lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{C}$ betrachtet.

Bonusaufgabe (Anschauung; 4 Punkte)**.** Welche geometrische Bedeutung haben die Polarisierungsgleichung und die Parallelogrammgleichung? Illustrieren Sie Ihre Erklärungen durch geeignete Skizzen.

Für Lehramtsstudenten: Mit welchen Sätzen aus der Schulgeometrie hängen diese beiden Gleichungen zusammen?

Hinweis. Die Bonusaufgaben sind ein freiwilliges Zusatzangebot, sind oft manchmal komplexer oder aufwendiger bzw. basieren auf Material oder Fähigkeiten, die über die Vorlesung und die Übungen hinausgehen. Diese Aufgaben werden nicht in den Übungsgruppen besprochen. Sie dienen einfach nur als zusätzliche Anregung und Herausforderung. Man kann sich also gerne die Zähne daran ausbeißen oder sie fröhlich ignorieren.

Abgabe bis 2. Mai 2025, 8:35, via Briefkasten/GRIPS

C

Organisatorisches

Lineare Algebra II: Organisatorisches

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann April 2025

Homepage. Alle aktuellen Informationen zur Vorlesung, zu den Übungen, zu Sprechstunden, Literaturangaben, sowie die Übungsblätter/Lesepläne finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung bzw. in GRIPS:

https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg2_ss25

https://elearning.uni-regensburg.de/course/view.php?id=70422

Vorlesung. Die Vorlesung findet jeweils montags (10:15–12:00; H 32) und donnerstags (10:15–12:00; H 32) statt. Die erste Vorlesung ist am Donnerstag, den 24. April, um 10:15. Das Vorlesungsskript ist über die Vorlesungshomepage und GRIPS zugänglich; das Skript wird jeweils *nach* der Vorlesung im Verlauf des Tages aktualisiert.

Ich möchte alle Teilnehmer dazu ermutigen, sich aktiv an der Vorlesung zu beteiligen und Fragen zu stellen bzw. zu beantworten. Deshalb möchte ich die Atmosphäre so locker, informell und unverbindlich wie möglich halten.

Übungen. Die neuen Übungsaufgaben werden wöchentlich donnerstags spätestens um 10:00 Uhr auf den obigen Homepages online gestellt und sind bis zum Freitag eine Woche später um 8:35 Uhr abzugeben (in die Briefkästen oder via GRIPS).

Auf jedem Übungsblatt gibt es vier reguläre Aufgaben (je 4 Punkte), Bonusaufgaben (je 4 Bonuspunkte) und ab Blatt 3 Wiederholungsaufgabe (je 2 Bonuspunkte).

Sie dürfen und sollen die Aufgaben in kleinen Gruppen bearbeiten; aber die Lösungen müssen individuell ausformuliert und aufgeschrieben werden, andernfalls werden die Punkte aberkannt. Sie dürfen (müssen aber nicht!) Lösungen zu zweit abgeben; in diesem Fall müssen selbstverständlich jeweils beide Autoren in der Lage sein, *alle* der Zweiergruppe abgegebenen Lösungen zu präsentieren, andernfalls werden die Punkte aberkannt.

Die Übungsgruppen beginnen in der zweiten Vorlesungswoche; in diesen ersten Übungen werden die Fingerübungen von Blatt 1 besprochen. Erste Fragen können Sie außerdem gerne in der Zentralübung stellen.

Zentralübung. Zusätzlich zur Vorlesung und den Übungen bietet die Zentralübung die Gelegenheit, Fragen zu stellen, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen und weitere Beispiele zu behandeln. Die Zentralübung findet montags (14:15–15:45; H 32) statt. Die Zentralübung beginnt in der *zweiten* Vorlesungswoche und ist ein freiwilliges Zusatzangebot.

Fingerübungen. Das Skript und die Übungsblätter enthalten Fingerübungen, die elementare Techniken und Begriffe trainieren. Diese Aufgaben sollten im Idealfall so einfach sein, dass sie innerhalb weniger Minuten gelöst werden können. Diese Aufgaben werden nicht abgegeben bzw. korrigiert. Die Fingerübungen auf den Übungsblättern werden in den Übungsgruppen gemeinsam behandelt und können zusätzlich auch gut zum „Aufwärmen“ beim täglichen Üben genutzt werden.

Einteilung in die Übungsgruppen. Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt über GRIPS.

Sie können sich bis Freitag, den 25. April 2025, um 9:00 Uhr für die Übungen anmelden; Sie können dort Ihre Präferenzen für die Übungstermine auswählen und wir werden versuchen, diese Wünsche zu erfüllen. Bitte beachten Sie jedoch, dass es sein kann, dass wir nicht alle Wünsche erfüllen können.

Anmeldungen über EXA/SPUR für die Übungsgruppen werden *nicht* berücksichtigt!

Die endgültige Einteilung der Übungsgruppen wird voraussichtlich am Freitag, den 25. April 2025, in GRIPS bekanntgegeben. Ein Wechsel in volle Übungsgruppen ist dann nur durch Tausch mit einem Tauschpartner möglich.

Bei Fragen zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Franziska Hofmann (franziska2.hofmann@mathematik.uni-r.de).

Prüfungs-/Studienleistungen. Die Vorlesung *Lineare Algebra II* kann wie in den Modulkatalogen spezifiziert in die Studiengänge eingebracht werden.

- *Studienleistung*: Erfolgreiche Teilnahme an den Übungen: Mindestens 50% der (in den regulären Aufgaben) möglichen Punkte, mindestens einmal zufriedenstellend vorrechnen.
- *Prüfungsleistung*: schriftliche Klausur (120 Minuten).

Die Wiederholungsklausur kann auch als Erstversuch geschrieben werden; diese Option ist nur in Einzelfällen sinnvoll: der nächste Wiederholungstermin ist dann erst ein Jahr später im Rahmen der nächsten Vorlesung Lineare Algebra II.

Um das Modul *MAT-BGLA* bzw. *MAT-LA-GyLA* erfolgreich abzuschließen, müssen folgende Leistungen erbracht werden

- Studienleistung Lineare Algebra I
- Studienleistung Lineare Algebra II
- Prüfungsleistung Lineare Algebra I oder Lineare Algebra II [gewichtet mit 1/3]
- mündliche Modulprfung [gewichtet mit 2/3].

Sie müssen sich in FlexNow für die Studienleistung und die Prüfungsleistung anmelden. Bitte informieren Sie sich frühzeitig über die für Sie gültigen Modalitäten (Prüfungsordnung, Modulkatalog, ggf. Studiengangskoordination und Studienberatung). Berücksichtigen Sie bitte auch (implizite) Fristen der entsprechenden Prüfungsordnungen bis wann (Wiederholungs-)Prüfungen abgelegt werden müssen.

Klausurtermine. Die Klausuren finden zu folgenden Terminen statt:

- Klausur: 28.07.2025
- Wiederholungsklausur: am Ende der Semesterferien (Termin wird rechtzeitig bekanntgegeben).

Wichtige Informationen im Krankheitsfall finden Sie unter:

https://www.uni-regensburg.de/studium/startseite/verhalten-krankheitsfall/index.html

Hinweise für Wiederholer. Studenten, die bereits in einem vorangegangenen Semester an der Vorlesung teilgenommen haben, aber im entsprechenden Semester die Klausur nicht bestanden haben oder nicht an der Klausur teilgenommen haben, können auch an den oben genannten Klausurterminen teilnehmen, sofern noch ein Prüfungsanspruch besteht. Informieren Sie sich rechtzeitig über den Stoffumfang dieser Vorlesung (z.B. über das Skript und die Übungsblätter). Außerdem kann es je nach Kenntnisstand sinnvoll sein, nochmal an den Übungen oder der Vorlesung teilzunehmen.

Falls Sie an den Übungen teilnehmen möchten, ohne dass Ihre Lösungen korrigiert werden sollen, schreiben Sie bitte eine email an Franziska Hofmann (franziska2.hofmann@mathematik.uni-r.de) mit Ihren Wunschterminen (damit die Übungsgruppen einigermaßen gleichmäßig besucht sind).

Ansprechpartner.

- Bei Fragen zur Organisation des Übungsbetriebs wenden Sie sich bitte an Franziska Hofmann (franziska2.hofmann@mathematik.uni-r.de).
- Bei Fragen zu den Übungsaufgaben wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter oder fragen Sie in der Zentralübung.
- Bei mathematischen Fragen zur Vorlesung wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsleiter, an Franziska Hofmann oder an Clara Löh.
- Bei Fragen zur Planung Ihres Studiums bzw. zur Prüfungsordnung wenden Sie sich bitte an die zuständige Studienberatung, die Studiengangskoordination oder das zuständige Prüfungsamt.
- Bei vielen Fragen kann Ihnen auch die Fachschaft weiterhelfen:

https://www.uni-regensburg.de/studium/fachschaft-mathe-physik/startseite/index.html

Lineare Algebra II: Üben

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann April 2025

Wissen, Verstehen, Üben

Wissen, Verstehen, Üben bedingen und verstärken sich gegenseitig. Insbesondere hilft das Üben dabei, Wissen, Verständnis und spezifische Beweis-, Rechen- und Problemlösetechniken zu automatisieren. Diese Automatisierung ist für das Lösen komplexerer Probleme unerlässlich und gibt den Freiraum für die Entwicklung mathematischer Kreativität.

Üben Sie jeden Tag ein bisschen; es ist besser, jeden Tag eine Stunde Lineare Algebra II zu üben als einmal in der Woche viele Stunden am Stück!

Ziel der Übungsaufgaben ist, sich aktiv mit den behandelten Definitionen, Sätzen, Beispielen und Beweistechniken auseinanderzusetzen und zu lernen, damit umzugehen. Insbesondere ist der Weg das Ziel: Es ist wertvoller, eigenständig eine Aufgabe suboptimal zu bearbeiten als eine korrektere Lösung von anderen zu übernehmen. Nutzen Sie den Luxus, dass Sie für Ihre Abgaben *individuelle* Rückmeldung erhalten!

Das Punkteminimum für die Studienleistung ist das *Minimum*. Sie sollten versuchen, möglichst viele Punkte zu erreichen und nicht nach Erreichen dieser Minimalzahl die Übungen schleifen lassen!

Tag 0: Das neue Übungsblatt

- Beginnen Sie mit der Bearbeitung des Übungsblattes an dem Tag, an dem das Übungsblatt erscheint – manche Dinge brauchen einfach ein paar Tage Zeit.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben gründlich durch.
- Kennen Sie die auftretenden Begriffe? Wenn nicht: Nachschlagen/Merken!
- Verstehen Sie, was in der Aufgabe verlangt wird? Insbesondere: Was ist gegeben? Was ist zu tun/zeigen? Welche Ansätze kommen für die Lösung strukturell in Frage?
- Gibt es Sätze/Beispiele aus der Vorlesung, die auf diese Situation passen?
- Welche Lösungsstrategien bzw. Beweisstrategien passen auf die Aufgabe? Kann man einfach direkt mit den Definitionen arbeiten und so zum Ziel gelangen?
- Ist die Aufgabe plausibel? Versuchen Sie, die behaupteten Aussagen an einfachen Beispielen nachzuvollziehen!
- Falls Sie die Aufgabe unplausibel finden, können Sie versuchen, sie zu widerlegen und untersuchen, woran dieses Vorhaben scheitert.
- Kann man die Situation durch eine geeignete Skizze graphisch darstellen?

Tägliche Routine

- Schaffen Sie ein Umfeld, in dem Sie konzentriert, produktiv, ablenkungsfrei (Mobiltelefon?!) und ergonomisch arbeiten können.
- Überlegen Sie sich, woran Sie arbeiten möchten bzw. welche Ziele Sie in dieser Übeeinheit erreichen möchten.
- Beginnen Sie zum „Aufwärmen“ mit einfachen Dingen. Zum Beispiel mit dem Lernen von in der Vorlesung behandelten Begriffen/Sätzen, mit den Fingerübungen auf den Übungsblättern oder mit den Fragen/Beispielen im Skript.
- Bearbeiten Sie dann die Aufgaben auf dem Übungsblatt.

  Verwenden Sie viel Schmierpapier und geben Sie sich genug Zeit, an der Aufgabe herumzuexperimentieren! Selbst wenn Sie die Aufgabe nicht vollständig oder nicht korrekt lösen, werden Sie auf diese Weise viel lernen, da Sie sich aktiv mit dem Material auseinandersetzen.

  Wenn Sie nicht weiterwissen, diskutieren Sie die Aufgabe mit Kommilitonen oder verwenden Sie Literatur. Lassen Sie sich aber auf keinen Fall dazu verleiten, einfach Lösungen irgendwo abzuschreiben, K„I“-Systemen blind zu vertrauen oder ausschließlich in Gruppen zu arbeiten. Mathematik kann man nur lernen, wenn man aktiv damit arbeitet und seine Gedanken selbst formuliert!

  Notieren und sammeln Sie Ihre Fragen. Können Sie Ihre Fragen vom Vortag beantworten? Woran möchten Sie am nächsten Tag weiterarbeiten?
- Planen Sie Pausen ein (mental und physisch).
- Beenden Sie Ihre Übeeinheit mit einem Aspekt von Mathematik, der Ihnen uneingeschränkt Spaß macht. Zum Beispiel mit ergänzender Literatur/ergänzenden digitalen Angeboten, mit mathematischen Rätseln, Cartoons, Spielen … Für Lehramtskandidaten: (wie) könnte das Gelernte in der Schule eingesetzt werden?

Aufschreiben von Lösungen

- Auch wenn Sie in einer größeren Gruppe kooperiert haben: Schreiben Sie Ihre Lösungen selbständig auf.
- Gliedern Sie Ihre Lösung sauber in Voraussetzung, Behauptung und Beweis. Passt dies mit der Aufgabe zusammen?
- Teilen Sie Ihre Beweise in sinnvolle Zwischenschritte auf (auch optisch!).
- Achten Sie darauf, dass Sie verständlich formulieren und dass die Argumente logisch aufeinander aufbauen.
- Ist Ihre Argumentationskette wirklich lückenlos? Seien Sie misstrauisch gegenüber Ihrer eigenen Lösung und versuchen Sie, alle potentiellen Schwachpunkte ausfindig zu machen!

- Wenn Sie einzelne Beweisschritte nicht vollständig durchführen können, können Sie in Ihrer Lösung darauf hinweisen – die restliche Lösung kann trotzdem Punkte erhalten.
- Achten Sie darauf, dass Sie alle Bezeichner einführen und dass Sie mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt verwenden.
- Versuchen Sie, sich so präzise wie möglich auszudrücken.
- Versuchen Sie, indirekte Argumente so weit wie möglich zu vermeiden.
- Überprüfen Sie am Ende, ob Sie wirklich das bewiesen haben, was Sie ursprünglich behauptet haben.
- Oft ist es auch hilfreich zu überprüfen, ob/wie alle in der Aufgabe gegebenen Voraussetzungen verwendet wurden.
- Würden Sie Ihre Lösung verstehen, wenn Sie sie zum ersten Mal lesen würden?
- Alles, was Sie abgeben, müssen Sie eigenständig formuliert und auch verstanden haben.
- Geben Sie Literaturangaben an, wenn Sie zusätzliche Quellen verwendet haben.
- Teilen Sie Ihre Lösungen vor dem Abgabetermin *nicht* auf sozialen Netzwerken etc. mit den anderen Teilnehmern der Vorlesung. Nichts ist demotivierender, als eine Aufgabe zu bearbeiten, für die bereits Lösungen offen kursieren. Es spricht aber natürlich nichts dagegen, konkrete Fragen anderer Teilnehmer zu beantworten.

Tag $n-1$: Checkliste vor der Abgabe

- Verstehen Sie Ihre Lösung immer noch?
- Bei jeder Aufgabe: Lösung sauber strukturiert?

  Insbesondere (fast immer): Voraussetzung, Behauptung, Beweis!
- Name(n) auf der Abgabe?

  Nummer der Übungsgruppe auf der Abgabe?
- Können alle Autoren die abgegebenen Lösungen vorstellen?
- Achten Sie bitte auf gute Lesbarkeit und Verständlichkeit;
  lassen Sie genug Platz für Korrekturanmerkungen.
- Papierabgabe:
  - Blätter im A4-Format?
  - Blätter zusammengetackert?
    Bitte keine Umschläge, Hefter, ... verwenden!
  - In den richtigen Briefkasten einwerfen!

- Digitale Abgabe:
  - Abgabe nur im pdf-Format möglich
  - Bei gescannten Lösungen: Lesbarkeit?!

Bewertungskriterien

- Wurden Voraussetzung, Behauptung, Beweis deutlich gekennzeichnet und voneinander getrennt?
- Stimmen die Voraussetzungen? Sind sie sauber formuliert?
- Stimmen die Behauptungen/Zwischenbehauptungen? Sind sie sauber formuliert?
- Ist die Argumentationskette der Beweisschritte vollständig?
- Sind die Beweisschritte präzise formuliert und verständlich?
- Sind alle Bezeichner eingeführt?
- Werden mathematische Symbole und Fachbegriffe korrekt eingesetzt?
- Ist an jeder Stelle des Beweises klar, was passiert?
- Werden die neu erlernten Begriffe und Techniken passend eingesetzt?
- Wurde die gestellte Aufgabe vollständig gelöst?
- Falls Lösungen abgeschrieben wurden und dies von den Übungsleitern entdeckt wird, erhalten Sie auf diese Aufgaben keine Punkte. Mal abgesehen davon, dass es weder sinnvoll noch fair ist, abzuschreiben.

Fehlerkultur

Fehler sind ein natürlicher und wichtiger Bestandteil in jedem Lernprozess. Sie bieten gute Gelegenheiten, ein besseres Verständnis zu erlangen.

- Haben Sie keine Angst vor Fehlern!
- Langfristig sollen Fehler minimiert werden. Kurzfristig sind sie aber hilfreich beim Lernen, da sie die Grenze zwischen „korrekt“ und „inkorrekt“ deutlicher hervortreten lassen.
- Wichtig ist, dass Sie nach der Korrektur/Diskussion verstehen, warum ein Fehler vorliegt und wie man ihn beheben kann.

  Insbesondere: Schauen Sie sich die Korrekturen Ihrer Übungsabgaben genau an. Nutzen Sie diese individuelle Rückmeldung zu Ihrem aktuellen Stand!
- Fehler sollten nach Möglichkeit nicht wiederholt werden.
- Falls Sie Fehler in der Vorlesung oder auf den Übungsblättern entdecken, geben Sie bitte Franziska Hofmann oder Clara Löh Bescheid.

Übungsgruppe

Ziel der Übungsgruppen ist nicht nur die Rückgabe der Korrekturen und das Besprechen von Lösungen. Sie sollen lernen, mathematisch zu diskutieren, Strategien zur Problemlösung zu finden/anzuwenden, und Sie sollen lernen, mathematische Fehler zu erkennen bzw. zu beheben.

- Beantwortung von Fragen zur Vorlesung und zu den Übungsaufgaben.

  Bereiten Sie sich entsprechend vor, sammeln Sie Ihre Fragen und stellen Sie diese während des Übungstermins.

- Bearbeitung (einer Auswahl) von Fingerübungen auf den Übungsblättern.

  Bereiten Sie sich darauf vor, indem Sie die Aufgaben beim täglichen Üben anschauen bzw. bearbeiten. Fragen Sie, wenn Sie Schwierigkeiten bei diesen Aufgaben haben!

- Besprechung von Lösungen der korrigierten Aufgaben.

  Im Normalfall sollen die Teilnehmer vorrechnen! Haben Sie keine Angst, eine Aufgabe vorzurechnen. Auch dann nicht, wenn Ihre Lösung nicht ganz richtig oder vollständig ist. Die Übungsgruppe ist *keine* Prüfung und *keine* Verkündung von „Musterlösungen“, sondern eine Gelegenheit, Mathematik und Kommunikation von Mathematik gemeinsam zu üben.

Zentralübung

Die Zentralübung bietet die Gelegenheit, Fragen zu stellen, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen und weitere Beispiele zu behandeln.

- Bereiten Sie sich darauf vor, indem Sie im Voraus Fragen sammeln.
- Sie können auch das anonyme Frageforum in GRIPS nutzen, um Fragen vorab zu stellen (bzw. gegebenenfalls direkt Antworten zu erhalten).
- Die Zentralübung lebt von Ihren Fragen. Haben Sie keine Angst, Fragen zu stellen. Je mehr verschiedene Teilnehmer Fragen stellen, desto mehr interessante und hilfreiche Blickwinkel ergeben sich.

Viel Erfolg und viel Spaß bei den Übungen!

Lineare Algebra II: Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann April 2025

Ziel der Prüfungsvorbereitung

Hauptziel der Prüfungsvorbereitung ist die souveräne Beherrschung des behandelten Fachgebiets. Die Prüfung sichert ab, dass dies tatsächlich der Fall ist, ist aber nicht das eigentliche inhaltliche Ziel der Vorlesung/Übungen. Beherrscht werden sollten also:

- aktive Kenntnis der Fachbegriffe und Formalisierungsmethoden
- Verständnis der Ideen, die zu diesen Fachbegriffen und Formalisierungen führen
- wichtige Probleme und Fragestellungen, die das Gebiet maßgeblich beeinflusst haben bzw. die durch das Gebiet gelöst werden können
- wichtige Resultate und Zusammenhänge innerhalb des Gebiets
- wichtige Beweis- und Lösungsstrategien
- repräsentative Beispiele
- Anwendungen des Gebiets und Interaktion mit anderen Gebieten
- Fähigkeit, auf all diesen Kenntnissen weiter aufzubauen.

Insbesondere müssen Definitionen und Sätze inhaltlich präzise und vollständig reproduziert werden können, inklusive aller Voraussetzungen, Quantoren, ... Es genügt *nicht*, nur eine vage Vorstellung des Inhalts der Definitionen und Sätze zu haben.

Erreichen dieses Ziels

Während der Vorlesungszeit:

- aktive Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben
- Erlernen des Fachwissens (Definitionen, Sätze), notfalls mit Karteikarten
- Sortierung des Materials in zentrale/wichtige Dinge und eher unwichtige; diese Priorisierung beim Lernen berücksichtigen
- weiteres aktives Üben mit zusätzlichen Aufgaben und Vertiefung der Kenntnisse durch Selbststudium (Bibliothek und Computer-Werkzeuge)
- Bei Fragen: Betreuungsangebote nutzen!

Es ist viel einfacher, sich Definitionen, Sätze und Beweise inhaltlich präzise zu merken, wenn man sie und die unterliegenden Ideen genau verstanden hat. Lernen mit Verständnis ist daher viel effizienter, robuster und flexibler als Lernen ohne Verständnis.

Während der gezielten Prüfungsvorbereitung:

- Wiederholung und Festigung des gelernten Fachwissens
- weiteres aktives Üben
- Zusammenfassung der wichtigsten Inhalte der Vorlesung auf wenigen Seiten (es geht darum, selbst eine Zusammenfassung zu erstellen, *nicht* eine solche von jemand anderem auswendig zu lernen!)
- Bei Fragen: Kommilitonen oder Studenten aus höheren Semestern ansprechen
- Pausen einplanen
- *nicht* erst nach der vorigen Prüfung mit der Vorbereitung auf die nächste Prüfung beginnen

Kurz vor der Prüfung:

- Kann ich mein Wissen präzise, verständlich und flüssig schriftlich bzw. mündlich präsentieren? (Das kann man einfach an anderen Kommilitonen ausprobieren ...)
- Was könnten typische Prüfungsfragen sein? Was sind gute Lösungen zu diesen Fragen? (Dabei können insbesondere Probeklausuren, Altklausuren und Gedächtnisprotokolle von Prüfungen hilfreich sein.)
- Wie belastbar sind meine Fähigkeiten? Was muss ich noch verbessern?
- Bei Fragen: Kommilitonen oder Studenten aus höheren Semestern ansprechen

Im Falle einer Wiederholungsprüfung:

- kritisch hinterfragen, was bei der Vorbereitung für den vorigen Prüfungsversuch suboptimal gelaufen ist; Lernstrategie und Lernorganisation entsprechend anpassen

Bewertungskriterien

In der Prüfung werden folgende Fähigkeiten abgeprüft:

- Fachwissen (Definitionen, Sätze, Beweise, Beispiele, Anschauung, Zusammenhänge, Anwendungen, ...)
- präzises und korrektes, logisch schlüssiges, Formulieren und Argumentieren
- Lösen von Standardproblemen
- Kreativität bei der Lösung von Problemen

Es gelten sinngemäß dieselben Grundsätze wie beim Aufschreiben/Präsentieren von Lösungen in Übungsgruppen und wie bei der Bewertung von Abgaben zu Übungsblättern:

- https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/ueben.pdf
- https://loeh.app.ur.de/teaching/linalg1_ws2425/richtungen.pdf

Konkrete Hinweise

Definitionen:

- Was sind die Voraussetzungen?
- Welcher Begriff wird definiert?
- Warum genau so und nicht anders? (Beispiele, Zusammenhang mit anderen Definitionen, weitere Verwendung in der Theorie und in Anwendungen)
- Was sind Beispiele, die die Definition erfüllen? (Sowohl einfache als auch komplexere)
- Was sind Beispiele, die die Definition nicht erfüllen? (Sowohl einfache als auch komplexere)

Sätze, Propositionen, etc.:

- Was sind die Voraussetzungen?
- Was wird behauptet?
- Warum genau so und nicht anders? (Beispiele, Zusammenhang mit anderen Resultate, weitere Verwendung in der Theorie und in Anwendungen)
- Was passiert, wenn nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind?
- Was sind einfache konkrete Beispiele, auf die dieser Satz angewendet werden kann? Was liefert der Satz in diesem Fall?
- Was sind wichtige weitere Anwendungen dieses Satzes?
- In welchen zentralen Beweisen wird dieser Satz verwendet?
- Wie kann man den Satz beweisen?

Beweise:

- Was ist die unterliegende Idee? Was ist die unterliegende Struktur?
- Was ist speziell/interessant an diesem Beweis?
- Benötigt der Beweis einen Trick?
- Gibt es weitere Sätze, die mit einer ähnlichen Technik bewiesen werden?
- Ginge das nicht auch einfacher?! Falls ja: prima! Falls nein: Warum nicht?
- Welche Hilfsmittel/vorigen Resultate gehen in diesen Beweis ein?
- Können Sie den Beweis kurz zusammenfassen? Können Sie ihn dann wieder zu einem vollständigen Beweis auffüllen?

Viel Erfolg bei der Prüfung!

Literaturverzeichnis

Bitte beachten Sie, dass das Literaturverzeichnis im Laufe der Vorlesung wachsen wird und sich daher auch die Nummern der Quellen ändern werden!

[1] H.-D. Ebbinghaus et. al.. *Zahlen*, Springer, 1992. Cited on page: A.3

[2] C. Löh. *Geometrie (Lehramt Gymnasium)*, Vorlesungsskript, SS 2023, Universität Regensburg, 2023. Cited on page:

[3] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998. Cited on page:

[4] *OpenGL Wiki*,
https://www.khronos.org/opengl/wiki/ Cited on page:

[5] B.C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991. Cited on page:

Deutsch → English

K

komplexe Konjugation	complex conjugation	A.6
Kosinus	cosine	A.7

N

negativ definit	negative definite	7
negativ semi-definit	negative semi-definite	7
Norm	norm	10
normierter Vektorraum	normed space	10

P

positiv definit	positive definite	7
positiv semi-definit	positive semi-definite	7

R

Realteil	real part	A.4

S

Sesquilinearform	sesquilinear form	9
Sinus	sine	A.7
Skalarprodukt	inner product	7
Standardskalarprodukt	standard inner product	8
symmetrisch	symmetric	7

U

unitärer Vektorraum	unitary vector space	10

English → Deutsch

A

absolute value	Absolutbetrag	A.5
algebraically closed	algebraisch abgeschlossen	A.3

B

bilinear form	Bilinearform	7

C

complex conjugation	komplexe Konjugation	A.6
cosine	Kosinus	A.7

E

euclidean vector space	euklidischer Vektorraum	10

F

form	Form	7

H

hermitian inner product	hermitesches Skalarprodukt	8
homogeneity	Homogenität	11

I

imaginary part	Imaginärteil	A.4
imaginary unit	imaginäre Einheit	A.4
indefinite	indefinit	7
induced norm	induzierte Norm	11

Index

Finger weg! Gaaaaaa! . . . Das war der lila Knopf. Jetzt kann alles mögliche passieren! Aber fürs Drucken kann das durchaus nützlich sein . . .