

Wiederholungsklausur Lineare Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

29. September 2025

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 (1 + 3 + 3 + 3 = 10 Punkte).

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum *negativ definit* ist.
2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$ mit $x \perp y$. Gilt dann bereits $(x + y) \perp (x - y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gilt für alle $A, B \in O(2)$, dass $A \cdot B = B \cdot A$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Formulieren Sie die Definition von *Orthonormalsystem* in einem euklidischen Vektorraum und beweisen Sie, dass jedes Orthonormalsystem linear unabhängig ist.

Lösung:

1. Eine Bilinearform $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ist *negativ definit*, wenn für alle $x \in V \setminus \{0\}$ gilt:

$$b(x, x) < 0$$

2. *Behauptung.* Nein, im allgemeinen gilt dies nicht.

Beweis. Wir betrachten

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Wegen $\langle x, y \rangle_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$ gilt $x \perp y$.

Andererseits gilt aber $(x + y) \not\perp (x - y)$, denn

$$\begin{aligned} \langle x + y, x - y \rangle_2 &= \langle x + 0, x - 0 \rangle_2 = \langle x, x \rangle_2 = \sqrt{2} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

□

3. *Behauptung.* Nein, dies gilt im allgemeinen nicht.

Beweis. Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Dann ist $A^\top \cdot A = I_2$ und $B^\top \cdot B = I_2$. Also sind $A, B \in O(2)$. Aber es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A. \quad \square$$

[Solche Matrizen kann man leicht aus der Anschauung ebener Geometrie gewinnen: Die Matrix A beschreibt die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden und B beschreibt die Rotation um $\pi/2$ um den Ursprung.]

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist ein *Orthonormalsystem*, wenn

$$\forall i, j \in I \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$$

(d.h. alle Vektoren der Familie haben Länge 1 und die Vektoren stehen alle orthogonal aufeinander).

Behauptung. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Jedes Orthonormalsystem in V ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$

Beweis. Sei $(v_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in V . Ist $J \subset I$ endlich und ist $(\lambda_j)_{j \in J}$ eine Familie in $\mathbb{R}$ mit $\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j = 0$, so folgt mit den Eigenschaften des Skalarprodukts und der Voraussetzung, dass ein Orthonormalsystem vorliegt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_k, 0 \rangle = \left\langle v_k, \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j \right\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle v_k, v_j \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \delta_{k,j} \\ &= \lambda_k \end{aligned}$$

für alle $k \in J$ gilt. Also ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig. $\square$

Aufgabe 2 ($5 + 1 + 1 + 3 = 10$ Punkte). Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T \cdot A \cdot x = 2\}.$$

1. Bestimmen Sie Hauptachsen für die Quadrik Q .
2. Skizzieren Sie diese Quadrik.
3. Formulieren Sie die Definition von *selbstadjungiertem Endomorphismus* auf einem euklidischen Vektorraum.
4. Gibt es eine Matrix $S \in GL_2(\mathbb{R})$ mit $S^T \cdot A \cdot S = I_2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, die aus Eigenvektoren von A besteht: Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(T \cdot I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} T-3 & 2 \\ 2 & T-3 \end{pmatrix} \\ &= (T-3)^2 - 4 = T^2 - 6 \cdot T + 5 \\ &= (T-1) \cdot (T-5). \end{aligned}$$

Die Matrix A hat also die (reellen) Eigenwerte 1 und 5.

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert 1 gilt

$$V(A - I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert 5 gilt

$$V(A - 5 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A .

Somit sind

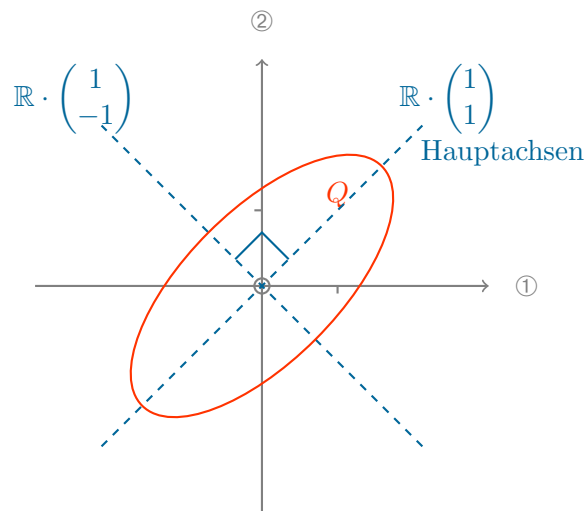
$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hauptachsen für Q .

2. Nach der Berechnung im ersten Teil ist

$$Q = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 = 2 \right\}.$$

Zusammen mit den bereits bestimmten Hauptachsen liefert dies das folgende Bild:



3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist *selbstadjungiert*, wenn

$$\forall_{x,y \in V} \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle.$$

4. *Behauptung.* Ja, es gibt eine solche Matrix.

Beweis. Die Eigenwerte der symmetrischen Matrix A sind reell und positiv. Mit dem Beweis des Sylvesterschen Trägheitssatz ergibt sich die Existenz einer Matrix $S \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $S^T \cdot A \cdot S = I_2$. $\square$

[Alternativ kann man aus den Berechnungen im ersten Teil auch eine solche Matrix S explizit angeben, nämlich

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

]

Aufgabe 3 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass ein Ringelement *prim* ist.
2. Ist $T^3 + T^2 + T + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$ prim? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T^2) = 2 \cdot T^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gilt $(T^2, T^3) = (2025 \cdot T)$ in $\mathbb{Q}[T]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Ring. Ein Element $p \in R \setminus \{0\}$ ist *prim*, wenn p keine Einheit ist und folgendes gilt:

$$\forall_{x,y \in R} \quad p \mid x \cdot y \implies (p \mid x \vee p \mid y).$$

2. *Behauptung.* Nein, $T^3 + T^2 + T + 1$ ist in $\mathbb{F}_2[T]$ nicht prim.

Beweis. In $\mathbb{F}_2[T]$ gilt

$$T^3 + T^2 + T + 1 = (T + 1) \cdot (T^2 + 1).$$

Aus Gradgründen ist aber $T^3 + T^2 + T + 1$ kein Teiler von $T + 1$ oder $T^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[T]$. Somit ist dieses Polynom nicht prim.

[Alternativ könnte man dieses Argument auch als Mangel an Irreduzibilität ausdrücken.] □

3. *Behauptung.* Ja, es gibt einen solchen Ringhomomorphismus.

Beweis. Mit der universellen Eigenschaft des Polynomrings $\mathbb{R}[T]$ erhalten wir einen $\mathbb{R}$ -Algebrenhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[T] \longrightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T) = \sqrt{2} \cdot T$. Dann ist φ insbesondere ein Ringhomomorphismus und es gilt

$$\varphi(T^2) = \varphi(T) \cdot \varphi(T) = \sqrt{2} \cdot T \cdot \sqrt{2} \cdot T = 2 \cdot T^2. \quad \square$$

4. *Behauptung.* Nein, die Ideale (T^2, T^3) und $(2025 \cdot T)$ in $\mathbb{Q}[T]$ sind verschieden.

Beweis. Es gilt $(T^2, T^3) = (T^2, T \cdot T^2) = (T^2)$.

Aus Gradgründen ist aber $2025 \cdot T \notin (T^2)$. □

Aufgabe 4 ($3 + 1 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie die *Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen*.
2. Aus welchem allgemeineren Satz wird die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen gefolgert?
3. Gilt $\mathbb{Z}/50 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/25$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $6 \cdot x + 13 \cdot y = -99$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $d, k \in \mathbb{N}$, Primzahlen $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$A \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{j \in \{1, \dots, k\}} \mathbb{Z}/(p_j^{n_j}).$$

Dabei sind $d, k, p_1, \dots, p_k$ (bis auf die Reihenfolge) und $n_1, \dots, n_k$ eindeutig durch A bestimmt.

2. Aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen (angewendet auf den Hauptidealring $\mathbb{Z}$).
3. *Behauptung.* Die $\mathbb{Z}$ -Moduln $\mathbb{Z}/50$ und $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/25$ sind isomorph.

Beweis. Wegen $\text{ggT}(2, 25) = 1$ folgt mit dem chinesischen Restsatz für Moduln (angewendet auf den Hauptidealring $\mathbb{Z}$), dass $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/25 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2 \cdot 25) = \mathbb{Z}/50$. $\square$

4. *Behauptung.* Ja, es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $6 \cdot x + 13 \cdot y = -99$.

Beweis. Sei $x := (-99) \cdot (-2) = 198$ und $y := (-99) \cdot 1 = -99$. Dann ist

$$6 \cdot x + 13 \cdot y = (-99) \cdot (6 \cdot (-2) + 13 \cdot 1) = (-99) \cdot 1 = -99. \quad \square$$

[Wie findet man eine solche Lösung ohne Probieren? Zum Beispiel durch rekursives Rückwärtseinsetzen in der Berechnung eines größten gemeinsamen Teilers von 6 und 13 mit dem euklidischen Algorithmus und Multiplikation mit -99 (man könnte das Ergebnis dann noch modulo $6 \cdot 13 = 78$ reduzieren). Alternativ kann man auch mit der Idealgleichheit $(6, 13) = (1)$ in $\mathbb{Z}$ argumentieren, ohne eine konkrete Lösung zu berechnen.]

Aufgabe 5 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A . Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\deg p = 2$ und $p(A) = A$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A . Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$ -zyklischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Als ersten Schritt berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[T]$ von A : Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(T \cdot I_3 - A) \\ &= T \cdot (T - 1)^2. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist das Minimalpolynom μ_A ein normierter Teiler von χ_A in $\mathbb{C}[T]$ und besitzt dieselben Primteiler (aber möglicherweise mit niedrigerer Vielfachheit). Also ist $\mu_A \in \{T \cdot (T - 1), T \cdot (T - 1)^2\}$.

Eine direkte Berechnung liefert

$$(T \cdot (T - 1))(A) = A \cdot (A - I_3) \neq 0.$$

Also ist $\mu_A = T \cdot (T - 1)^2$.

[Alternativ könnte man im letzten Schritt auch die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 von A bestimmen und daraus auf die Gestalt von μ_A schließen.]

2. *Behauptung.* Nein, es gibt kein solches Polynom.

Beweis. Nach dem ersten Teil hat das Minimalpolynom von A den Grad 3. Sei $p \in \mathbb{C}[T]$ vom Grad 2, etwa $p = a \cdot T^2 + b \cdot T + c$. Wegen $\deg p = 2$ ist $a \neq 0$. Also ist $p = a \cdot q$ mit $q := T^2 + b/a \cdot T + c/a$ und wir erhalten

$$p(A) = a \cdot q(A).$$

Mit der Minimalität des Minimalpolynoms folgt $q(A) \neq 0$. Wegen $a \neq 0$ ist daher auch $p(A) = 0$. $\square$

3. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform folgt, dass die Jordansche Normalform von A nur Jordanblöcke zu den Eigenwerten 0 und 1 besitzt und dass (nach der Berechnung von μ_A im ersten Teil) der größte Jordanblock zum Eigenwert 0 die Größe 1 besitzt und der größte Jordanblock zum Eigenwert 1 die Größe 2 besitzt.

Da A eine 3×3 -Matrix ist, bleibt als einzige Möglichkeit (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) für die Jordansche Normalform von A nur

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Behauptung.* Ja, $\mathbb{C}^3$ ist ein $L(A)$ -zyklischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Beweis. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform und der Berechnung im dritten Teil folgt

$$\mathbb{C}^3[L(A)] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-1)^2.$$

Da T und $(T-1)^2$ in $\mathbb{C}[T]$ teilerfremd sind, folgt mit dem Chinesischen Restsatz

$$\mathbb{C}^3[L(A)] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T \cdot (T-1)^2).$$

Der $\mathbb{C}[T]$ -Modul $\mathbb{C}^3[L(A)]$ ist somit zyklisch. Daher ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$ -zyklischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum. $\square$

[Alternativ könnte man auch ein konkretes „zyklisches“ Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^3$ angeben.]

Aufgabe 6 ($2 + 2 + 4 = 8$ Punkte).

1. Sei K ein Körper. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des *Tensorprodukts* zweier K -Vektorräume.
2. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft einer weiteren Konstruktion von Vektorräumen.
3. Sei K ein Körper und sei $f: V \rightarrow W$ eine surjektive K -lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned} V \otimes_K V &\longrightarrow W \otimes_K W \\ x \otimes y &\longmapsto f(x) \otimes f(y) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte surjektive K -lineare Abbildung ist.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K . Das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ und die bilineare Abbildung $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes_K W$ besitzen zusammen die folgende universelle Eigenschaft:

Für jeden K -Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $f: V \times W \rightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\otimes: V \otimes_K W \rightarrow Z$ mit

$$f_\otimes \circ \otimes = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f \text{ (bilinear)}} & Z \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! f_\otimes \text{ (linear)} & \\ V \otimes_K W & & \end{array}$$

2. Universelle Eigenschaft von Quotientenvektorräumen: Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und sei $U \subset V$ ein K -Untervektorraum. Dann besitzt der Quotientenvektorraum V/U zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\begin{aligned} \pi_U: V &\longrightarrow V/U \\ v &\longmapsto v + U \end{aligned}$$

die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden K -Vektorraum W und jede K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $U \subset \ker f$ gibt es genau eine K -lineare Abbildung $\bar{f}: V/U \rightarrow W$ mit

$$\bar{f} \circ \pi_U = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ V/U & & \end{array}$$

[Alternativ könnte man zum Beispiel auch die universelle Eigenschaft direkter Summen oder von äußeren Produkten formulieren.]

3. Nach der Funktorialität des Tensorprodukts ist

$$\begin{aligned} \varphi &:= f \otimes_K f: V \otimes_K V \rightarrow V \otimes_K V \\ x \otimes y &\mapsto f(x) \otimes f(y) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte K -lineare Abbildung.

Der K -Vektorraum $W \otimes_K W$ wird von Elementartensoren erzeugt. Es genügt daher zu zeigen, dass jedes Element der Form $w \otimes w'$ mit $w, w' \in W$ im Bild der linearen Abbildung φ liegt.

Seien $w, w' \in W$. Da f surjektiv ist, gibt es $v, v' \in V$ mit

$$f(v) = w \quad \text{und} \quad f(v') = w'.$$

Nach Konstruktion von φ gilt somit

$$w \otimes w' = f(v) \otimes f(v') = \varphi(v \otimes v') \in \text{im } \varphi.$$

Also ist $\varphi: V \otimes_K V \rightarrow W \otimes_K W$ surjektiv.

[Alternativ könnte man auch mit einem einseitigen Inversen von f und der Funktorialität des Tensorprodukts argumentieren, um die Surjektivität nachzuweisen.]