

Probeklausur Lineare Algebra II

Prof. Dr. C. Löh/F. Hofmann

Juli 2025

Matrikelnummer:

- Diese Klausur besteht aus 7 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf verschiedene Blätter. Sie können Ihre Lösungen direkt in die Klausur schreiben.
- Beginn: 9:00. Sie haben 120 Minuten Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis oder Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Es können im Total 60 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelefone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!
- Fragen zur Klausur können nur schriftlich (unter Angabe von Matrikelnummer und Aufgabennummer) gestellt werden. Es werden nur Fragen beantwortet, die auf missverständlich oder inkorrekt gestellten Aufgaben beruhen. Inhaltliche Fragen werden nicht beantwortet. Antworten werden schriftlich gegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte maximal	10	10	10	10	12	8	60
erreichte Punkte							

Note:

Unterschrift:

Aufgabe 1 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum *indefinit* ist.
2. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y, z \in V$ mit $x \perp y$ und $x \perp z$. Gilt dann bereits $x \perp (y - 3 \cdot z)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Ist für alle $A, B \in \text{SO}(3)$ auch $A + B \in \text{SO}(3)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Formulieren und beweisen Sie die Polarisierungsgleichung in euklidischen Vektorräumen.

Lösung:

1. Eine Bilinearform $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ist *indefinit*, wenn es $x, y \in V$ gibt mit

$$b(x, x) > 0 \quad \text{und} \quad b(y, y) < 0.$$

2. *Behauptung.* Ja, dann gilt $x \perp (y - 3 \cdot z)$.

Beweis. Mit der Bilinearität des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt

$$\langle x, y - 3 \cdot z \rangle = \langle x, y \rangle - 3 \cdot \langle x, z \rangle = 0 - 3 \cdot 0 = 0,$$

und damit $x \perp (y - 3 \cdot z)$. □

3. *Behauptung.* Nein, im allgemeinen gilt dies nicht.

Beweis. Sei $A := B := I_3$. Dann ist $A \in \text{SO}(3)$ und $B \in \text{SO}(3)$, aber

$$\det(A + B) = \det(2 \cdot I_3) = 2^3 \cdot \det(I_3) = 8 \cdot 1 = 8 \neq 1,$$

und damit $A + B \notin \text{SO}(3)$. □

4. *Behauptung. (Polarisierungsgleichung)* Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt für alle $x, y \in V$, dass

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \cdot (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Beweis. Seien $x, y \in V$. Mit der Definition der induzierten Norm und der Bilinearität und der Symmetrie des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) &= \frac{1}{2} \cdot (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \langle x, y \rangle) \\ &= \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

wie behauptet.

□

Aufgabe 2 ($1 + 1 + 5 + 1 + 2 = 10$ Punkte). Sei

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2 = 1\}.$$

1. Formulieren Sie die Definition von *Quadrik*.
2. Wie kann man den Einheitskreis in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ als Quadrik auffassen?
3. Bestimmen Sie Hauptachsen für die Quadrik Q .
4. Skizzieren Sie die Quadrik Q .
5. Zeigen Sie, dass es $x \in Q$ mit $\|x\|_2 \geq 2025$ gibt.

Lösung:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und sei $c \in \mathbb{R}$. Die zu A und c assoziierte *Quadrik* ist

$$Q(A, c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T \cdot A \cdot x = c\}.$$

2. Der Einheitskreis in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T \cdot I_2 \cdot x = 1\} = Q(I_2, 1).$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2^2 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T \cdot A \cdot x = 1\} \end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Wir bestimmen eine Matrix $S \in O(2)$, so dass $S^T \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist: Es gilt

$$\chi_A = \det(T \cdot I_2 - A) = (T - 2) \cdot (T + 1) - 4 = (T - 3) \cdot (T + 2).$$

Die Matrix A hat also die (reellen) Eigenwerte 3 und -2 .

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert 3 gilt

$$V(A - 3 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum von A zum Eigenwert -2 gilt

$$V(A + 2 \cdot I_2, 0) = V\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) aus Eigenvektoren von A . Somit hat die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \in O(2)$$

die gewünschte Eigenschaft. Also sind

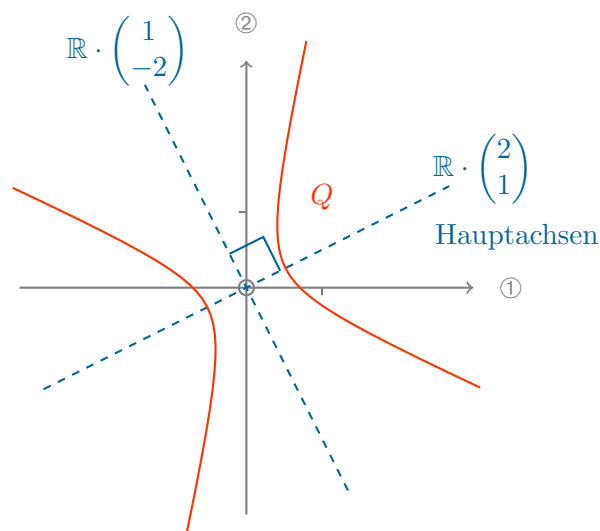
$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hauptachsen für Q .

4. Nach der Berechnung im ersten Teil ist

$$Q = \{S \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } 3 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 = 1\}.$$

Zusammen mit den Hauptachsen liefert dies das folgende Bild:



5. Sei $y_2 := 2025$ und

$$y_1 := \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 2025^2)}.$$

Dann ist $x := S \cdot y \in Q$ und wegen $S \in O(2)$ folgt

$$\|x\|_2 = \|S \cdot y\|_2 = \|y\|_2 \geq |y_2| = 2025.$$

Aufgabe 3 ($1 + 3 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie die Definition dafür, dass ein Ringelement *prim* ist.
2. Ist $T^3 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ prim? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Gibt es einen Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T^2) = T$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Gilt $(T^2 - 1, T + 1) = (2 \cdot T + 2)$ in $\mathbb{Q}[T]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Ring. Ein Element $p \in R \setminus \{0\}$ ist *prim*, wenn p keine Einheit ist und folgendes gilt:

$$\forall_{x,y \in R} \quad p \mid x \cdot y \implies (p \mid x \vee p \mid y).$$

2. *Behauptung.* Nein, das Polynom $T^3 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ ist *nicht* prim.

Beweis. Es gilt

$$T^3 + 1 = (T + 1) \cdot (T^2 - T + 1).$$

Außerdem ist $T^3 + 1 \neq 0$ und $T^3 + 1, T + 1$ und $T^2 - T + 1$ sind keine Einheiten in $\mathbb{Q}[T]$.

Also ist $T^3 + 1$ nicht irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$, und damit auch nicht prim. $\square$

[Man könnte auch direkt auf diesem Produkt mit der Definition von „prim“ argumentieren.]

3. *Behauptung.* Nein, es gibt *keinen* Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[T] \rightarrow \mathbb{R}[T]$ mit $\varphi(T^2) = T$.

Beweis. Angenommen, es gäbe einen solchen Ringhomomorphismus. Dann wäre $\varphi(T) \in \mathbb{R}[T]$ und

$$\varphi(T) \cdot \varphi(T) = \varphi(T^2) = T.$$

Aus Gradgründen ist jedoch T *kein* Quadrat in $\mathbb{R}[T]$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keinen solchen Ringhomomorphismus gibt. $\square$

4. *Behauptung.* Ja, es gilt $(T^2 - 1, T + 1) = (2 \cdot T + 2)$ in $\mathbb{Q}[T]$.

Beweis. Da 2 eine Einheit in $\mathbb{Q}[T]$ ist, gilt in $\mathbb{Q}[T]$:

$$(2 \cdot T + 2) = (2 \cdot (T + 1)) = (T + 1)$$

Wegen $T^2 - 1 = (T + 1) \cdot (T - 1)$ folgt aus Gradgründen, dass $T + 1$ ein größter gemeinsamer Teiler von $T^2 - 1$ und $T + 1$ in $\mathbb{Q}[T]$ ist. Also ist

$$(T^2 - 1, T + 1) = (T + 1).$$

Zusammen ergibt sich die Gleichheit der beiden Ideale in $\mathbb{Q}[T]$. □

[Man kann die Gleichheit der beiden Ideale auch direkt nachweisen, indem man beide Inklusionen zeigt.]

Aufgabe 4 ($3 + 1 + 3 + 3 = 10$ Punkte).

1. Formulieren Sie den *chinesischen Restsatz für Moduln*.
2. Nennen Sie eine Anwendung des chinesischen Restsatzes.
3. Gilt $\mathbb{Z}/28 \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/14$? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $15 \cdot x + 23 \cdot y = 1$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$ mit $(a, b) = (1)$. Seien $r, s \in R$ mit $r \cdot a + s \cdot b = 1$. Dann sind

$$\begin{aligned} f: R/(a \cdot b) &\longrightarrow R/(a) \oplus R/(b) \\ [x] &\longmapsto ([x], [x]) \\ g: R/(a) \oplus R/(b) &\longrightarrow R/(a \cdot b) \\ ([x], [y]) &\longmapsto [s \cdot b \cdot x + r \cdot a \cdot y] \end{aligned}$$

wohldefinierte zueinander inverse R -Modulisomorphismen.

2. Der chinesische Restsatz geht zum Beispiel im Beweis des Hauptsatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen ein.

[Eine weitere Anwendung ist zum Beispiel die Lösung von Systemen linearer ganzzahliger Kongruenzen.]

3. *Behauptung.* Die $\mathbb{Z}$ -Moduln $\mathbb{Z}/28$ und $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/14$ sind *nicht* isomorph.

Beweis. Mit dem chinesischen Restsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/28 &\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2^2 \oplus \mathbb{Z}/7 \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/14 &\cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/7. \end{aligned}$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte $\mathbb{Z}$ -Moduln sind diese beiden $\mathbb{Z}$ -Moduln jedoch nicht isomorph. $\square$

[Alternativ könnte man zum Beispiel auch damit argumentieren, dass alle Elemente $x \in \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/14$ die Gleichung $14 \cdot x = 0$ erfüllen und dass diese Eigenschaft unter Isomorphismen von $\mathbb{Z}$ -Moduln erhalten bleibt. In $\mathbb{Z}/28$ gilt jedoch $14 \cdot [1] = [14] \neq [0]$.]

4. *Behauptung.* Sei $x := -3, y := 2 \in \mathbb{Z}$. Dann ist $15 \cdot x + 23 \cdot y = 1$.

Beweis. Es gilt

$$15 \cdot x + 23 \cdot y = 15 \cdot (-3) + 23 \cdot 2 = -45 + 46 = 1. \quad \square$$

[Wie findet man eine solche Lösung ohne Probieren? Zum Beispiel durch rekursives Rückwärtseinsetzen in der Berechnung eines größten gemeinsamen Teilers von 15 und 23 mit dem euklidischen Algorithmus.]

Aufgabe 5 ($3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}).$$

1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A . Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Zeigen Sie: Ist $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $p(A) = 0$, so gilt $\mu_A \mid p$ in $\mathbb{C}[T]$.
3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A . Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Ist $\mathbb{C}^3$ ein $L(A)$ -zyklischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

1. Als ersten Schritt berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[T]$ von A : Nach Definition ist

$$\chi_A = \det(T \cdot I_3 - A) = (T - 1) \cdot ((T - 2) \cdot T - 1) = (T - 1)^3.$$

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist das Minimalpolynom μ_A ein normierter Teiler von χ_A in $\mathbb{C}[T]$. Also ist $\mu_A \in \{1, T - 1, (T - 1)^2, (T - 1)^3\}$. Wegen

$$\begin{aligned} 1(A) &= I_3 \neq 0 \\ (T - 1)(A) &= A - I_3 \neq 0 \\ (T - 1)^2(A) &= (A - I_3)^2 = A^2 - 2 \cdot A + I_3 = 0 \end{aligned}$$

folgt $\mu_A = (T - 1)^2$.

2. Sei $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $p(A) = 0$. Wir wenden Division mit Rest in $\mathbb{C}[T]$ auf p und μ_A an; somit existieren $q, r \in \mathbb{C}[T]$ mit

$$p = q \cdot \mu_A + r \quad \text{und} \quad [\deg r < \deg \mu_A \text{ oder } r = 0].$$

Insbesondere ist

$$r(A) = p(A) - q(A) \cdot \mu_A(A) = 0 - q(A) \cdot 0 = 0.$$

Mit der Minimalität des Minimalpolynoms folgt somit, dass $r = 0$ ist. Daher ist $p = q \cdot \mu_A$, d.h. $\mu_A \mid p$ in $\mathbb{C}[T]$.

3. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform folgt, dass die Jordansche Normalform von A nur Jordanblöcke zum Eigenwert 1 besitzt und dass (nach der Berechnung von μ_A im ersten Teil) der größte Jordanblock die Größe 2 hat. Also bleibt (da A eine 3×3 -Matrix ist) als einzige Möglichkeit für die Jordansche Normalform von A nur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Behauptung.* Nein, $\mathbb{C}^3$ ist *kein* $L(A)$ -zyklischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Beweis. Aus dem Satz über die Jordansche Normalform und der Berechnung im dritten Teil folgt

$$\mathbb{C}^3[L(A)] \cong_{\mathbb{C}[T]} \mathbb{C}[T]/(T-1) \oplus \mathbb{C}[T]/(T-1)^2.$$

Dieser $\mathbb{C}[T]$ -Modul ist *nicht* zyklisch (nach der Eindeutigkeitsaussage aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über dem Hauptidealring $\mathbb{C}[T]$). Also ist der $\mathbb{C}[T]$ -Modul $\mathbb{C}^3[L(A)]$ *nicht* zyklisch. $\square$

Aufgabe 6 ($2 + 2 + 4 = 8$ Punkte).

1. Sei K ein Körper. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft des *Tensorprodukts* zweier K -Vektorräume.
2. Formulieren Sie die universelle Eigenschaft einer weiteren Konstruktion von Vektorräumen.
3. Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und sei $f: V \rightarrow V$ ein Isomorphismus von K -Vektorräumen. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{aligned} V \otimes_K V &\longrightarrow V \otimes_K V \\ x \otimes y &\longmapsto f(x) \otimes f(y) \end{aligned}$$

einen wohldefinierten Isomorphismus von K -Vektorräumen definiert.

Lösung:

1. Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K . Das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ und die bilineare Abbildung $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes_K W$ besitzen zusammen die folgende universelle Eigenschaft:

Für jeden K -Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $f: V \times W \rightarrow Z$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\otimes: V \otimes_K W \rightarrow Z$ mit

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f \text{ (bilinear)}} & Z \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! f_\otimes \text{ (linear)} & \\ V \otimes_K W & & \end{array}$$

2. Universelle Eigenschaft von Quotientenvektorräumen: Sei K ein Körper, sei V ein K -Vektorraum und sei $U \subset V$ ein K -Untervektorraum. Dann besitzt der Quotientenvektorraum V/U zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\begin{aligned} \pi_U: V &\longrightarrow V/U \\ v &\longmapsto v + U \end{aligned}$$

die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden K -Vektorraum W und jede K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $U \subset \ker f$ gibt es genau eine K -lineare Abbildung $\bar{f}: V/U \rightarrow W$ mit

$$\bar{f} \circ \pi_U = f.$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \pi_U \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ V/U & & \end{array}$$

[Alternativ könnte man zum Beispiel auch die universelle Eigenschaft direkter Summen oder von äußeren Produkten formulieren.]

3. Nach der Funktorialität des Tensorprodukts ist

$$\begin{aligned} \varphi &:= f \otimes_K f: V \otimes_K V \rightarrow V \otimes_K V \\ x \otimes y &\mapsto f(x) \otimes f(y) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte K -lineare Abbildung.

Sei $g: V \rightarrow V$ das Inverse von f . Die Funktorialität des Tensorprodukts liefert analog, dass auch

$$\begin{aligned} \psi &:= g \otimes_K g: V \otimes_K V \rightarrow V \otimes_K V \\ x \otimes y &\mapsto g(x) \otimes g(y) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte K -lineare Abbildung ist.

Dann erhalten wir

$$\psi \circ \varphi = (g \otimes_K g) \circ (f \otimes_K f) = (g \circ f) \otimes_K (g \circ f) = \text{id}_V \otimes_K \text{id}_V = \text{id}_{V \otimes_K V}$$

und analog

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{V \otimes_K V}.$$

Also ist φ ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.

[Man könnte natürlich diese Schritte auch einzeln von Hand nachrechnen.]