Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik im SS2012 – Kurzskript, Ergänzung

Prof. Dr. C. Löh Sommersemester 2012

Satz (Satz von Andersen-Jessen und Definition des Produktmaßes)**.** *Sei I eine Menge und sei $((\Omega_i, S_i, P_i))_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I} S_i)$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle endlichen nicht-leeren Teilmengen $J \subset I$ und alle $(A_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} S_i$ gilt*

$$P\Big(\pi_J^{-1}\Big(\prod_{i\in J} A_i\Big)\Big) = \prod_{i\in J} P_i(A_i). \tag{$*$}$$

Man nennt P das Produktmaß von $(P_i)_{i\in I}$ *und verwendet die Notationen*

$$\bigotimes_{i\in I} P_i := P \quad \textit{und} \quad \bigotimes_{i\in I}(\Omega_i, S_i, P_i) = \Big(\prod_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I} S_i, P\Big).$$

Beweisskizze. Eindeutigkeit. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maßeindeutigkeitssatz, denn: Das System der Zylindermengen auf $\prod_{i\in I}\Omega_i$ ist schnitt-stabil und erzeugt nach Definition die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i\in I} S_i$. Da jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I} S_i)$, das die Bedingung $(*)$ für alle Zylindermengen erfüllt, auf den Zylindermengen durch die gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaße $(P_i)_{i\in I}$ bestimmt ist, ist der Maßeindeutigkeitssatz anwendbar und es folgt die gewünschte Eindeutigkeit.

Existenz. Der Beweis der Existenzaussage ist im allgemeinen Fall relativ aufwendig; wir skizzieren daher nur die wichtigsten Schritte. Ein vollständiger Beweis findet sich zum Beispiel im Buch *Maß und Wahrscheinlichkeit* von K. Schmidt (zweite Auflage, Springer, 2011; Kapitel 10.5/10.6).

Wir skizzieren zwei mögliche Strategien:

1. Im folgenden sei

$$Z := \Big\{\pi_J^{-1}\Big(\prod_{i\in J} A_i\Big) \;\Big|\; J \subset I \text{ endlich, } J \neq \emptyset, (A_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} S_i\Big\}$$

das System der Zylindermengen auf $\prod_{i\in I}\Omega_i$. Wir „definieren“ nun

$$\begin{aligned} Q\colon Z &\longrightarrow [0,1] \\ \pi_J^{-1}\Big(\prod_{i\in J} A_i\Big) &\longmapsto \prod_{i\in J} P_i(A_i). \end{aligned}$$

Man zeigt dann die folgenden Aussagen:

a) Das System Z von Teilmengen von $\prod_{i\in I}\Omega_i$ ist ein *Halbring*, d.h. Z erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Es ist $\emptyset \in Z$.
- Für alle $A, B \in Z$ ist $A \cap B \in Z$.
- Für alle $A, B \in Z$ gibt es eine endliche Menge K und eine Folge $(C_k)_{k\in K}$ paarweise disjunkter Elemente von Z mit $A \setminus B = \bigcup_{k\in K} C_k$.

b) Die Abbildung Q ist tatsächlich wohldefiniert, d.h. unabhängig von den gewählten Darstellungen der Zylindermengen.

c) Es ist $Q(\emptyset) = 0$, und Q ist auf Z *additiv*, d.h. für alle disjunkten Mengen $A, B \in Z$ mit $A \cup B \in Z$ ist $Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B)$.

d) Die Abbildung Q ist *σ-stetig in* $\emptyset$ auf Z, d.h. ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Elementen von Z mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, so ist $\lim_{n\to\infty} Q(A_n) = 0$. Da Q durch 1 beschränkt ist, folgt hieraus, dass Q auf Z bereits σ-additiv ist.

Mit dem sogenannten Maßfortsetzungssatz von Carathéodory folgt dann, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\sigma(Z) = \bigotimes_{i\in I} S_i$ mit $P|_Z = Q$ gibt. Insbesondere erfüllt P die Bedingung $(*)$ für alle Zylindermengen.
Die Hauptarbeit in diesem Beweis steckt darin, die σ-Stetigkeit von Q in $\emptyset$ nachzuweisen. Mit dieser Strategie ist dieser Schritt technisch extrem aufwendig. Daher geben wir noch eine weitere Beweisstrategie, die aber in den Grundzügen sehr ähnlich ist.

2. In der folgenden, zweiten, Strategie ist dieser Schritt zwar immer noch sehr aufwendig, wird aber dadurch, dass der endliche Fall zuvor separat bearbeitet wird und man dadurch ein etwas flexibleres Mengensystem statt Z verwenden kann, in der Durchführung etwas übersichtlicher und handhabbarer.

   Der Fall endlicher Produkte. Man konstruiert das Produktmaß zunächst für endliche Indexmengen I und geht dabei induktiv über $|I|$ vor. Ist $|I| \leq 1$, so ist nichts zu zeigen. Für den Induktionsanfang und den Induktionsschritt betrachtet man den Fall $|I| = 2$, etwa $I = \{1, 2\}$.
   Wir definieren

$$\begin{aligned} Q_I \colon S_1 \times S_2 &\longrightarrow [0,1] \\ A_1 \times A_2 &\longmapsto P_1(A_1) \cdot P_2(A_2). \end{aligned}$$

   Man zeigt dann die folgenden Aussagen:

   a) Das System $S_1 \times S_2$ ist ein Halbring auf $\Omega_1 \times \Omega_2$.

   b) Es ist $Q_I(\emptyset) = 0$ und die Abbildung Q_I ist auf $S_1 \times S_2$ additiv.

   c) Die Abbildung Q_I ist σ-additiv auf $S_1 \times S_2$ (dies geschieht durch einen iterierten Integrationsprozess über die Maße P_1 und P_2).

   Mit dem Maßfortsetzungssatz von Carathéodory folgt dann, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_I auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, S_1 \otimes S_2)$ mit $P_I|_{S_1\times S_2} = Q_I$ gibt.

   Der allgemeine Fall. Wir können nun annehmen, dass wir für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ bereits das zugehörige Produktmaß $P_J = \bigotimes_{i\in J} P_i$ konstruiert haben. Aus der Eindeutigkeitsaussage kann man leicht ableiten, dass diese endlichen Produktmaße unter den entsprechenden Projektionsabbildungen verträglich sind.

Im folgenden sei

$$Z' := \Big\{ \pi_J^{-1}(A) \;\Big|\; J \subset I \text{ endlich}, \, J \neq \emptyset, \, A \in \bigotimes_{i \in J} S_i \Big\}.$$

Wir „definieren“ nun

$$\begin{aligned} Q' \colon Z' &\longrightarrow [0,1] \\ \pi_J^{-1}(A) &\longmapsto \Big(\bigotimes_{i \in J} P_i \Big)(A). \end{aligned}$$

Man zeigt dann die folgenden Aussagen:

a) Das System Z' von Teilmengen von $\prod_{i \in I} \Omega_i$ ist eine *Algebra*, d.h. es ist $\emptyset \in Z$, $\prod_{i \in I} \Omega_i \in Z'$ und Z' ist unter Komplementbildung und endlichen Vereinigungen abgeschlossen.

b) Die Abbildung Q' ist tatsächlich wohldefiniert, d.h. unabhängig von den gewählten Darstellungen der Mengen.

c) Es ist $Q'(\emptyset) = 0$, und Q' ist auf Z' additiv.

d) Die Abbildung Q' ist σ-stetig in $\emptyset$ auf Z'. Da Q' durch 1 beschränkt ist, folgt hieraus, dass Q' auf Z' bereits σ-additiv ist.

Mit dem Maßfortsetzungssatz von Carathéodory folgt dann, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\sigma(Z') = \bigotimes_{i \in I} S_i$ mit $P|_{Z'} = Q'$ gibt. Insbesondere erfüllt P die Bedingung $(*)$ für alle Zylindermengen. □

Version vom 1. Juni 2012
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg